

제6장에서, 우리는 구조물을 구조 요소들의 결합으로 생각함으로써 단순 프레임 구조의 강성행렬을 구할 수 있었다. 구조이론으로부터 알려진 요소의 끝에서의 힘과 모멘트를 사용하여, 요소들 사이의 결합부는 변위 구속(compatability)으로 연관되고, 결합부에서의 힘과 모멘트는 평형조건을 부과함으로써 구해진다.

유한 요소법에서도 똑같은 과정을 따르지만 컴퓨터를 사용한 계산을 위하여 더욱 체계적으로 되어진다. 비록 매우 적은 요소를 가진 구조에 대해서는 제6장의 기술한 방법에 의하여 간단하게 해석될 수 있지만, 많은 요소로 된 대형 구조물에 대해서 기장(bookkeeping)하는 것은 곧 해석자의 인내를 넘어서게 된다. 유한 요소법에서는, 요소좌표와 힘은 전체 좌표로 변환되어지고 전체 구조물의 강성행렬은 공통의 방향을 가진 전체 좌표에서 나타내어진다.

유한 요소법에서 구해지는 정확도는 진동 모드 형태를 나타낼 수 있는가에 달려 있다. 구조물의 결합부나 코너부 사이에 오직 하나의 유한 요소를 사용하면 정적 처짐곡선이 최저차의 동적 모드 형상에 대한 좋은 근사가 되기 때문에 최저차 모드에 대하여 좋은 결과를 낳는다. 고차 모드에 대해서는 구조 결합부 사이에 다수의 요소가 필요하다. 이것은 대형 행렬을 낳게 되고 계의 고유값과 고유 벡터에 대하여 풀이하는 데 컴퓨터가 필수적으로 되도록 한다.

본 장에서는 독자들에게 유한 요소법의 기본 개념을 소개하고, 동적 문제를 위한 운동 방정식을 완성하기 위하여 상당 질량 행렬식의 전개를 포함하고 있다.

이 곳에서는 단지 축 요소와 보 요소와 같은 구조용 요소에 대해서만 논의 한다. 평판과 셸(shells)의 취급을 위해서는 독자들은 다른 참고서를 참조하기 바란다.

### 10.1 요소강성 및 요소질량

**축 요소** 단순지지 끝단으로 된 요소는 오직 축방향 힘만을 지지할 수 있기 때문에, 그러므로 스프링과 같은 작용을 하게 된다. 그림 10.1.1은 고정된 벽에 힘  $F$ 를 받으면서 단순지지

된 스프링과 균일봉을 보여준다. 두 경우에 대한 힘-변위 관계식을 단순히 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{스프링 } f &= ku \\ \text{균일봉 } F &= \left(\frac{EA}{l}\right)u \end{aligned} \tag{10.1.1}$$

일반적으로, 이들 축방향 요소들은 양단의 변위를 가능하게 한 핀으로 연결된 구조의 일부가 될 수 있다. 유한 요소법에서는 요소의 양단에서의 변위와 힘은 적절한 부호로서 간주 되어질 수 있다. 그림 10.1.2에는 변위  $u_1, u_2$ 와 힘  $F_1, F_2$  모두 양의 방향으로 명시된 축방향 요소를 보여준다. 만일 우리가 힘-변위 관계를 강성행렬로서 나타내면 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \tag{10.1.2}$$

강성행렬의 제1행의 요소는 그림 10.1.3에 보인 것과 같이  $u_1 = 1$ 과  $u_2 = 0$ 일 때 양단에서의 힘을 표시 한다. 그러므로  $F_1 = ku_1$ 이고  $F_2 = -ku_1$ 이다.

마찬가지로,  $u_2 = 1$  및  $u_1 = 0$ 으로 놓음으로써, 그림 10.1.4에서와 같이  $F_1 = -ku_2$ 이고  $F_2 = ku_2$ 를 얻는다. 그러므로 식 (10.1.2)는 다음 식과 같이 된다.

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \tag{10.1.2'}$$

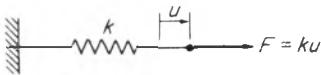


그림 10.1.1

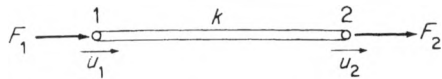
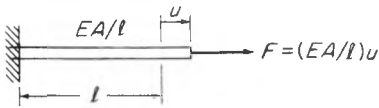


그림 10.1.2

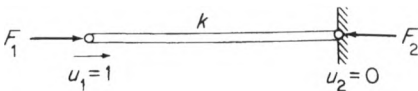


그림 10.1.3

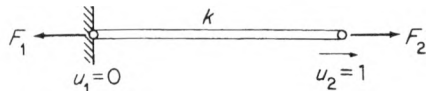


그림 10.1.4

만일 스프링이 균일봉으로 바뀌면,  $k = AE/l$ 이 되고 식은 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \tag{10.1.3}$$

그러므로 이 식들은 축 요소에 대한 강성행렬을 축 요소의 방향에 관계없이 축 좌표  $u_i$ 와 축방향 힘  $F_i$ 의 향으로 정의한 것이다.

**축 요소에 대한 모드 형상과 질량행렬** 축요소의 두 끝이  $u_1$ 과  $u_2$ 로 이동되면, 임의 점의 변위  $\xi = x/l$ 는 그림 10.1.5(a)에서 보는 것과 같이 직선의 형태로 가정되어진다. 그리하여 변위는 그림 10.1.5(b)에서 보여지는 두 개의 모드 형상의 중첩이 된다. 그러면 정규화된 모드 형상은 다음과 같다.

$$\varphi_1 = (1 - \xi) \quad \text{그리고} \quad \varphi_2 = \xi \tag{10.1.4}$$

질량행렬은  $u$ 를 두 모드 형상의 합으로서 표현한 후 운동 에너지를 위한 식을 쓰게 되면 구해진다.

$$u = (1 - \xi)u_1 + \xi u_2 \tag{10.1.5}$$

이 때 단위길이당 균일 질량 분포  $m$ 을 가정한다.

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_0^l \dot{u}^2 m \, dx = \frac{1}{2} m \int_0^l [(1 - \xi)\dot{u}_1 + \xi\dot{u}_2]^2 l \, d\xi \\ &= \frac{1}{2} ml \left( \frac{1}{3} \dot{u}_1^2 + \frac{1}{3} \dot{u}_1 \dot{u}_2 + \frac{1}{3} \dot{u}_2^2 \right) \end{aligned} \tag{10.1.6}$$

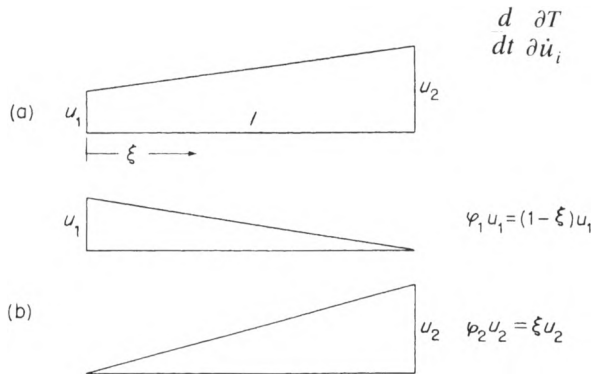


그림 10.1.5

라그랑즈 방정식에 일반화된 질량은 다음 식과 같으므로

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_i}$$

다음의 식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_1} &= ml \left( \frac{1}{3} \ddot{u}_1 + \frac{1}{6} \ddot{u}_2 \right) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_2} &= ml \left( \frac{1}{6} \ddot{u}_1 + \frac{1}{3} \ddot{u}_2 \right) \end{aligned}$$

이로부터 축 요소에 대한 질량행렬을 다음과 같이 구할 수 있다.

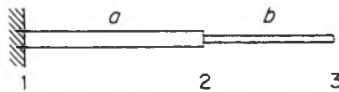
$$\frac{ml}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{10.1.7}$$

또한 질량행렬의 각 항은 다음 식으로부터 구할 수 있다.

$$m_{ij} = \int \varphi_i \varphi_j dm$$

**예제 10.1.1**

그림 10.1.6에 보인 두 개의 단면적을 가진 봉의 길이방향 진동에 관한 운동 방정식을 구하라.



**그림 10.1.6**

**풀이** 결합부를 1, 2 및 3으로 번호를 부여하면, 두 개의 축방향 요소 1-2와 2-3을 얻게 되고 변위는  $u_1, u_2$  및  $u_3$ 가 된다.  $u_1$ 은 0이지만, 우선 우리는 그것을 구속시키지 않고 나중에 그것에 0의 값을 부여한다.

식 (10.1.7)과 (10.1.3)으로부터 요소질량 및 요소강성 항들은 다음과 같다:

$$\text{요소 } a: \frac{M_a}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad k_a \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{요소 } b: \frac{M_b}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad k_b \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

이 때  $k_a = EA_a/l_a$ ,  $k_b = EA_b/l_b$ ,  $M_a = m_a l_a$  및  $M_b = m_b l_b$ 이다.

요소행렬들은 공통좌표  $u_2$ 를 가지고 그들을 중첩시킴으로써, 다음과 같은  $3 \times 3$ 행렬로 조합될 수 있다:

$$\text{질량행렬} \quad \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2M_a & M_a & 0 \\ M_a & 2M_a + 2M_b & M_b \\ 0 & M_b & 2M_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix} \quad (10.1.8)$$

$$\text{강성행렬} \quad \begin{bmatrix} k_a & -k_a & 0 \\ -k_a & k_a + k_b & -k_b \\ 0 & -k_b & k_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (10.1.9)$$

우리는 이제 강성행렬은 특이(singular)행렬이고, 역행렬이 없다는 데 주목하자. 이것은 변위에 제한이 없었기 때문에 예상되었던 것이다. 강성행렬의 제1행과 제3행은 강성행렬에서 나타나 있듯이  $k_a(u_1 - u_2) = k_b(u_2 - u_3) = 0$ 이 된다. 이것은 좌표들 사이에서 상대운동이 일어나지 않는 것을 의미하고, 강체 이동에 해당되는 상태이다.

만일  $u_1 = 0$ 이 되도록 1인 점을 고정시키면, 행렬의 제1열은 없어질 수 있다. 두 개 단면을 가진 봉의 길이방향 진동에 관한 제2열 및 제3열은 다음 식으로 되어진다.

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2(M_a + M_b) & M_b \\ M_b & 2M_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_b) & -k_b \\ -k_b & k_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

**특수한 경우** 만일  $A_a = A_b = A$ ,  $l_a = l_b = \frac{1}{2}L$ 이고  $M_a = M_b = \frac{1}{2}M$ 이면, 앞의 문제는 전체 길이  $L$ 이고, 전체 질량  $M$ 인 균일봉 문제가 되고, 중간 지점에 좌표를 가지고 자유단을 가진 2 자유도계로 풀이될 수 있다. 그러면 앞의 문제의 방정식은 다음과 같이 된다.

$$\frac{M}{12} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix} + \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

만일 우리가  $\lambda = \omega^2 ML/24EA$ 로 두면, 고유 진동수를 구하기 위한 특성 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{vmatrix} (2 - 4\lambda) & -(1 + \lambda) \\ -(1 + \lambda) & (1 - 2\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

또는

$$\lambda^2 - \frac{10}{7}\lambda - \frac{1}{7} = 0$$

그 해는 다음과 같다.

$$\lambda = \begin{cases} 0.1082 \\ 1.3204 \end{cases} \quad \omega = \begin{cases} 1.6115 \sqrt{\frac{EA}{ML}} \\ 5.6293 \sqrt{\frac{EA}{ML}} \end{cases}$$

길이방향 진동에서 균일봉의 고유 진동수는 알려져 있고, 식  $\omega_i = (2n+1)(\pi/2)\sqrt{EA/ML}$ 으로 주어져 있다. 처음의 두 모드에 대하여 이 방정식으로부터 계산한 결과는 다음과 같다.

$$\omega = \begin{cases} 1.5708 \sqrt{\frac{EA}{ML}} \\ 4.7124 \sqrt{\frac{EA}{ML}} \end{cases}$$

둘 사이를 비교하면 2자유도 유한 요소 모델의 결과와 연속 모델의 결과 사이의 일치는 1차 모드에 대해서는 2.6% 높고 2차 모드에 대해서는 19.5% 높게 나타난다. 세 개 요소 모델은 물론 더욱 가까운 일치된 값을 주리라고 기대되어 진다.

**변수의 성질** 변수의 성질 문제에 대한 한 가지 단순한 접근은 짧은 길이를 가진 많은 요소를 사용하는 것이다. 그러면 각각의 요소에 대한 질량과 강성의 차이는 매우 작고 무시될 수 있다. 그러면 문제는 각각의 요소에 대하여 균일한 질량과 강성을 가진 문제로 되어 이러한 항들이 적분의 밖으로 옮겨질 수 있는 상당히 단순한 문제로 된다. 물론 많은 수의 요소는 큰 자유도의 문제도 이끌어낼 것이다.

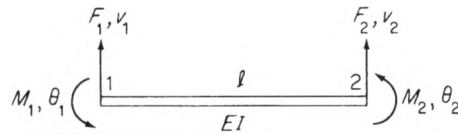
**컴퓨터 프로그램** 프로그램 `bar.m`은 외팔봉에 대한 고유 진동수를 유한 요소법에 의하여 결정함으로써 계산하는 MATLAB®으로 쓰여진 파일이다. 그것은 요소들이 다른 성질을 가질 수 있도록 허락하기 때문에, 이 프로그램은 변화하는 성질을 가진 봉을 모델링하는 데 사용되어질 수 있다. 이 프로그램은 사용자로 하여금 봉의 길이, 요소의 수, 각 요소의 질량, 각 요소의 탄성계수 및 각 요소의 단면적 등을 입력하도록 요구한다. 그러면 모델에 대한 질량행렬과 강성행렬을 구성하게 된다. 이 행렬이  $3 \times 3$ 인 경우에 대해서는 식 (10.1.8)과 (10.1.9)에 주어져 있다. 이들로부터 동행렬을 구성한다. 고유 진동수는 동행렬의 고유값으로부터 구해진다. 이 문제에 대한 더 자세한 정보는 부록 F를 참고하라.

**10.2 보 요소에 대한 강성 및 질량**

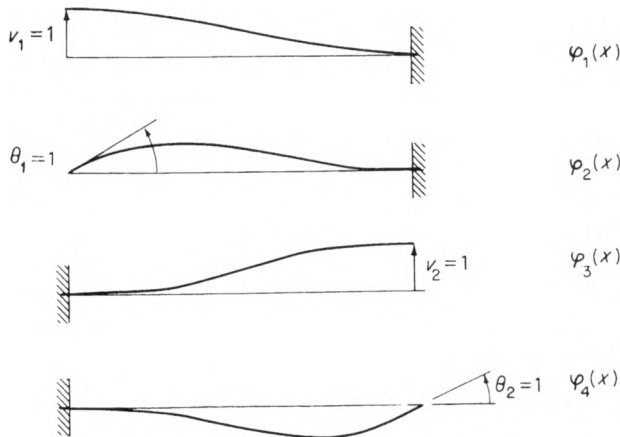
**보 강성** 만일 요소의 끝단이 인접 구조에 단순지지되어 있지 않고 강하게 연결되어 있다면, 요소는 결합부에서 모멘트와 축방향 힘이 작용하는 보와 같이 행동할 것이다. 일반적으로, 상대 축방향 변위  $u_2 - u_1$ 은 보의 축방향 변위  $v$ 에 비하여 작게 될 것이고 0으로 가정할 수 있다. 보에 작용하는 힘과 모멘트뿐만 아니라 축방향 힘들도 고려되어야 할 경우에는 다음에 보여주듯이 보 강성행렬에 더하는 것은 간단한 일이다.

보 요소에 대한 국부 좌표계는 양단에서는 오직 축방향 변위와 회전이다. 우리는 이 토론에서는 오직 평면구조만을 고려하고, 각각의 결합부는 축방향 변위  $v$ 와 회전  $\theta$ 를 하게 되고 네 개의 좌표  $v_1, \theta_1$ 과  $v_2, \theta_2$ 를 가져온다. 이들 좌표계의 양의 의미는 임의이지만, 컴퓨터의 계산을 목적으로 그림 10.2.1의 선도가 대부분의 구조해석 공학자들에게 받아들여지는 것이다. 힘과 모멘트의 양의 의미 역시 같은 선도를 따른다.

앞서의 변위들은 그림 10.2.2에 나타난  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)$  및  $\varphi_4(x)$ 인 네 가지 모드 형상의 중첩이라고 생각되어질 수 있다. 두 끝단에서 요구되는 힘과 모멘트는 제6장에서 구하



**그림 10.2.1** 보 변위 및 힘의 양의 방향



**그림 10.2.2**

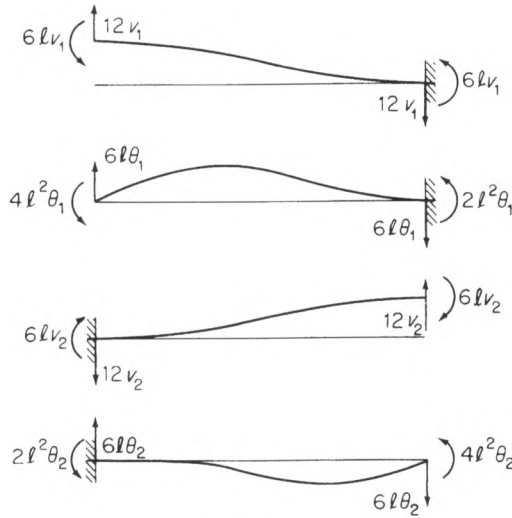


그림 10.2.3

였고, 그림 10.2.3에 계수  $EI/l^3$ 을 생략한 후 나타내었다. 이 그림으로부터 곧 힘-강성 관계식을 구할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (10.2.1)$$

강성을 구하기 위한 식 (10.2.1)은 그림 10.2.3에 보인 것과 같은 주어진 힘과 모멘트에 서부터 구해진다. 질량행렬뿐만 아니라 강성행렬도 보의 형상함수  $\varphi_i(x)$ 가 주어지면 포텐셜 에너지와 운동 에너지를 사용하여 구할 수 있다.

보의 일반 방정식을 전개하면, 그것은 3차식이 되는데 처짐은 다음의 형태로 나타내어진다.

$$v(x) = p_1 + p_2\xi + p_3\xi^2 + p_4\xi^3 \quad (10.2.2)$$

이 때

$$\xi = \frac{x}{l} \text{ 그리고 } p_i = \text{상수}$$

미분함으로써 기울기의 식을 구할 수 있다.

$$l\theta(x) = p_2 + 2p_3\xi + 3p_4\xi^2 \quad (10.2.3)$$

만일 경계조건으로  $\xi=0$ 과  $\xi=1$ 을 삽입하면, 경계 방정식은 다음의 행렬식으로 표시될 수 있다:

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ l\theta_1 \\ v_2 \\ l\theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix} \quad (10.2.4)$$

위에 보여진 것과 같은 구역지어진 행렬로부터,  $p_1$ 과  $p_2$ 는 단위행렬에 의하여  $v_1$  및  $l\theta_1$ 과 관련되는 것이 분명하다.  $p_1=v_1$ 과  $p_2=l\theta_1$ 을 대입하면 행렬의 마지막 두 열을  $p_3$ 와  $p_4$ 로 쉽게 풀이할 수 있다. 그렇게 하면 식 (10.2.4)의 구하고자 하는 역행렬은 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -3 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ l\theta_1 \\ v_2 \\ l\theta_2 \end{Bmatrix} \quad (10.2.5)$$

이 방정식은 각각의 변위를 1로 두고 다른 것을 0으로 둬으로써  $p_i$ 의 결정을 가능하게 한다. 즉, 다른 모든 변위는 0으로 두고  $v_1(x)=1$ 인 경우에 대하여, 식 (10.2.5)의 제1행을 얻을 수 있다.

$$p_1 = 1, \quad p_2 = 0, \quad p_3 = -3, \quad \text{그리고} \quad p_4 = 2$$

이들을 식 (10.2.2)에 삽입함으로써 그림 10.2.2의 첫 번째 모양에 대한 형상함수를 구한다.

$$\varphi_1(x) = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3$$

마찬가지로  $\theta_1=1$ 에 제2행을 구하면 다음과 같다.

$$p_1 = 0, \quad p_2 = l, \quad p_3 = -2l, \quad \text{그리고} \quad p_4 = l$$

그리고

$$\varphi_2(x) = l\xi - 2l\xi^2 + l\xi^3$$

다른 두 개의  $\varphi_i(x)$ 도 유사한 방법으로 구해진다. 요약하면, 네 개의 보 형상함수에 대하여 다음 식을 구하게 된다:

$$\varphi_1(x) = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3$$

$$\begin{aligned}
 \varphi_2(x) &= l\xi - 2l\xi^2 + l\xi^3 \\
 \varphi_3(x) &= 3\xi^2 - 2\xi^3 \\
 \varphi_4(x) &= -l\xi^2 + l\xi^3
 \end{aligned}
 \tag{10.2.6}$$

**일반화된 질량 및 일반화된 강성** 일반적으로 변위를 그림 10.2.2에 나타낸 네 개의 형상함수의 중첩에 의한다고 생각함으로써, 우리는 다음의 식을 얻는다.

$$\begin{aligned}
 y(x) &= \varphi_1 v_1 + \varphi_2 \theta_1 + \varphi_3 v_2 + \varphi_4 \theta_2 \\
 &= \varphi_1 q_1 + \varphi_2 q_2 + \varphi_3 q_3 + \varphi_4 q_4
 \end{aligned}
 \tag{10.2.7}$$

여기서  $q_i$ 는 끝단의 변위를 위하여 넣어졌다.

일반화된 질량을 구하기 위하여, 앞의 식은 운동 에너지를 위한 수식에 삽입되어진다.

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \int \dot{y}^2 m \, dx = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \dot{q}_i \dot{q}_j \int \varphi_i \varphi_j m \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \sum_i \sum_j m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j
 \end{aligned}
 \tag{10.2.8}$$

그리하여 일반화된 질량  $m_{ij}$ 는 질량행렬의 요소를 구성하고 다음 식과 같게 된다.

$$m_{ij} = \int_0^l \varphi_i \varphi_j m \, dx
 \tag{10.2.9}$$

네 개의 보함수를 식 (10.2.9)에 삽입함으로써, 균일보 요소에 대한 질량행렬은 끝단의 변위의 항으로 표시되어진다.

$$\frac{ml}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ \hline 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix}
 \tag{10.2.10}$$

그 행렬은 강성행렬에 사용되어진 것과 같은 보함수에 기초하고 있기 때문에 **집중질량 (consistent mass)**이라고 불린다.<sup>1)</sup>

1) J.S. Archer, "Consistent Mass Matrix for Distributed Mass Systems," J.Struct Div. ASCE, Vol. 89, No. STA4 (August 1963), pp. 161-178.

**10.3 좌표 변환(전체 좌표계)**

국부 요소의 향으로 전체 구조의 강성행렬을 결정하는 경우에는, 적합한 조건을 확인하기 위하여 우선 인접한 요소들 사이의 변위를 대등하도록 할 필요가 있다. 제6장에서는, 각 결합부의 시험을 통하여 이루어졌고, 각 결합부에서 근접 요소의 방향을 고려하였다.

유한 요소법에서는 변위와 힘을 전체 좌표(global coordinate)라고 알려진 공통의 좌표계로 변환함으로써 단순화된다.

평면구조를 다시 고려하고 수평 및 수직방향으로 가정되어지는 전체 좌표  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ 와 각도  $\alpha$ 를 가지는 국부 요소 ①, ②를 조사하면 그림 10.3.1(a)에 보여진 것과 같다.

결합부 ①에서 ①'으로의 변위  $\mathbf{r}_1$ 은 국부 및 전체 좌표에서 모두 같아야만 한다. 이 요구 조건은 다음 식으로 표현되어진다.

$$\mathbf{r}_1 = u_1 \mathbf{i} + v_1 \mathbf{j} = \bar{u}_1 \bar{\mathbf{i}} + \bar{v}_1 \bar{\mathbf{j}}$$

여기서  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ 와  $\bar{\mathbf{i}}, \bar{\mathbf{j}}$ 는 두 좌표계에 대한 단위 벡터이다. 앞의 식에 대한  $\mathbf{i}$ 를 내적하면 다음 식을 얻는다.

$$u_1(\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}) + v_1(\mathbf{j} \cdot \mathbf{i}) = \bar{u}_1(\bar{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{i}) + \bar{v}_1(\bar{\mathbf{j}} \cdot \mathbf{i})$$

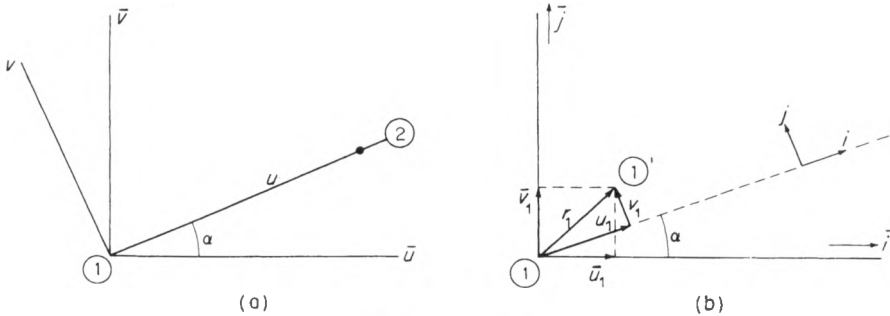
즉

$$u_1 + 0 = \bar{u}_1 \cos \alpha + \bar{v}_1 \sin \alpha$$

다음으로  $\mathbf{j}$ 를 내적하면 다음 식을 얻는다.

$$0 + v_1 = -\bar{u}_1 \sin \alpha + \bar{v}_1 \cos \alpha$$

그리하여 우리는 이들 결과를 다음의 행렬식으로 나타낼 수 있다.



**그림 10.3.1**

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \end{Bmatrix} \quad (10.3.1)$$

앞의 식은 국부 좌표  $u_1, v_1$ 을 전체 좌표  $\bar{u}_1, \bar{v}_1$ 의 항으로 표현하였다. 이들 결과는 그림 10.3.1(b)로부터 기하학적으로 손쉽게 확인되어진다.

마찬가지로, 국부 좌표에서 결합부 ②의 변위는 동일한 변환식에 의하여 전체 좌표의 항으로 표현되어질 수 있다. 두 좌표계에 대한 회전각은 물론 동일해야 만하고,  $\theta = \bar{\theta}$ 로 된다. 그리하여 우리는 변환행렬에서  $\theta$ 를 다음과 같이 포함시킬 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix}_i \quad i = 1, 2 \quad (10.3.2)$$

그리하여 수평에 대하여 반시계방향으로 측정하여 각도  $\alpha$ 를 만듦으로써 임의 요소에 대한 변환행렬은 다음과 같게 된다.

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & & & \\ & -s & c & 0 & & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & & \\ & & & & c & s & 0 \\ & & & & 0 & -s & c & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{\theta}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{\theta}_2 \end{Bmatrix} \quad (10.3.3)$$

여기서  $c = \cos \alpha$  및  $s = \sin \alpha$ 이다. 변위에 대하여 유도된 변환행렬은 마찬가지로 힘 벡터에 대해서도 적용되어질 수 있다는 것을 쉽게 확인할 수 있다.

더욱 단순한 표기로서, 우리는 국부에서 전체 좌표로 변환식을 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} r &= T\bar{r} \\ F &= TF \end{aligned} \quad (10.3.4)$$

여기서  $T$ 는 변환행렬,  $r, F$  및  $\bar{r}, \bar{F}$ 는 각각 국부 및 전체 좌표에서의 변위와 힘이다. 우리는 이것을  $r$ 과  $F$ 사이의 관계에 더하게 되는데 이것은 강성행렬이다.

$$F = kr \quad (10.3.5)$$

그리고 그것은 전체계에서는  $\bar{F} = \bar{k}\bar{r}$ 로 쓸 수 있다. 식 (10.3.4)에서 우리는 다음 식을 얻는다.

$$\bar{F} = T^{-1}F = T^T F \quad (10.3.6)$$

여기서 우리는 변환행렬은 직교행렬이고  $T^{-1} = T^{T2)}$ 인 것에 주목하고자 한다. 강성식으로 부터,  $F$ 를 대치하고,  $r$ 을  $\bar{r}$ 의 향으로 바꿈으로써 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \bar{F} &= T^T k r \\ &= T^T k T \bar{r} = \bar{k} \bar{r} \end{aligned} \tag{10.3.7}$$

그리하여 국부 좌표계에 대한  $k$ 는 다음의 식에 의하여 전체 좌표계에 대한  $\bar{k}$ 로 변환되어진다.

$$\bar{k} = T^T k T \tag{10.3.8}$$

**10.4 전체 좌표계에서의 요소강성 및 요소질량**

**축방향 요소** 축방향 요소에 있어서, 요소 모멘트는 0이고, 끝단의 힘과 변위는 요소길이와 나란하다. 그러므로 오직 축방향 요소만을 포함한 계에 있어서는  $6 \times 6$  변환행렬은 다음의  $4 \times 4$  행렬로 축소되어진다.

$$T = \left[ \begin{array}{cc|cc} c & s & 0 & \\ -s & c & & \\ \hline 0 & & c & s \\ & & -s & c \end{array} \right] \tag{10.4.1}$$

우리는 축방향 요소에 대한 강성 및 질량행렬이  $2 \times 2$ 차원이고, 그러므로 다음과 같이  $4 \times 4$  행렬로 다시 나타내어져야만 한다는 것을 주목한다.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} &= \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{l} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} &= \frac{ml}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} = \frac{ml}{6} \left[ \begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{v}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{v}_2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{10.4.2}$$

그러면 이들  $4 \times 4$  행렬은 그것을 전체 좌표계로 변환하기 위하여 식 (10.3.8)에 삽입되어질 수 있다.

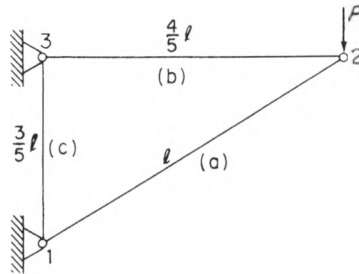
2) 부록 C 참조

$$\bar{k} = T^T k T = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} \quad (10.4.3)$$

$$\bar{m} = T^T m T = \frac{ml}{6} \begin{bmatrix} 2c^2 & 2cs & c^2 & -cs \\ 2cs & 2s^2 & cs & s^2 \\ c^2 & cs & 2c^2 & 2cs \\ cs & s^2 & 2cs & 2s^2 \end{bmatrix} \quad (10.4.4)$$

**예제 10.4.1**

그림 10.4.1의 힌지로 지지된 변길이가 3:4:5인 직삼각형 트러스에 대한 강성행렬을 구하라.



**그림 10.4.1**

**풀이** 구조는 결합부 1, 2, 3을 가진 세 개의 단순지지 요소 a, b, c로 구성되어 있다. 각각의 결합부는 전체계에서 2자유도를 가지고, 여섯 개의 힘과 변위관계는 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_{1x} \\ \bar{F}_{1y} \\ \bar{F}_{2x} \\ \bar{F}_{2y} \\ \bar{F}_{3x} \\ \bar{F}_{3y} \end{Bmatrix} = [K] \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{v}_3 \end{Bmatrix}$$

각각의 요소의 전체 강성은 특정 요소에 대하여  $\sin \alpha$ 와  $\cos \alpha$ 를 삼입함으로써 식 (10.4.3)으로부터 구해진다.

요소 a(1에서 2):

$$c = \frac{4}{5}, s = \frac{3}{5}$$

$$\bar{k}_a \bar{r}_a = \frac{1}{25} \left( \frac{EA}{l} \right) \left[ \begin{array}{cc|cc} 16 & 12 & -16 & -12 \\ 12 & 9 & -12 & -9 \\ \hline -16 & -12 & 16 & 12 \\ -12 & -9 & 12 & 9 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \end{Bmatrix}$$

요소 b(2에서 3):

$$c = -1, s = 0$$

$$\begin{aligned} \bar{k}_b \bar{r}_b &= \left( \frac{5EA}{4l} \right) \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{v}_3 \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{25} \left( \frac{EA}{l} \right) \left[ \begin{array}{cc|cc} \frac{125}{4} & 0 & -\frac{125}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{125}{4} & 0 & \frac{125}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{v}_3 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

요소 c(3에서 1):

$$c = 0, s = -1$$

$$\begin{aligned} \bar{k}_c \bar{r}_c &= \left( \frac{5EA}{3l} \right) \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \bar{u}_3 \\ \bar{v}_3 \\ \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{25} \left( \frac{EA}{l} \right) \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{125}{3} & 0 & -\frac{125}{3} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{125}{3} & 0 & \frac{125}{3} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \bar{u}_3 \\ \bar{v}_3 \\ \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

이들은 이제  $6 \times 6$  강성식으로 구성되어져야만 한다. a와 b에 대한 행렬은 공통의 변위  $\begin{Bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \end{Bmatrix}$ 를 갖고, 그것은 공통의 변위와 관련된 단면이 서로 겹치는 것으로 쉽게 알 수 있다.

$$\left( \frac{EA}{25l} \right) \left[ \begin{array}{ccc|cc} 16 & 12 & -16 & -12 & \\ 12 & 9 & -12 & -9 & \\ \hline -16 & -12 & 16 + \frac{125}{4} & 12 & -\frac{125}{4} & 0 \\ -12 & -9 & 12 & 9 & 0 & 0 \\ \hline & & -\frac{125}{4} & 0 & \frac{125}{4} & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{v}_3 \end{Bmatrix}$$

$\bar{k}_c$ 에 대해서 적절한 위치를 찾기 위하여, 네 개의  $2 \times 2$  행렬로 분리되어질 수 있고, 그것은 다음과 같이 정리되어질 수 있다.

$$\left(\frac{EA}{25l}\right) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{125}{3} & 0 & -\frac{125}{3} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{125}{3} & 0 & \frac{125}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{v}_3 \end{Bmatrix}$$

이들 세 개 행렬을 합침으로써, 우리는 트러스에 대한 강성행렬을 다음과 같이 구하게 된다.

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_{1x} \\ \bar{F}_{1y} \\ \bar{F}_{2x} \\ \bar{F}_{2y} \\ \bar{F}_{3x} \\ \bar{F}_{3y} \end{Bmatrix} = \left(\frac{EA}{25l}\right) \begin{bmatrix} 16 & 12 & -16 & -12 & 0 & 0 \\ 12 & 9 + \frac{125}{3} & -12 & -9 & 0 & -\frac{125}{3} \\ \hline -16 & -12 & 16 + \frac{125}{4} & 12 & -\frac{125}{4} & 0 \\ -12 & -9 & 12 & 9 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\frac{125}{4} & 0 & \frac{125}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{125}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{125}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{v}_3 \end{Bmatrix}$$

이제 변위 0의 조건을 결합부 1과 3에 적용시키면, 그것은 제 1, 2, 5 및 6열을 완전히 없애고 다음의 식으로 남게 된다.

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_{1x} \\ \bar{F}_{1y} \\ 0 \\ -P \\ \bar{F}_{3x} \\ \bar{F}_{3y} \end{Bmatrix} = \left(\frac{EA}{25l}\right) \begin{bmatrix} -16 & -12 \\ -12 & -9 \\ \hline 16 + 31.25 & 12 \\ 12 & 9 \\ \hline -31.25 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \end{Bmatrix}$$

중간의 두 열은 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -P \end{Bmatrix} = \left(\frac{EA}{25l}\right) \begin{bmatrix} 47.25 & 12 \\ 12 & 9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \end{Bmatrix}$$

이것은 다음과 같이 변환되어진다.

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \end{Bmatrix} = \left(\frac{25l}{EA}\right) \frac{1}{281.25} \begin{bmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 47.25 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -P \end{Bmatrix}$$

그러므로 결합부 2의 수직 및 수평방향 처짐은 다음과 같다.

$$\bar{u}_2 = \left( \frac{25l}{281.25EA} \right) (12P) = 1.066 \frac{Pl}{EA}$$

$$\bar{v}_2 = \left( \frac{25l}{281.25EA} \right) (-47.25P) = -4.200 \frac{Pl}{EA}$$

이들 값에서, 핀 1과 3에서의 반력은 다음과 같다.

$$\bar{F}_{1x} = \left( \frac{EA}{25l} \right) \left[ -16 \times 1.066 \frac{Pl}{EA} + 12 \times 4.200 \frac{Pl}{EA} \right] = 1.333P$$

$$\bar{F}_{1y} = 1.000P$$

$$\bar{F}_{3x} = -1.333P$$

$$\bar{F}_{3y} = 0$$

물론 이들 반력은 고정된 핀에 관한 모멘트를 취함으로써 쉽게 구할 수 있지만, 본 예제는 더욱 복잡한 구조물인 경우에 따라해야 할 일반적인 절차를 나타내었다.

**보 요소** 보 요소에 대한 강성 및 질량행렬은  $4 \times 4$ 차원이고, 이 때의 변환 행렬은  $6 \times 6$ 이다. 그리하여 이들 행렬을 전체 좌표로 변환하기 위하여, 축방향 성분을 더함으로써 다음과 같이 재구성하여 그들을 변형시킬 필요가 있다:

$$\frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{matrix}$$

$$\frac{ml}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & | & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

그러면 변환에 사용되는 요소행렬은 다음과 같다.

$$k = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} R & 0 & 0 & -R & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6l & 0 & -12 & 6l \\ 0 & 6l & 4l^2 & 0 & -6l & 2l^2 \\ \hline -R & 0 & 0 & R & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6l & 0 & 12 & -6l \\ 0 & 6l & 2l^2 & 0 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (10.4.5)$$

여기서  $R = \left(\frac{EA}{l}\right)\left(\frac{l^3}{EI}\right) = \frac{Al^2}{I}$ 이다.

$$m = \frac{ml}{420} \begin{bmatrix} N & 0 & 0 & \frac{1}{2}N & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22l & 0 & 54 & -13l \\ 0 & 22l & 4l^2 & 0 & 13l & -3l^2 \\ \hline \frac{1}{2}N & 0 & 0 & N & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13l & 0 & 156 & -22l \\ 0 & -13l & -3l^2 & 0 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (10.4.6)$$

여기서  $N = \left(\frac{ml}{3}\right)\left(\frac{420}{ml}\right) = 140$ 이다.

이들  $6 \times 6$  요소행렬은 식  $\bar{k} = T^T k T$ 와  $\bar{m} = T^T m T$ 에 의하여 전체 좌표(문자 위에 줄표시 있는 것)로 변환되어진다.

$$\bar{k} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} (Rc^2 + 12s^2) & (R - 12)cs & -6ls & (-Rc^2 - 12s^2) & (-R + 12)cs & -6ls \\ (R - 12)cs & (Rs^2 + 12c^2) & 6lc & (-R + 12)cs & (-Rs^2 - 12c^2) & 6lc \\ -6ls & 6lc & 4l^2 & 6ls & -6lc & 2l^2 \\ \hline (-Rc^2 - 12s^2) & (-R + 12)cs & 6ls & (Rc^2 + 12s^2) & (R - 12)cs & 6ls \\ (-R + 12)cs & (-Rs^2 - 12c^2) & -6lc & (R - 12)cs & (Rs^2 + 12c^2) & -6lc \\ -6ls & 6lc & 2l^2 & 6ls & -6lc & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \theta \end{matrix} \quad (10.4.7)$$

$$\bar{m} = \frac{ml}{420} \begin{bmatrix} (Nc^2 + 156s^2) & (N - 156)cs & -22ls & (\frac{1}{2}Nc^2 + 54s^2) & (\frac{1}{2}N - 54)cs & 13ls \\ (N - 156)cs & (Ns^2 + 156c^2) & 22lc & (\frac{1}{2}N - 54)cs & (\frac{1}{2}Ns^2 + 54c^2) & -13lc \\ -22ls & 22lc & 4l^2 & -13ls & 13lc & -3l^2 \\ \hline (\frac{1}{2}Nc^2 + 54s^2) & (\frac{1}{2}N - 54)cs & -13ls & (Nc^2 + 156s^2) & (N - 156)cs & 22ls \\ (\frac{1}{2}N - 54)cs & (\frac{1}{2}Ns^2 + 54c^2) & 13lc & (N - 156)cs & (Ns^2 + 156c^2) & -22lc \\ 13ls & -13lc & -3l^2 & 22ls & -22lc & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (10.4.8)$$

### 10.5 보 요소를 포함하는 진동

보에 대한 유한 요소법의 예로서, 제6장과 제7장에서 풀이한 몇몇 문제들을 고려하자. 이 곳에서의 목적은 첫째로 두 개의 요소를 사용하여 어떻게 계의 식을 조합하는가를 보이는 것이고, 둘째로 회전좌표를 제거함으로써 수식의 자유도를 줄이는 것이다.

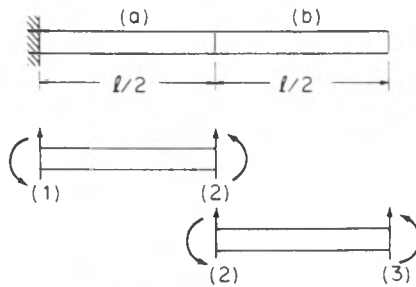
**예제 10.5.1**

그림 10.5.1에 보여준 보의 길이  $\frac{l}{2}$ 인 두 개의 동일한 요소로 간주되고, 그의 강성과 질량행렬은 식 (10.2.1)과 (10.2.10)으로 주어진다.  $l$  대신  $\frac{l}{2}$ 을 삽입함으로써, 요소행렬은 다음과 같다.

요소  $a$ :

$$\text{강성} \left( \frac{8EI}{l^3} \right) \begin{bmatrix} 12 & 3l & -12 & 3l \\ 3l & l^2 & -3l & 0.5l^2 \\ -12 & -3l & 12 & -3l \\ 3l & 0.5l^2 & -3l & l^2 \end{bmatrix} \quad \text{변위 벡터} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$\text{질량} \left( \frac{ml}{840} \right) \begin{bmatrix} 156 & 11l & 54 & -6.5l \\ 11l & l^2 & 6.5l & -0.75l^2 \\ 54 & 6.5l & 156 & -11l \\ -6.5l & -0.75l^2 & -11l & l^2 \end{bmatrix}$$



**그림 10.5.1** 균일 외팔보

요소  $b$ : 변위 벡터를 제외하고는 요소  $a$ 와 동일하다. 변위 벡터는 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

보의 축과 일치하는 전체 좌표를 가지고, 계행렬의 조합은 단순히 요소  $a$ 와  $b$ 에 대한 이전의 행렬을  $6 \times 6$  행렬로 중첩시키는 것이다. 그것은 강성행렬에 대해서는 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \text{요소 } a \\ \vdots \\ \text{요소 } b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

벽의 구속으로 인하여  $v_1 = \theta_1 = 0$ 이기 때문에, 처음의 두 열은 무시될 수 있다. 또한 진동문제에서는 힘과 모멘트  $F_1$ 과  $M_1$ 에 대해서도 모두 관심이 없다. 그러므로 처음 두 열뿐만 아니라 처음 두 행도 제외시킬 수 있어서 다음의 방정식으로 된다.

$$\frac{ml}{840} \begin{bmatrix} 312 & 0 & 54 & -6.5l \\ 0 & 2l^2 & 6.5l & -0.75l^2 \\ 54 & 6.5l & 156 & -11l \\ -6.5l & -0.75l^2 & -11l & l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{v}_2 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{v}_3 \\ \ddot{\theta}_3 \end{Bmatrix} + \left( \frac{8EI}{l^3} \right) \begin{bmatrix} 24 & 0 & -12 & 3l \\ 0 & 2l^2 & -3l & 0.5l^2 \\ -12 & -3l & 12 & -3l \\ 3l & 0.5l^2 & -3l & l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 \\ M_2 \\ F_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} \quad (10.5.1)$$

보의 자유진동에 대하여 풀면, 힘 벡터는 0으로 되고 가속도 벡터는  $-\omega^2$ 에 변위를 곱한 값으로 대치되어진다.

**컴퓨터 프로그램 beam.m** 프로그램은 외팔보에 대하여 유한 요소 모델에 대해 결정되어 지는 고유 진동수를 계산하는 MATLAB®으로 쓰여진 파일이다. 사용자에게 보의 길이, 원하는 요소의 수, 보의 질량, 보의 탄성계수 및 보의 관성 모멘트를 입력하라고 요구한 뒤, 프로그램에서 모델에 대한 질량 및 강성행렬을 구성하게 된다. 두 개의 동일한 요소로 이루어진 보에 대하여, 이들 행렬은 식 (10.5.1)과 같이 구해진다. 그러면 동행렬은 이들 두 행렬에서부터 만들어진다. 동행렬의 고유값은 계산되어지고 모델의 고유 진동수를 구하는 데 사용되어진다. 프로그램에 관한 더욱 자세한 정보는 부록 F에 나타나 있다.

**예제 10.5.2** 좌표 저장

앞의 문제의 해를 구하는 데는 고유값-고유 벡터 관련 컴퓨터 프로그램이 필요하다. 그러나 우리는 결합부 2와 3에서 균일 분포질량을 집중질량으로 대체함으로써 더욱 단순화된 문제로 만들 수 있다. 그러면 질량행렬은 요소  $m_{22}$ 와  $m_{33}$ 를 제외하고는 모두 0인 값으로 된다. 이것은 변위 벡터를 정돈된 순서로 하기 위하여 앞의 식을 정리하는 것을 의미한다.

$$\begin{Bmatrix} v_2 \\ v_3 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

이것은 단순히 제2열 및 제3열과 제2행 및 제3행을 서로 바꿈으로써 되어지고, 다음과 같은 식으로 되어진다:

$$\begin{bmatrix} m_2 & 0 & 0 \\ 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{v}_2 \\ \ddot{v}_3 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{Bmatrix} + \left( \frac{8EI}{l^3} \right) \begin{bmatrix} 24 & -12 & 0 & 3l \\ -12 & 12 & -3l & -3l \\ 0 & -3l & 2l^2 & 0.5l^2 \\ 3l & -3l & 0.5l^2 & l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ v_3 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

이제 식은 다음과 같은 형태가 된다.

$$\begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{V} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (10.5.2)$$

이는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} M_{11}\ddot{V} + K_{11}V + K_{12}\theta &= 0 \\ K_{21}V + K_{22}\theta &= 0 \end{aligned}$$

두 번째 식에서  $\theta$ 는  $V$ 로 나타내어질 수 있다:

$$\theta = -K_{22}^{-1}K_{21}V$$

첫 번째 식에 대입하면 다음으로 나타내어진다.

$$M_{11}\ddot{V} + (K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{21})V = 0 \quad (10.5.3)$$

원래의 항으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} m_2 & 0 \\ 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{v}_2 \\ \ddot{v}_3 \end{Bmatrix} + \left( \frac{8EI}{l^3} \right) \begin{bmatrix} 24 & -12 \\ -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 3l \\ -3l & -3l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2l^2 & 0.5l^2 \\ 0.5l^2 & l^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -3l \\ 3l & -3l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

다음 항은 저감 강성(reduced stiffness)이고,

$$K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{21} \quad (10.5.4)$$

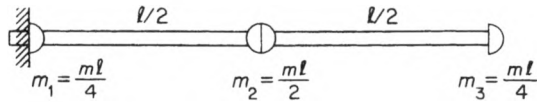
곱해졌을 때 그 값은 다음과 같다.

$$\frac{8EI}{7l^3} \begin{vmatrix} 96 & -30 \\ -30 & 12 \end{vmatrix} = \frac{48EI}{7l^3} \begin{vmatrix} 16 & -5 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$$

그러므로 원래의  $4 \times 4$ 식은  $2 \times 2$ 식으로 저감되어지고, 최종의 형태는 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} m_2 & 0 \\ 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{v}_2 \\ \ddot{v}_3 \end{Bmatrix} + \left( \frac{48EI}{7l^3} \right) \begin{bmatrix} 16 & -5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

수용가능한 이산질량 분포는 각 요소의 질량이 요소의 각 끝에 반씩 나누어지는 것이다. 그리하여, 만일 길이  $l$ 인 균일보의 전체 질량은  $ml$ 이고, 그림 10.5.2에 보인 것과 같이 각 요소의 질량은  $ml/2$ 이고,  $m_2 = 2(ml/4) = ml/2$  및  $m_3 = ml/4$ 이다



**그림 10.5.2** 균일 외팔보의 두 요소 이산질량 모델

운동 방정식과 해는 다음과 같다.

$$\left[ -\lambda \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 & -5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

여기서

$$\lambda = \frac{\omega^2 ml}{4} \cdot \frac{7l^3}{48EI} = \omega^2 \frac{7}{192} \left( \frac{ml^4}{EI} \right)$$

$$\lambda_1 = 0.3632 \quad \omega_1 = 3.516 \quad \text{엄밀값} = 3.516$$

$$\lambda_2 = 9.637 \quad \omega_2 = 22.033 \quad \text{엄밀값} = 22.034$$

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} 0.327 \\ 1.000 \end{Bmatrix} \quad \phi_2 = \begin{Bmatrix} -1.527 \\ 1.000 \end{Bmatrix}$$

**예제 10.5.3**

동일 요소로 이루어진 문형 구조(portal frame)의 자유 진동식을 구하라.

**풀이** 그림 10.5.3에 보인 것과 같이 결합부의 번호를 붙임으로써, 각 요소에 대한 강성과 질량은 식 (10.4.7)과 (10.4.8)로 나타내어진다. 결합부 0와 3은 변위가 0 값을 가지므로, 우리는 결합부 1과 2에 대한 항만을 쓴다.

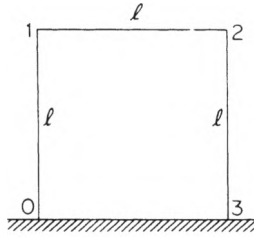


그림 10.5.3

요소 0-1,  $\alpha = 90^\circ$ ,  $c = 0$ ,  $s = 1$ :

$$\bar{k}_{0-1} = \frac{EI}{l^3} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} & & & -12 & 0 & -6l \\ & & & 0 & -R & 0 \\ & & & 6l & 0 & 2l^2 \\ \hline & & & 12 & 0 & 6l \\ & & & 0 & R & 0 \\ & & & 6l & 0 & 4l^2 \end{array} \right] \begin{matrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{\theta}_1 \end{matrix}$$

$$\bar{m}_{0-1} = \frac{ml}{420} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} & & & 54 & 0 & 13l \\ & & & 0 & \frac{1}{2}N & 0 \\ & & & -13l & 0 & -3l^2 \\ \hline & & & 156 & 0 & 22l \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 22l & 0 & 4l^2 \end{array} \right]$$

요소 1-2,  $\alpha = 0^\circ$ ,  $c = 1$ ,  $s = 0$ :

$$\bar{k}_{1-2} = \frac{EI}{l^3} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} R & 0 & 0 & -R & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6l & 0 & -12 & 6l \\ 0 & 6l & 4l^2 & 0 & -6l & 2l^2 \\ \hline -R & 0 & 0 & R & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6l & 0 & 12 & -6l \\ 0 & 6l & 2l^2 & 0 & -6l & 4l^2 \end{array} \right] \begin{matrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{\theta}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{\theta}_2 \end{matrix}$$

$$\bar{m}_{1-2} = \frac{ml}{420} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} N & 0 & 0 & \frac{1}{2}N & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22l & 0 & 54 & -13l \\ 0 & 22l & 4l^2 & 0 & 13l & -3l^2 \\ \hline \frac{1}{2}N & 0 & 0 & N & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13l & 0 & 156 & -22l \\ 0 & -13l & -3l^2 & 0 & -22l & 4l^2 \end{array} \right]$$

요소 2-3,  $\alpha = 270^\circ$ ,  $c = 0$ ,  $s = -1$ :

$$\bar{k}_{2-3} = \frac{EI}{l^3} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 12 & 0 & 6l & & & \\ 0 & R & 0 & & & \\ \hline 6l & 0 & 4l^2 & & & \\ -12 & 0 & -6l & & & \\ \hline 0 & -R & 0 & & & \\ 6l & 0 & 2l^2 & & & \end{array} \right] \begin{matrix} \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{\theta}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{v}_3 \\ \bar{\theta}_3 \end{matrix}$$

$$\bar{m}_{2-3} = \frac{ml}{420} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 156 & 0 & 22l & & & \\ 0 & N & 0 & & & \\ \hline 22l & 0 & 4l^2 & & & \\ & & 0 & & & \\ \hline & & & & & \end{array} \right]$$

이 행렬들을 조합하면 다음 식을 얻는다.

$$\frac{EI}{l^3} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} (12+R) & 0 & 6l & -R & 0 & 0 \\ 0 & (12+R) & 6l & 0 & -12 & 6l \\ \hline 6l & 6l & 8l^2 & 0 & -6l & 2l^2 \\ -R & 0 & 0 & (12+R) & 0 & 6l \\ \hline 0 & -12 & -6l & 0 & (12+R) & -6l \\ 0 & 6l & 2l^2 & 6l & -6l & 8l^2 \end{array} \right] \begin{matrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{\theta}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{\theta}_2 \end{matrix} \quad \text{(a)}$$

$$\frac{EI}{l^3} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} (12+R) & 0 & 6l & -R & 0 & 0 \\ 0 & (12+R) & 6l & 0 & -12 & 6l \\ \hline 6l & 6l & 8l^2 & 0 & -6l & 2l^2 \\ -R & 0 & 0 & (12+R) & 0 & 6l \\ \hline 0 & -12 & -6l & 0 & (12+R) & -6l \\ 0 & 6l & 2l^2 & 6l & -6l & 8l^2 \end{array} \right] \begin{matrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{\theta}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{\theta}_2 \end{matrix} \quad \text{(b)}$$

다음으로  $v_1 = v_2 = 0$ 임을 주목하면, 제2행과 제5행뿐만 아니라 제2열과 제5열 또한 삭제되어진다.  $N = 140$ 을 대입하여 자유진동에 대한 식을 세우면 다음과 같이 된다.

$$\frac{\omega^2 ml}{420} \left[ \begin{array}{cc|cc} 296 & 22l & 70 & 0 \\ \hline 22l & 8l^2 & 0 & -3l^2 \\ 70 & 0 & 296 & 22l \\ 0 & -3l^2 & 22l & 8l^2 \end{array} \right] \begin{matrix} \bar{u}_1 \\ \bar{\theta}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{\theta}_2 \end{matrix} \quad \text{(c)}$$

$$+ \frac{EI}{l^3} \left[ \begin{array}{cc|cc} (12+R) & 6l & -R & 0 \\ \hline 6l & 8l^2 & 0 & 2l^2 \\ -R & 0 & (12+R) & 6l \\ 0 & 2l^2 & 6l & 8l^2 \end{array} \right] \begin{matrix} \bar{u}_1 \\ \bar{\theta}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{\theta}_2 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

예제 10.5.4

그림 10.5.4는 문형 구조(portal frame)에 대한 자유진동의 최저차의 비대칭 및 최저차의 대칭 모드들을 보여준다. 주어진 모드에 대한 고유 진동수를 구하라.

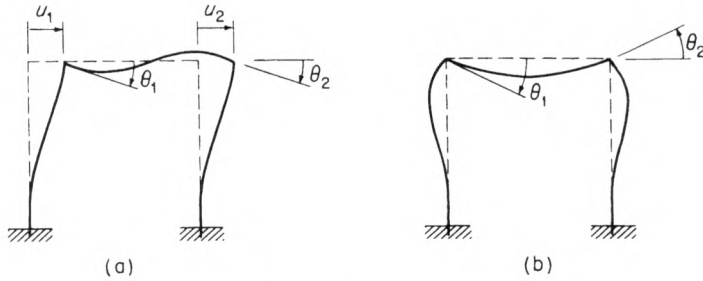


그림 10.5.4

**풀이** 비대칭 모드 지점 1과 2의 처짐 및 기울기는  $\bar{u}_1 = \bar{u}_2$  및  $\bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_2$ 로 동일하다. 이들 조건은 이전의 식에서 제3열을 제1열에 그리고 제4열을 제2열에 더함으로써 부과되어질 수 있다. 이는  $\begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{\theta}_1 \end{Bmatrix}$ 와  $\begin{Bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{\theta}_2 \end{Bmatrix}$ 에 대하여 동일한 식으로 된다.

$$\left[ -\frac{\omega^2 ml}{420} \begin{bmatrix} 366 & 22l \\ 22l & 5l^2 \end{bmatrix} + \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l \\ 6l & 10l^2 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{\theta}_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$\lambda = \omega^2 ml^4 / 420EI$ 로 묶으므로써, 이 식의 행렬식은<sup>3)</sup> 다음과 같다.

$$\begin{vmatrix} (12 - 366\lambda) & (6 - 22\lambda)l \\ (6 - 22\lambda)l & (10 - 5\lambda)l^2 \end{vmatrix} = 0$$

두 근을 구하면 다음과 같다.

$$\lambda_1 = 0.0245 \quad \omega_1 = 3.21 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}}$$

$$\lambda_2 = 2.543 \quad \omega_2 = 32.68 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}}$$

그림 10.5.4(a)에 보인 것과 같은 단순한 형상에 대응하는 최저차의 고유 진동수는 수용할 만한 정확도를 가진다. 그러나 2차 비대칭 모드는 더욱 복잡한 형상을 갖게 되고, 이 문제에서 사용한 몇 개의 지점으로 계산한  $\omega_2$ 는 정확하지 않을 것이다. 고차 모드를 적절히 나타내는 데는 더욱 여러 개의 지점이 필요할 것이다.

3) 행렬식이 곱해질 때  $l^2$ 는 제거되어진다. 그리하여  $\lambda_1$  및  $\lambda_2$ 의 값을 변화시키지 않고 주파수 방정식의 행렬에서  $l=1.0$ 을 둘 수 있다.

**대칭 모드** 대칭 모드에 대해서는  $u_1 = u_2 = 0$  및  $\theta_2 = -\theta_1$ 이다. 제1열과 제3열을 지우고, 제4열과 제2열을 제거하면,  $\theta_1$ 에 대한 오직 한 개의 식을 구하게 된다.

$$\left[ -\frac{\omega^2 ml}{420} (11l^2) + \frac{EI}{l^3} (6l^2) \right] \theta_1 = 0$$

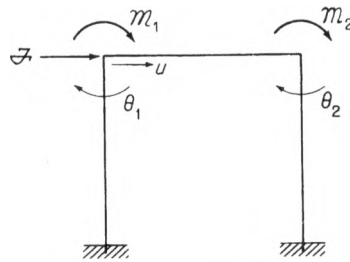
그러면  $\lambda$ 와  $\omega$ 는 다음과 같다.

$$\lambda = \frac{6}{11} \quad \omega = 15.14 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}}$$

**예제 10.5.5**

그림 10.5.5는 문형 구조(portal frame)에 외력이 작용하는 것을 나타낸다. 경계조건을 조사하고, 강성행렬을 주어진 좌표의 향으로 구하라.

**풀이** 요소의 신장이 없다는 조건  $\bar{u}_1 = \bar{u}_2$ 는 예제 10.5.3의 식 (c)에 제3열과 제1열을 더함으로써 만족되어진다. 이것은 신장의 향  $R$ 을 없앤다. 우리는 역시 제3행을 제1행에 더함으로써 강성행렬을  $3 \times 3$ 행렬로 다시 쓸 수 있다.



**그림 10.5.5**

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_{1x} + \bar{F}_{2x} \\ \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 24 & 6l & 6l \\ 6l & 8l^2 & 2l^2 \\ 6l & 2l^2 & 8l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{\theta}_1 \\ \bar{\theta}_2 \end{Bmatrix}$$

그림 10.5.5의 외력을 전체계의 외력과 비교하면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_{1x} + \bar{F}_{2x} \\ \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathcal{F} \\ -\mathcal{M}_1 \\ -\mathcal{M}_2 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{\theta}_1 \\ \bar{\theta}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u \\ -\theta_1 \\ -\theta_2 \end{Bmatrix}$$

$\bar{F}_{2x} = 0$  및  $\bar{F}_{1x} = \mathcal{F}$ 을 사용하면, 주어진 좌표와 주어진 하중의 항으로 나타낸 강성행렬은 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \mathcal{F} \\ M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 24 & -6l & -6l \\ -6l & 8l^2 & 2l^2 \\ -6l & 2l^2 & 8l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

### 10.6 구조물에서의 스프링 구속조건

제9장에서 스프링 구속조건들은 가상일에 의하여 일반화된 힘으로 취급되었다. 유한 요소법의 경우에도 동일한 개념이 적용된다. 스프링의 작용점은 결합지점으로 선택한다. 그러므로 전체 좌표에서 원래 구조에서의 하중은 스프링 힘으로 치환된다.

스프링 힘은 항상 변위에 대하여 반대 방향이기 때문에, 결합부에서의 힘과 모멘트는  $-kv_i$  또는  $-K\theta_i$ 로 줄어 들게 된다. 그러므로 방정식의 다른 변으로 이항되었을 때, 스프링 하중은 해당 강성항에 더해지게 된다.

#### 예제 10.6.1

그림 10.6.1(a)에 보인 선형인 회전 스프링을 갖고 균일보에 대한 강성행렬을 구하라.

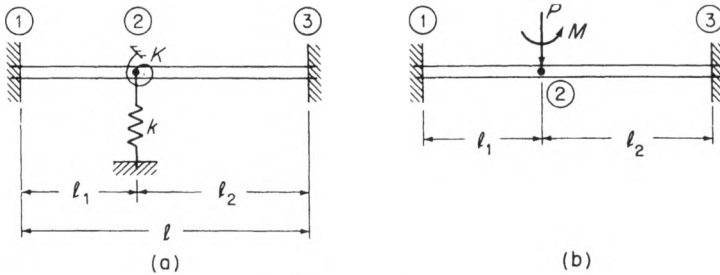


그림 10.6.1

**풀이** 우선 그림 10.6.1(b)에 있는 스프링이 없이 지점 2에 하중  $P$ 와  $M$ 이 작용하는 보의 강성 행렬을 세우자. 각 단면 1-2와 2-3에 대한 강성 행렬은 보요소 행렬식 (10.2.1)에서부터 세워질 수 있다.  $v_1 = \theta_1 = v_3 = \theta_3 = 0$ 임을 주목하면, 우리는 좌표  $v_2$  및  $\theta_2$ 와 관련된 행렬의 부분의 값을 정할 필요가 있고, 그것은 다음과 같이 된다.

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_2 \\ \bar{M}_2 \end{Bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 12\left(\frac{1}{l_1^3} + \frac{1}{l_2^3}\right) & -6\left(\frac{1}{l_1^2} - \frac{1}{l_2^2}\right) \\ -6\left(\frac{1}{l_1^2} - \frac{1}{l_2^2}\right) & 4\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{v}_2 \\ \bar{\theta}_2 \end{Bmatrix}$$

지점 2에 작용하는 스프링들에 있어서, 힘 벡터는 다음 식으로 대치된다.

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_2 \\ \bar{M}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -k\bar{v}_2 \\ K\bar{\theta}_2 \end{Bmatrix}$$

스프링 힘을 식의 우측으로 보내면 다음 식을 구할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_2 \\ \bar{M}_2 \end{Bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 12\left(\frac{1}{l_1^3} + \frac{1}{l_2^3}\right) + \frac{k}{EI} & -6\left(\frac{1}{l_1^2} - \frac{1}{l_2^2}\right) \\ -6\left(\frac{1}{l_1^2} - \frac{1}{l_2^2}\right) & 4\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right) + \frac{K}{EI} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{v}_2 \\ \bar{\theta}_2 \end{Bmatrix}$$

전체계에서 힘  $\bar{F}_2$ 는 윗방향으로 양의 값을 갖고,  $\bar{M}_2$ 는 반시계 방향으로 양의 값을 가지므로, 앞의 식은 다음과 같이 정리되어진다.

$$\begin{Bmatrix} -P \\ M \end{Bmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12\left(\frac{l^3}{l_1^3} + \frac{l^3}{l_2^3}\right) + \frac{kl^3}{EI} & -6l\left(\frac{l^2}{l_1^2} - \frac{l^2}{l_2^2}\right) \\ -6l\left(\frac{l^2}{l_1^2} - \frac{l^2}{l_2^2}\right) & 4l^2\left(\frac{l}{l_1} + \frac{l}{l_2}\right) + \frac{Kl^3}{EI} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{v}_2 \\ \bar{\theta}_2 \end{Bmatrix}$$

이는 스프링 구속조건을 갖는 보에 대한 강성행렬을 정의한다. 식으로부터 계는  $l_1 = l_2 = l/2$ 일 경우 비연성화가 되고, 그 경우 식은 다음과 같이 간단하게 된다.

$$\begin{Bmatrix} -P \\ M \end{Bmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 192 + \frac{kl^3}{EI} \\ 16l^2 + \frac{Kl^3}{EI} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{v}_2 \\ \bar{\theta}_2 \end{Bmatrix}$$

중심에서 처짐은 다음과 같다.

$$\bar{v}_2 = \frac{-(Pl^3/EI)}{192 + kl^3/EI} \quad \bar{\theta}_2 = \frac{Ml^3/EI}{16l^2 + Kl^3/EI}$$

### 예제 10.6.2

예제 10.6.1에서  $l_1 = l_2 = l/2$ 인 경우 구속된 보의 고유 진동수를 구하라.

**풀이** 이 값을 구하기 위하여 질량행렬이 필요하고, 식 (10.2.10)으로부터 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\left(\frac{m}{420}\right) \begin{bmatrix} 156(l_1 + l_2) & -22(l_1^2 - l_2^2) \\ -22(l_1^2 - l_2^2) & 4(l_1^3 + l_2^3) \end{bmatrix} = \left(\frac{ml}{420}\right) \begin{bmatrix} 156 & 0 \\ 0 & l^2 \end{bmatrix}$$

따라서 운동 방정식은 다음과 같다.

$$\left[ -\frac{\omega^2 ml}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 \\ 0 & l^2 \end{bmatrix} + \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} \left(192 + \frac{kl^3}{EI}\right) & 0 \\ 0 & \left(16l^2 + \frac{Kl^3}{EI}\right) \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} \bar{v}_2 \\ \bar{\theta}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

또다시 좌표  $\bar{v}_2$  및  $\bar{\theta}_2$ 가 비연성화된다.  $\lambda = \omega^2 ml^4 / 420EI$ 로 씌우므로써,  $\bar{v}_2$ 에 대한 식은 다음과 같이 된다.

$$\lambda = \frac{1}{156} \left( 192 + \frac{kl^3}{EI} \right) = 1.231 + 0.00641 \frac{kl^3}{EI}$$

그리고 이 모드에 대한 고유 진동수는 다음과 같다.

$$\omega_1 = 22.73 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}} \sqrt{1 + 0.00521 \left( \frac{kl^3}{EI} \right)}$$

마찬가지로,  $\bar{\theta}_2$ 에 대한 식은 다음과 같이 된다.

$$\lambda = 16 + \frac{Kl}{EI}$$

그리고

$$\omega_2 = 81.98 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}} \sqrt{1 + 0.0625 \left( \frac{kl}{EI} \right)}$$

그러므로 두 고유 진동수는 구속 스프링에 의하여 증가된다. 만일  $k = K = 0$ 이면, 고정단을 가진 보의 정확한 고유 진동수는 다음과 같다.

$$\omega_1 = 22.37 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}} \quad \omega_2 = 61.67 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}}$$

그리하여 유한 요소 접근에 있어서 1차 모드에 대한 오차는 1.61%이고, 2차 모드에 대한 오차는 33.9%이다. 보를 더욱 작은 요소로 나누면 이들 오차가 줄어들게 된다.

### 10.7 일반화된 힘과 분포하중

제7장에서 논의한 바와 같이 일반화된 힘은 작용력의 가상일에서부터 구할 수 있다. 변위가 다음과 같이 나타나 있을 때,

$$y(x) = \phi_1(x)v_1 + \phi_2(x)\theta_1 + \phi_3(x)v_2 + \phi_4(x)\theta_2 \quad (10.7.1)$$

작용하는 분포력  $p(x)$ 의 가상일은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_0^l p(x) \delta y(x) dx \\ &= \delta v_1 \int_0^l p(x) \phi_1(x) dx + \delta \theta_1 \int_0^l p(x) \phi_2(x) dx \\ &\quad + \delta v_2 \int_0^l p(x) \phi_3(x) dx + \delta \theta_2 \int_0^l p(x) \phi_4(x) dx \end{aligned} \quad (10.7.2)$$

식 (10.7.2)에서 적분표시된 것은 일반화된 힘이다.

만일 끝단의 힘  $F_1, M_1, F_2$  및  $M_2$ 에 동일 과정이 적용되면, 가상일은 다음과 같다.

$$\delta W = F_1 \delta v_1 + M_1 \delta \theta_1 + F_2 \delta v_2 + M_2 \delta \theta_2 \quad (10.7.3)$$

앞의 두 경우에서의 가상일을 계산하면, 우리는 다음의 관계식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} F_1 &= \int_0^l p(x) \phi_1(x) dx & F_2 &= \int_0^l p(x) \phi_3(x) dx \\ M_1 &= \int_0^l p(x) \phi_2(x) dx & M_2 &= \int_0^l p(x) \phi_4(x) dx \end{aligned} \quad (10.7.4)$$

그리하여 분포하중에 대한 등가 유한요소하중은 지금 구한 일반화된 힘이다.

#### 예제 10.7.1

그림 10.7.1에는 길이가  $l_1$ 이고, 보의 바깥 반쪽 위에 균일 하중  $p(x) = p_1 \text{ lb/in}$ 를 받고 있는 외팔보를 나타내고 있다. 본 절의 방법을 사용하여 끝단에서의 처짐과 기울기를 구하라.

**풀이** 우리는 ①-②인 단일 요소를 사용하고, 강성행렬의 역행렬을 결정하자.  $v_1 = \theta_2 = 0$ 이므로, 식 (10.2.1)에서부터 강성수식은 다음과 같다.

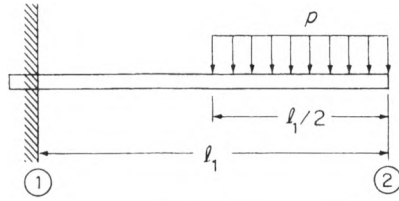


그림 10.7.1

$$\begin{Bmatrix} F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{l_1^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l_1 \\ -6l_1 & 4l_1^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

수반연산 방법을 사용하면, 그 역은 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \frac{l_1^3}{EI} \frac{1}{12l_1^2} \begin{bmatrix} 4l_1^2 & 6l_1 \\ 6l_1 & 12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

식 (10.7.4)로부터 상당유한 요소 작용력은 다음과 같다.

$$F_2 = \int_{l_2}^{l_1} -p\phi_3(x) dx = -p \int_{1/2}^1 \phi_3(\xi)l_1 d\xi = -pl_1 \int_{1/2}^1 (3\xi^2 - 2\xi^3) d\xi = -\frac{13}{32}pl_1$$

$$M_2 = \int_{1/2}^1 -p\phi_4(\xi)l_1 d\xi = -pl_1^2 \int_{1/2}^1 (-\xi^2 + \xi^3) d\xi = \frac{88}{1536}pl_1^2$$

이 값들은 역식에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} &= \frac{l_1}{12EI} \begin{bmatrix} 4l_1^2 & 6l_1 \\ 6l_1 & 12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{13}{32}pl_1 \\ \frac{88}{1536}pl_1^2 \end{Bmatrix} \\ &= \frac{pl_1^4}{12EI} \begin{Bmatrix} -\frac{52}{32} + \frac{528}{1536} \\ -\frac{78}{32l_1} + \frac{1056}{1536l_1} \end{Bmatrix} = \frac{-pl_1^4}{48EI} \begin{Bmatrix} 5.125 \\ \frac{7.000}{l_1} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

이들 결과는 면적 모멘트법으로부터 구한 결과와 일치한다.

### 10.8 변위에 비례하는 일반화된 힘

일반화된 힘이 변위에 비례할 때, 자유진동을 위하여 강성행렬과 결합하기 위해 운동 방정식의 좌측으로 옮겨질 수 있다. 본 절에서 제시되는 것은 다음의 두 경우이다.

- (1) 분포력이 보에 수직일 때
- (2) 분포력이 보에 수평일 때

경우 1 식 (10.7.2)의 가상일의 항  $p(x)$ 가  $f(x)y(x)$ 에 의하여 대치되면, 다음의 식으로 된다.

$$\delta W = \int_0^l f(x)y(x) \delta y(x) dx \quad (10.8.1)$$

이 때  $y(x) = \sum_i \phi_i q_i$ 이다. 여기서  $\phi_i$ 는 보함수이고, 또  $q_i$ 는 식 (10.7.1)에서처럼 요소 끝단 처짐이다.

$$\delta W = \sum_i \sum_j q_j \delta q_i \int_0^l f(x) \phi_i \phi_j dx \quad (10.8.2)$$

그리고 일반화된 힘은 다음과 같다.

$$Q_i = \frac{\delta W}{\delta q_i} = \sum_j q_j \int_0^l f(x) \phi_i \phi_j dx \quad (10.8.3)$$

이는 변위에 비례하는 것이다.

#### 예제 10.8.1

그림 10.8.1은 보의 바깥 반쪽의 아랫부분에 탄성지지를 받고 있는 외팔보를 나타낸다. 지지되는 강성은  $-ky$  lbs/in이고, 여기서  $f(x) = -k$ 로 일정하다. 이 때 운동 방정식은 다음과 같다.

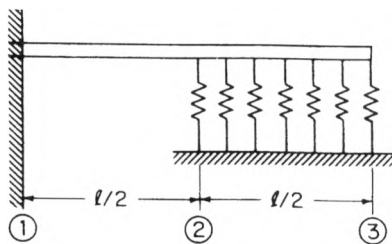


그림 10.8.1

$$\frac{ml}{840} [m_{ij}] \begin{Bmatrix} \ddot{v}_2 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{v}_3 \\ \ddot{\theta}_3 \end{Bmatrix} + \frac{8EI}{l^3} [k_{ij}] \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{Bmatrix}$$

길이  $l$ 인 요소에 대하여 식 (10.8.3)에 나타난 적분을 수행하면 다음의 식을 얻는다.

$$\{Q_i\} = -kl \begin{bmatrix} 0.3714 & 0.524l & 0.1286 & -0.03095l \\ & 0.009524l^2 & 0.03905l & -0.007143l^2 \\ & & 0.3714 & -0.05238l \\ & & & 0.009524l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

$l$ 대신에  $l/2$ 을 이 문제에 적용시키고 식의 좌측으로 옮기면, 보의 강성이 증가한다.

**경우 2** 보에 평행한 분포력  $p(x)dx$ 는  $p(x)dx \cdot \delta u(x)$ 의 가상일을 하고, 이 때  $u(x)$ 는 변형  $y(x)$ 에 의한 수평방향 변위이다. 변위  $u(x)$ 는 변형된 보의 수평 투영된 위치와  $x$  축과의 차이와 같다.

$$u(x) = \int_0^x (ds - dx) = \int_0^x \left[ dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} - dx \right] = \int_0^x \frac{1}{2} y'^2 dr$$

이 때  $r$ 은  $x$ 에 대한 가상변수이고  $y' = dy/dr$ 이다. 그러므로  $x$ 의 가상변위는 다음과 같다.

$$\delta u(x) = \int_0^x \frac{1}{2} \delta y'^2 dr$$

여기서 피적분함수는 다음과 같이 해석되어질 수 있다:

$$\frac{1}{2} \delta y'^2 = \frac{1}{2} [(y' + \delta y')^2 - y'^2] = y' \delta y'$$

그러므로 분포력에 대한 가상일은 다음과 같다.

$$\delta W = - \int_0^l p(x) \int_0^x y' \delta y' dr dx \tag{10.8.4}$$

$y'$ 에 대하여 보합수의 항으로 대입하면 다음과 같다.

$$\delta W = - \sum_i \sum_j q_j \delta q_i \int_0^l p(x) \int_0^x \phi'_i \phi'_j dr dx \tag{10.8.5}$$

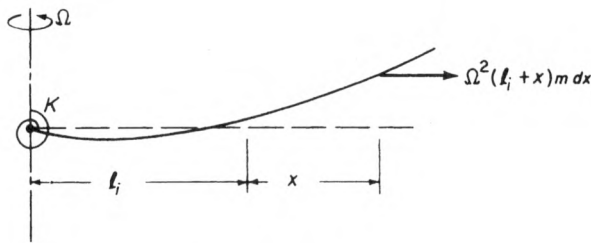
$$Q_i = \frac{\delta W}{\delta q_i} = - \sum_j q_j \int_0^l p(x) \int_0^x \phi'_i \phi'_j dr dx \tag{10.8.6}$$

**예제 10.8.2**

**회전 요소** 여기서 관심이 있는 예제는 그림 10.8.2에 나타난 각속도  $\Omega$ 로 회전하는 헬리콥터 날개이다. 첫 번째 보 요소에 대하여 하중은  $\Omega^2 x m dx$ 이고, 식 (10.8.6)은 변함없이 적용된다. 추가되는 요소에 대해서는, 보함수의 좌표와 확인하기 위하여  $x$ 좌표는 새로운 요소의 시작지점부터 측정되어져야 한다. 요소에 작용하는 하중은 단순히  $\Omega^2 (l_i + x)m dx$ 이고, 여기서  $l_i$ 는 회전축에서부터 새로운 요소의 시작지점까지의 거리를 나타낸다.

이 곳에 나타난 것은 하중  $\Omega^2 x m dx$ 일 경우의 일반화된 힘이고, 그것은 첫 번째 요소에 적용될 수 있다.

$$\{Q_i\} = -m\Omega^2 l \begin{bmatrix} 0.4286 & 0.01429l & -0.4286 & 0.06429l \\ & 0.05714l^2 & -0.01429l & -0.009524l^2 \\ & & 0.4286 & -0.06429l \\ & & & 0.02381l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$



**그림 10.8.2**

**예제 10.8.3**

한 개의 요소를 사용하여, 길이  $l$ 이고 회전속도  $\Omega$ 로 회전하는 헬리콥터의 운동 방정식을 구하라. 날개는 회전축에 단단히 고정되어 있다고 가정한다.

**풀이** 길이  $l$ 인 단일 요소에 대한 질량 및 강성항은 다음과 같다.

$$\frac{ml}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{v}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{v}_2 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} = \frac{ml}{420} M \ddot{V}$$

$$\frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{l^3} KV$$

회전에 의한 항은 식 (10.8.6)으로 주어진 일반화된 힘  $Q$ 로부터 찾을 수 있다. 그 평가를 위하여 포함되어진 적분식은 다음과 같다.

$$m\Omega^2 l \int_0^l \int_0^x \varphi'_i \varphi'_j dr \cdot dx = m\Omega^2 l \int_0^1 \xi \left[ \int_0^\xi \varphi'_i \varphi'_j l d\xi \right] l d\xi$$

여기서

$$\varphi'_1 = (-6\xi + 6\xi^2) \frac{1}{l}$$

$$\varphi'_2 = 1 - 4\xi + 3\xi^2$$

$$\varphi'_3 = (6\xi - 6\xi^2) \frac{1}{l}$$

$$\varphi'_4 = -2\xi + 3\xi^2$$

이들을 앞의 적분식에 삽입함으로써, 우리는 다음의 결과를 얻는다.

$$Q = -m\Omega^2 l \begin{bmatrix} 0.4286 & 0.01429l & -0.4286 & 0.6429l \\ 0.0142l & 0.05714l^2 & -0.01429l & -0.009524l^2 \\ -0.4286 & -0.01429l & 0.4286 & -0.06429l \\ 0.06429l & -0.009524l^2 & -0.06429l & 0.02381l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$= -m\Omega^2 lHV$$

이제 운동 방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\left[ -\frac{\omega^2 ml}{420} M + \frac{EI}{l^3} K \right] V = -m\Omega^2 lHV$$

$EI/l^3$ 의 우측항을 곱하고 나누어주고 그것을 좌측으로 옮김으로써, 우리는 다음 식을 얻게 된다.

$$-\frac{\omega^2 ml}{420} MV + \frac{EI}{l^3} \left[ K + \frac{m\Omega^2 l^4}{EI} H \right] V = 0$$

또는

$$M - \bar{\lambda} \left[ K + \frac{\Omega^2 ml^4}{EI} H \right] = 0$$

여기서

$$\bar{\lambda} = \frac{420EI}{\omega^2 ml^4}$$

경계조건이  $v_1 = \theta_1 = 0$ 일 때는 행렬의 우측하단 1/4 구역만 유지할 필요가 있다. 행렬 속의  $l_s$ 는 고유값과 고유 벡터를 풀이하는 경우 모두 무시한다는 것을 다시 기억함으로써, 우리는  $l = 1.0$ 으로 둘 수 있다. 그러면 최종적인 운동 방정식은 다음과 같다.

$$\left[ \begin{bmatrix} 156 & -22 \\ -22 & 4 \end{bmatrix} - \bar{\lambda} \left( \begin{bmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} + \left( \frac{\Omega^2 ml^4}{EI} \right) \begin{bmatrix} 0.4286 & -0.06429 \\ -0.06429 & -0.02381 \end{bmatrix} \right) \right] \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

이 식은 회전변수에 대한 수를 가정함으로써 고유값  $\bar{\lambda}$ 에 대하여 풀 수 있다. 만일  $\Omega^2 ml^4 / EI = 1.0$ 을 선택하면 다음과 같다.

$$\left( \begin{bmatrix} 156 & -22 \\ -22 & 4 \end{bmatrix} - \bar{\lambda} \begin{bmatrix} 12.43 & -6.064 \\ -6.064 & 4.024 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} (156 - 12.43\bar{\lambda}) & -(22 - 6.064\bar{\lambda}) \\ -(22 - 6.064\bar{\lambda}) & (4 - 4.024\bar{\lambda}) \end{vmatrix} = 0$$

행렬식으로부터 고유값과 고유 진동수는 다음과 같다.

$$\bar{\lambda}_1 = 30.65 \quad \omega_1 = 3.70 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}}$$

$$\bar{\lambda}_2 = 0.345 \quad \omega_2 = 34.89 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}}$$

그리고 관련되는 고유 벡터와 고유 모드는 다음과 같다.

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 0.545 \\ 0.749 \end{Bmatrix} \quad \phi_2 = \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 0.0807 \\ 0.615 \end{Bmatrix}$$

$\Omega^2 = 0$ 인 경우에 단일 요소 해석에 대한 고유 진동수는 다음과 같다.

$$\omega_1 = 3.53 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}}$$

$$\omega_2 = 34.81 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}}$$

비교를 위하여  $\Omega = 0$ 인 경우의 정확한 값을 구해 보자.

$$\omega_1 = 3.515 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}}$$

$$\omega_1 = 22.032 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}}$$

이로부터 단일 요소 해석은 2차 모드에 대해서는 받아들일 수 없는 정확도를 낳는 것을 알 수 있다. 단일 요소 해석에 대한 고유 벡터는 자유단에서의 처짐과 기울기를 나타내는데 보는 다른 처짐을 나타내는 더욱 일반적인 고유 벡터와 비교되어질 수 없다.

#### 예제 10.8.4 ▶ 두 요소로 이루어진 보

만일 우리가 두 개의 균일한 영역으로 보를 나눈다면,  $l$ 은  $l/2$ 로 대체되고, 두 번째 요소에 대한 회전력은 다음과 같이 변화되어야만 한다.

$$p_2(x) = \left(\frac{l}{2} + x\right) m\Omega^2 dx$$

이 때 일반화된 힘은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} Q &= m\Omega^2 l \int_0^{l/2} \left(\frac{l}{2} + x\right) \int_0^x \varphi'_i \varphi'_j dr dx \\ &= m\Omega^2 l \left\{ \int_0^{l/2} \frac{l}{2} \int_0^x \varphi'_i \varphi'_j dr dx + \int_0^{l/2} x \int_0^x \varphi'_i \varphi'_j dr dx \right\} \end{aligned}$$

이 표현에 나타난 최종 적분은  $l$ 을  $l/2$ 로 대체한 것을 제외하고는 단일 요소로 이루어진 보의 적분과 동일하다. 이제 첫 번째 적분에 대한 값을 구하자. 운동 방정식을 수립할 때, 행렬의 모든  $l$ 들을  $l/2$ 로 바꿀 필요가 있다.

이제 우리는 다른 접근방법으로 각 요소의 길이를  $l$ 로 같게 두는 방법을 제시하는데, 그러면 보의 전체 길이는  $2l$ 이 된다. 이 방법은 각 요소의 행렬은 단일 요소로 이루어진 보의 경우와 같게 두면 행렬내의 모든  $l$ 들은 그대로  $l$ 로 남아 있게 되어 계산시에 큰 절약이 되고, 이전과 마찬가지로 고유값 계산을 위하여  $l$ 로 둘 수 있게 된다. 즉, 그림 10.8.3에 보여주고 있는 문제를 풀게 된 것이다. 고유값이 결정된 다음, 우리는 고유값에 대한 표현에서  $l$ 을  $l/2$ 로 대체시키게 된다.

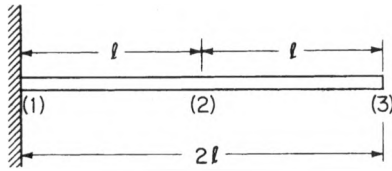


그림 10.8.3

구하려고 하는 새로운 적분은 다음과 같다.

$$m\Omega^2 l \int_0^l \int_0^x \phi_i' \phi_j' dr dx$$

그것은 적분을 수행하면 다음과 같게 된다.

$$\Pi = m\Omega^2 l \begin{bmatrix} 0.600 & 0 & -0.600 & 0.100l \\ & 0.100l^2 & 0 & -0.0166l^2 \\ & & 0.600 & -0.100l \\ & & & 0.0333l \end{bmatrix}$$

### 두 요소로 이루어진 보에 대한 행렬의 조립

두 요소로 이루어진 보에 대하여, 조립된 행렬은  $6 \times 6$ 이다. 그러나  $v_1 = \theta_1 = 0$ 이기 때문에, 처음의 두 열과 두 행은 삭제되고 우리는  $4 \times 4$ 행렬을 얻게 된다.

질량

$$\frac{ml}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22 & 54-13 & & & \\ 22 & 4 & 13-3 & & & \\ 54 & 13 & 156-22 & 54 & -13 & \\ -13 & -3 & 156 & 22 & & \\ & & -22 & 4 & 13 & -3 \\ & & 54 & 13 & 156 & -22 \\ & & -13 & -3 & -22 & 4 \end{bmatrix} \left. \begin{matrix} v_1 = 0 \\ \theta_1 = 0 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{matrix} \right\}$$

$$= \frac{ml}{420} \begin{bmatrix} 312 & 0 & 54 & -13 \\ 0 & 8 & 13 & -3 \\ 54 & 13 & 156 & -22 \\ -13 & -3 & -22 & 4 \end{bmatrix} \left. \begin{matrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{matrix} \right\}$$

강성

$$\frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 24 & 0 & -12 & 6 \\ 0 & 8 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

일반화된 힘  $Q$ 에서의 첫 번째 적분으로부터 다음 식을 얻게 된다.

$$-\Omega^2 ml \begin{bmatrix} 0.8572 & -0.0500 & -0.4286 & 0.06429 \\ -0.0500 & 0.0810 & -0.01429 & -0.009524 \\ -0.4286 & -0.01429 & 0.4286 & -0.06429 \\ 0.06429 & -0.009524 & -0.06429 & 0.02391 \end{bmatrix}$$

$Q$ 에서의 두 번째 적분으로부터 다음 식을 얻게 된다.

$$-\Omega^2 ml \begin{bmatrix} 1.200 & -0.100 & -0.600 & 0.100 \\ -0.100 & 0.133 & 0 & -0.0166 \\ -0.600 & 0 & 0.600 & -0.100 \\ 0.100 & -0.0166 & -0.100 & 0.0333 \end{bmatrix}$$

두 행렬을 합침으로써, 일반화된 힘은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \frac{EI(\Omega^2 ml^4)}{l \left( \frac{EI}{EI} \right)} \begin{bmatrix} 2.057 & -0.150 & -1.029 & 0.10643 \\ -0.150 & 0.2143 & -0.01429 & -0.0262 \\ -1.029 & -0.01429 & 1.0286 & -0.1643 \\ 0.1064 & -0.02612 & -0.1643 & 0.0571 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \\ & = -\frac{EI}{l^3} \left( \frac{\Omega^2 ml^4}{EI} \right) HV \end{aligned}$$

이제 회전변수  $\Omega^2 ml^4/EI$ 에 대한 수치값을 선택하고 앞의 식을 강성행렬과 결합할 필요가 있다. 이것은 회전변수들의 0, 1, 2 및 4일 때 고유값과 고유 벡터에 대한 컴퓨터 결과를 구하는 것으로 행해진다. 컴퓨터에 이식된 앞의 행렬들의 각 요소가 길이  $l$ 인 두 요소를 가진 보에 대한 결과이므로 고유값은 길이  $2l$ 인 보에 대한 것이다.

고유값 표현의 조사를 하게 되면 각 요소가 길이  $l/2$  인 길이  $l$ 의 보에 대해서는  $\omega_i$ 의 식에 길이  $l$ 이  $l/2$ 로 대체되어야만 한다는 것을 알 수 있다.

$$\lambda = \left( \frac{\omega^2 ml^4}{420 EI} \right) \quad \omega_i = \sqrt{\lambda_i \frac{420 EI}{m(l/2)^4}} = 4 \sqrt{\frac{420 \lambda_i EI}{ml^4}}$$

이러한 변화와 함께 길이  $l$ 인 두 요소로 이루어진 보의  $\lambda_i$ 와 고유 진동수에 대한 컴퓨터 결과는 표 10.8.1에 나타나 있다.  $\Omega = 0$ 인 경우가 참값과 비교되었고, 그로부터 처음 두 모드에 대하여 그 결과가 아주 우수함을 나타내주고 있다.

**표 10.8.1** 길이  $l$ 인 회전하는 두 요소로 이루어진 보의 컴퓨터 결과

$\frac{\Omega^2 ml^4}{EI}$	$i$	길이 $2l$ 인 보의 $\lambda_i$	$\omega_i/4\sqrt{\frac{420EI\lambda_i}{ml^2}}$	참값
0	1	0.001841	3.51	3.515
	2	0.07348	22.22	22.034
	3	0.84056	75.15	61.697
	4	7.08106	218.1	120.9
1	1	0.0035169	4.861	
	2	0.08445	23.82	
	3	0.86754	76.35	
	4	7.13759	219.0	
2	1	0.0049532	5.77	
	2	0.095627	25.35	
	3	0.8947349	77.54	
	4	7.19323	219.8	
4	1	0.0103809	8.35	
	2	0.158008	32.58	
	3	1.04317	83.72	
	4	7.83817	229.5	



Photo credit: Qiao qiming / AP News

**그림 10.8.4** 로빈슨 헬리콥터 모델 R22(날개 폭 7.2 in, 길이 151 in; 약 1 s의 주기를 가진 외팔보; 적재 시 총무게 1370 lb; 날개 선단속도 599 ft/s)

그림 10.8.4와 10.8.5에는 다음 크기의 두 가지 헬리콥터를 나타내었다. 그림 10.8.4에 보여 지고 있는 것은 로빈슨(Robinson) 헬리콥터 모델 R22 이며 주로 레저용 비행에 사용되는 작은 2좌석 기종이다. 사진에 함께 표시된 숫자는 그 규격과 크기를 나타낸다.

반면에, 그림 10.8.5에 나타난 상업용 헬리콥터는 해변과 오일 작업대 사이에 재료와 작업자를 운반하는 데 사용되는 최대 하중 6000 lbs를 수송할 수 있는 능력을 가진 큰 기종이다. 모든 헬리콥터에서처럼 로터의 회전날개는 매우 유연하다. 그 회전속도는 날개 끝의 속도가 음속보다 낮게 유지되는 요구조건에 의하여 제작된다.



Photo credit: idp duxford collection / Alamy

**그림 10.8.5** 오일 승강장용 상업 헬리콥터(날개 폭 24 in, 길이 24 ft, 무게 각각 200 lb; 외팔보의 강성은 선단에서 6 ft/100 lb임; 헬리콥터의 총무게는 빈 상태일 때 7000 lb이고 적재시 13,000 lb임)

### 참고문헌

- [1] COOK, R.D., *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, New York: John Wiley & Sons, 1974.
- [2] GALLAGHER, R.H., *Finite Element Analysis Fundamental*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1975.
- [3] K.C., EVANS, HR., GRIFFITH, D.W., AND NETHEROOT, D.A., *The Finite*

*Element Method*, New York: Halsted Press Book, John Wiley & Sons, 1975.

- [4] YANG, T.Y., *Finite Element Structural Analysis*, Englewood Cliffs, W: Prentice-Hall, 1986.
- [5] WEAVER, W., AND JOHNSTON, P.R., *Structural Dynamics by Finite Elements*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1987.
- [6] CLOUGH, R.W., AND PENZIEN, J. *Dynamics of Structures*, New York: McGraw-Hill, 1975.
- [7] CRAIG, R.R. JR., *Structural Dynamics*, John Wiley & Sons, 1981.

### 연습문제

- 10.1** 한 쪽 끝단은 고정되고 다른 쪽은 자유이며, 사이지점이 고정단에서부터  $l/3$ 인 지점에 있는 두 요소로 이루어진 균일봉에 대한 축방향 진동에서 두 고유 진동수를 구하라. 그 결과를 사이지점이 중간에 선택되어진 경우와 비교하라. 지점의 위치의 선정과 관련하여 당신은 어떠한 결론에 도달하는가?
- 10.2** 그림 P10.2와 같이 테이퍼진 봉이 두 개의 균일 단면으로 모델링되었으며, 여기서  $EA_1 = 2EA_2$  및  $m_1 = 2m_2$ 이다. 길이방향 진동의 두 개의 고유 진동수를 구하라.

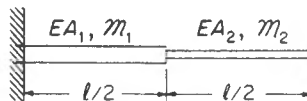


그림 P10.2

- 10.3** 각각 길이  $l$ 인 세 개의 축방향 요소를 사용하여, 길이  $l/3$ 인 균일봉의 자유-자유 진동에 대한 식을 수립하라.
- 10.4** 균일축의 비틀림에 있어서 선형적 변화를 가정한 후, 비틀림 문제에 대한 유한 요소강성 및 질량행렬을 구하라. 이 문제는 축진동 문제와 동일하다.
- 10.5** 두 개의 동일한 요소를 사용하여, 비틀림 진동에서 고정-자유축의 초기 두 개의 고유 진동수를 구하라.
- 10.6** 비틀림 진동에서 두 개의 균일 단면인 경우에 대하여, 2자유도 집중질량 비틀림 계와의 유한 요소 관련식을 서술하라.
- 10.7** 그림 P10.7은 큰 쪽은 고정단이고, 다른 쪽은 자유단인 일정 두께를 가진 원뿔

형의 관을 보여준다. 한 개의 요소를 사용하여 그의 길이방향 진동에 대한 식을 구하라.

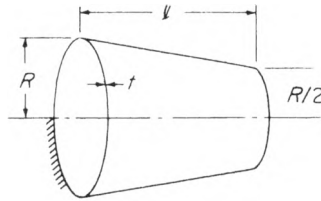


그림 P10.7

- 10.8 그림 P10.7의 관을 길이방향 진동에 있어서 동일 길이의 두 요소로 이루어진 문제로 간주하여 식을 구하라.
- 10.9 비틀림 진동에서 그림 P10.7의 관에 대하여 (a) 두 요소 (b)  $N$ -단계의 균일 요소를 사용하여 식을 구하라.
- 10.10 그림 P10.10의 단순 구조는 단순지지된 결합부를 가지고 있다. 그 강성행렬을 구하라.

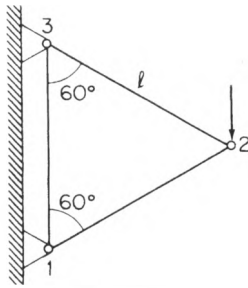


그림 P10.10

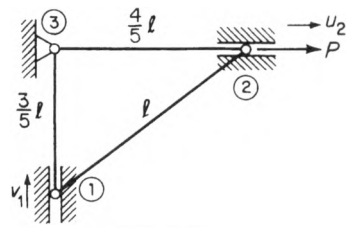


그림 P10.11

- 10.11 단순지지된 트러스 그림 P10.11에서 핀 ③은 고정되어 있다. ①의 핀은 수직통로로 자유로이 움직일 수 있고, ②의 핀은 수평통로로만 움직일 수 있다. 만일 그림에서와 같이 핀 ②에 힘  $P$ 가 작용한다면,  $u_2$ 와  $v_1$ 를  $P$ 의 향으로 구하라. 핀 ①, ② 및 ③에서의 모든 반력을 계산하고 평형조건이 만족되는지를 조사하라. 유한 요소법에 의하여 강성행렬을 인자  $EA/l$ 로 유도하라.
- 10.12 그림 P10.12에 보인 핀으로 연결된 사각 트러스에서, 전체 좌표로 요소강성과 질량 행렬을 결정하고, 전체 구조에 대하여 행렬들이 만들어지는 방법을 보여라. 동행렬을 구성하라. 이것을 이용하여 이 구조에 대한 자유진동의 고유 진동수를 구하라.

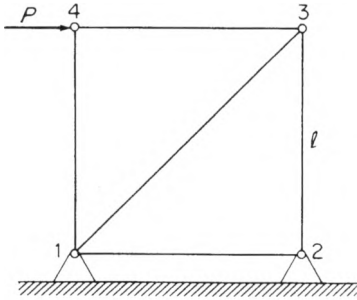


그림 P10.12

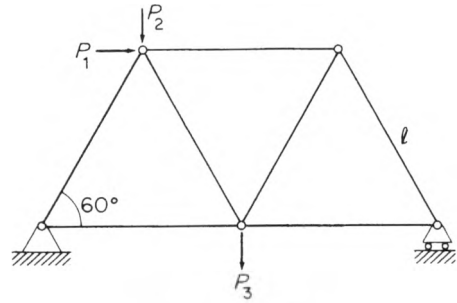


그림 P10.13

- 10.13 그림 P10.13의 단순지지된 트러스에서, 요소의 방향은 오직 세 개이다. 각 방향에 대한 강성행렬을 구하고, 전체계로 각각의 요소행렬들이 조립되는 방법을 써라.
- 10.14 두 개의 요소를 사용하여 양단이 고정되고 그림 P10.14와 같이 하중이 가해지는 균일보의 중간 지점에서의 처짐과 기울기를 구하라.

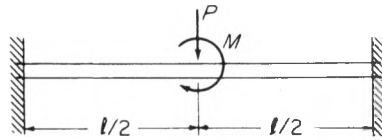


그림 P10.14

- 10.15 문제 10.14의 보에 대한 일관된 질량을 구하고 그 고유 진동수를 계산하라.
- 10.16 그림 P10.16의 보에 대한 자유진동 방정식을 구하라.

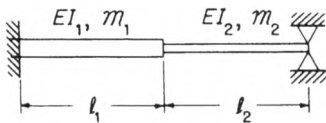


그림 P10.16

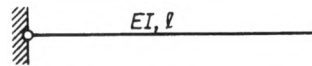


그림 P10.17

- 10.17 한 개의 요소를 사용하여 그림 P10.17의 단순지지-자유보에 대한 운동 방정식, 고유 진동수 및 모드 형상을 구하라. 참값과 비교하라.
- 10.18 문제 10.17을 두 개의 요소를 사용하여 반복하라.

- 10.19 문제 10.17을 여섯 개의 요소를 사용하여 반복하라. 참값과의 일치가 많은 수의 요소를 사용하면 향상되는가?
- 10.20 그림 P10.20의 프레임에 대한 강성행렬을 구하라. 우측상부 끝단은 회전은 제한되어 있지만 들어가고 나가는 것은 자유롭다.

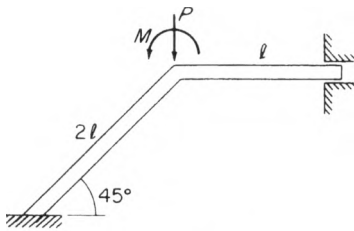


그림 P10.20

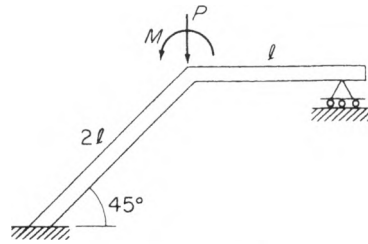


그림 P10.21

- 10.21 그림 P10.21의 프레임은 우측상부 끝단에서 회전과 이동이 자유롭다. 그 강성행렬을 구하라.
- 10.22 그림 P10.22의 프레임에 대한 하중 작용점에서의 변형과 기울기를 구하라. 이 때 코너 각은 불변이라 생각하라

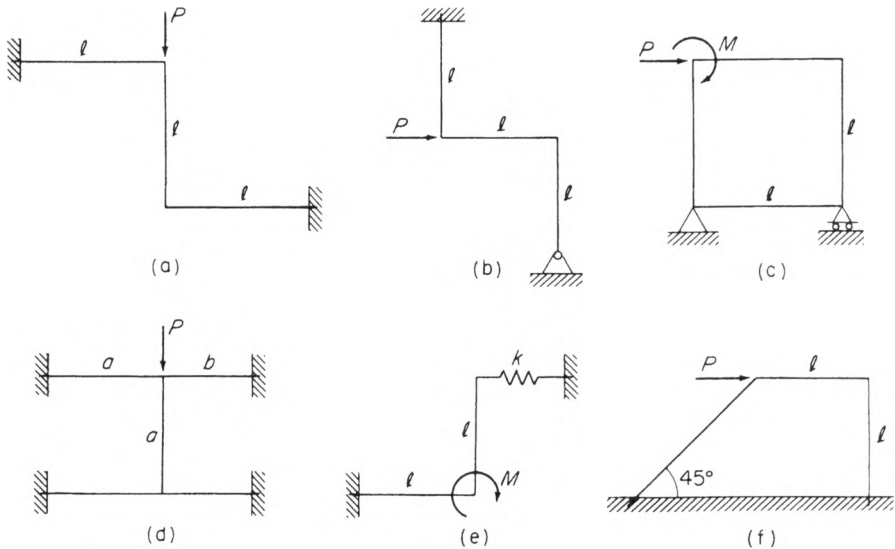


그림 P10.22

- 10.23 문제 10.17의 단순지지-자유보가 그림 P10.23에서와 같이 단순지지 지점에서 비틀림 강성  $Kl b \cdot \text{in/rad}$ 인 스프링에 의하여 제한되어진다. 자체의 정지된 무게에 의하여 보가 1/10회전하도록 수치적인  $K$ 값을 구하고, 문제 10.18에 있는 것

과 같이 계산하라(이 때 한 개 및 두 개 요소를 사용하고  $5mgl^3/EI = 1.0$ 으로 한다).

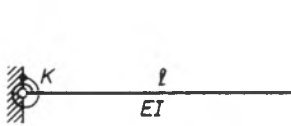


그림 P10.23

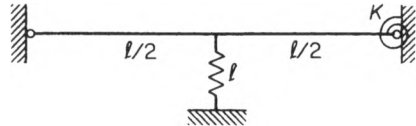


그림 P10.24

**10.24** 그림 P10.24에는 중간 지점에 선형 스프링  $k$ 를 가지고 우측 끝단에 비틀림 스프링  $K$ 를 가지는, 단순지지된 끝단을 가진 보가 나타나 있다. 두 요소 해석에 대한 강성행렬을 구하라.

**10.25** 문제 10.24의 보에서 질량행렬을 구하고, 다음 식과 같을 때 모든 고유 진동수 및 모드 형상을 구하라.

$$\frac{kl^3}{EI} = \frac{1}{2} \quad \text{그리고} \quad \frac{Kl^3}{EI} = \frac{1}{4}l^2$$

$k = K = 0$ 이라 둬므로써 문제 10.24의 해를 점검하라. 이 때 고유값은 단순지지-단순지지보의 고유값과 일치해야 한다.

**10.26** 그림 P10.26 의 보에 대하여 유한 요소 운동 방정식을 구하라.  $kl^3/8EI = 1.0$  및  $Kl^3/EI = 2l^2$ 일 때의 보의 고유값과 고유 벡터를 구하라.

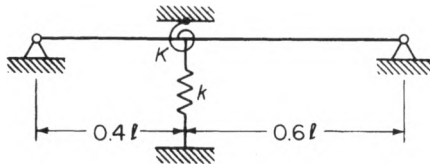
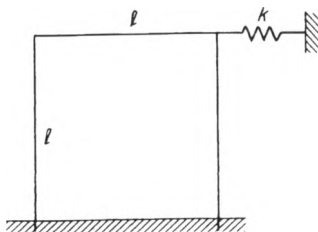
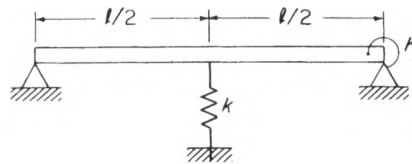


그림 P10.26

**10.27** 그림 P10.27의 프레임에 대한 자유진동 방정식을 구하라.



(a)



(b)

그림 P10.27

10.28 두 개의 요소를 사용하여, 그림 P10.28(a)에 보인 구간에 대하여 분포된 힘에 대한 등가 결합부 하중을 구하라. 그림 P10.28(b)의 구간에 대하여 중간 지점에서의 처짐과 기울기를 구하라.

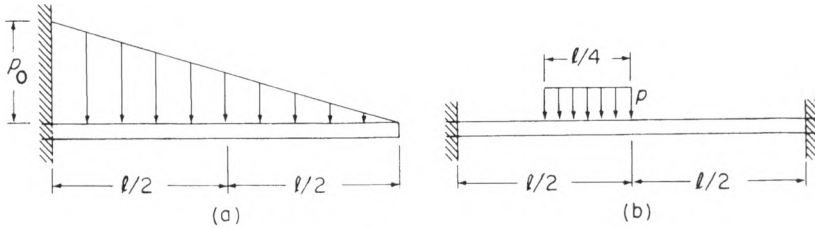


그림 P10.28

10.29 그림 P10.29의 계에서 주어진 여섯 개의 좌표의 향으로 두 요소 식을 쓰고 고유값과 고유 벡터를 구하라.

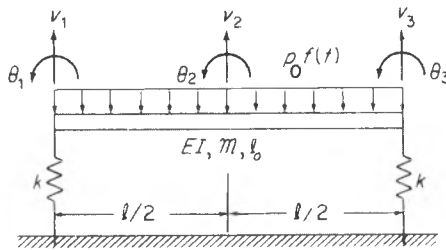


그림 P10.29

10.30 그림 P10.29의 계에서, 자유진동에 대한 대칭 모드는  $3 \times 3$  식으로 줄어들게 됨을 보여라. 이 문제에 대한 질량 및 강성행렬을 구하고 고유 진동수와 모드 형상을 계산하라.

10.31 예제 10.5.1에서  $4 \times 4$  보에 대한 고유값과 고유 벡터를 계산하라.

10.32 그림 P10.32의 균일보는 보의 우측 반쪽 면에서 단위길이당  $-ky(x)$ 의 구속력을 작용시키는 탄성지지 위에 지지되어 있다. 두 개의 요소를 사용하여 운동 방정식을 유도하라.  $kl^3/8EI = 10$ 으로 둬으로써 고유 진동수를 구하고, 이를 탄성지

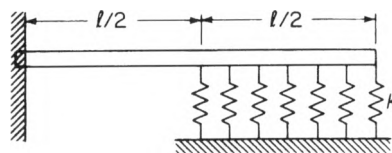


그림 P10.32

지가 없는 경우와 비교하라. 처음 두 개의 모드에 대한 모드 형상을 그려라.

- 10.33 좌측단이 고정지지 대신 단순지지되었다고 가정한 후 문제 10.32를 반복하라.
- 10.34 그림 P10.34는 수직축 0-0 주위로 각속도  $\Omega$  rad/s로 선회하는 원심 분리기의 "L"자형 보를 나타내고 있다. 표시된 지점들을 사용하여, 운동 방정식과 그의 고유 진동수를 구하라. 이를  $\Omega = 0$ 인 경우와 비교하라.

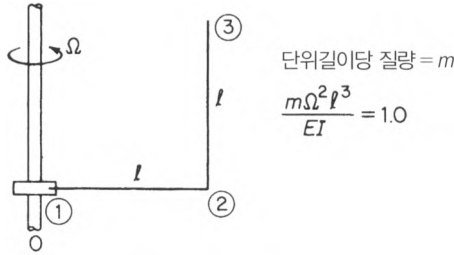


그림 P10.34

- 10.35 비틀림 스프링을 가진 단순지지-자유보가 그림 P10.35에 보인 것과 같이 수직축에 대하여 회전하고 있다면, 길이  $l/2$ 인 첫 번째 요소에 대하여 새로운 강성행렬을 구하라.

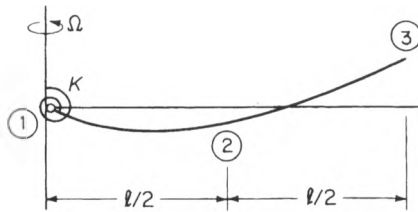


그림 P10.35

- 10.36 그림 P10.35의 헬리콥터 날개에 대하여, 날개의 바깥 반쪽에 대한 강성식을 구하라.
- 10.37 그림 P10.35의 두 요소로 이루어진 날개에 대한 완전식을 쓰고, 고유 진동수와 모드 형상을 구하라.
- 10.38 그림 P10.38과 같이 주어진 세 개의 요소로 모델링되는 균일 외팔보에서, 강성행렬은  $6 \times 6$ 차원이다. 강성행렬을 재정리하여,  $3 \times 3$  저감 강성행렬를  $K^*$ 를 구하고, 고유값과 고유 벡터를 계산하라. 그 결과를 문제 8.15의 것과 비교하라.

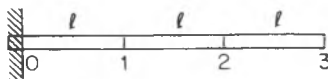


그림 P10.38

10.39 문제 10.38을 저감 강성 및 상당 저감 질량을 사용하여 반복하라. 가정한  $3 \times 3$

질량행렬  $M = ml \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & .5 \end{bmatrix}$ 와 비교하라.

10.40 문제 10.2를 다음 값:  $A_2 = 1, E = 1, l = 1$  및  $m_2 = 1$ 을 사용하여 반복하라. 각각의 두 요소를 균일봉으로 생각하라. 각각의 봉을 네 개의 요소로 모델링하라. 길이방향 진동에서 고유 진동수를 비교하라.

10.41 예제 10.5.1에 나타난 보의 자유진동을  $l = 12, m = 1, E = 1$  및  $I = 1$ 의 값을 사용하여 계산하라. 이 계산을 여섯 개의 균일 간격 요소를 사용하여 계산하라.

10.42 그림 P10.42와 같이 끝단에 질량을 가지고, 질량에 스프링 및 감쇠계가 부착된 2단계 단면적을 가진 막대를 생각하자. 길이방향 진동에 대한 운동 방정식을 구하라.

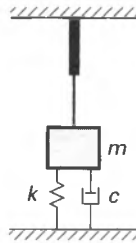


그림 P10.42

10.43 그림 P10.43에 보여진 계에 대한 운동 방정식을 구하라. 가운데 보의 굽힘 강성은 다른 두 보의 것과 다르다.  $y_1 = y_2 = y_3$ 인 해가 가능한가? 그러한 해가 존재할 조건은 무엇인가?

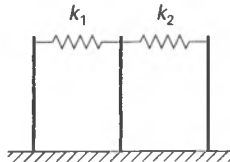


그림 P10.43