

19. 乱流の統計理論

19.1 乱流の定義と表現

a. 乱流の定義

乱流は次のような特徴をもっている。

(i) 不規則性(時間的・空間的), (ii) 偶然性, (iii) 三次元性, (iv) 大きな拡散能, (v) 高いエネルギー消散。

時間的・空間的不規則性は乱流に付随する重要な特徴であるが、これのみでは乱流とはいえない。たとえば海洋の波浪やスピーカーからの雑音は不規則であっても乱流ではない。また、普通われわれの対象とする乱流は、平均流速の分布は二次元的でもその中の乱れは三次元性をもち、乱流中の渦糸の三次元場におけるストレッチは乱流を保持する重要な機構である。(二次元場では渦糸のストレッチは起こらない。)乱流のもつ大きな拡散能は、第21章で述べる乱流のマクロな構造(組織構造, 大規模構造)と密接に結びついている。そして、乱流の高いエネルギー消散能は、乱れのエネルギー輸送の機構に関連している。

乱流を正確に定義することはむずかしいが、ここでは次のように規定する。“初期条件および境界条件が完全に既知であるにもかかわらず、微小な外乱が増幅される結果、境界内部の流体の運動が一義的に決定されずに確率的である流れを乱流という。このような乱れは、レイノルズ数の大きい、つまり粘性の作用に比較して(非線型)慣性項の影響の大きい流れに生じ、(i)~(v)の特徴をもっている”。

b. “渦” と “波”

乱流の取扱いでは、乱流を“渦”と表現したり、“波”といたりする。図19.1は開水路流の表面にアルミ箔をまいて水路に沿って敷いたレールの上を台車にのせたカメラを移動させて露出をやや長くして撮った写真である。カメラが静止していれば、上段の写真のように単にアルミ箔による流線が見えるにすぎない。し

かし、カメラを流れの中心部の流速と同じ速度で移動させて撮影すると、下段の写真のように流れの中心部の大きな渦運動がとらえられる。また、カメラの移動速度を側壁面近くのものより遅い流れの速度で移動させた場合には壁面近くに小さな渦がたくさん現われてくる（図 19.1 中段）。このように、乱流は種々のスケールの渦の集合であるとみなすことができる。それゆえ、乱流の大きさや特徴時間を“渦径”とか“渦の寿命時間”などと表現する。

§ 5.4, § 8.4 に述べたように粘性流体の壁近傍の層流をきれいに層状に配列した渦の層とみなすことができるが、この渦層がバラバラに配列をくずしたものが乱流境界層であると考え、このように渦の集まりとして乱流を表現しうるわけを理解することができるであろう。また、§ 18.2 や § 18.3 で述べた乱流の発生・遷移過程や第 21 章に述べる乱流の組織構造からも、乱流の本質を渦と呼ぶ意味が諒解されるであろう。

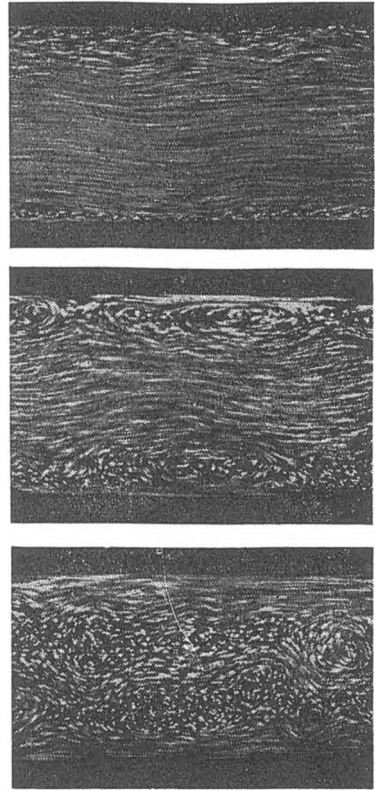


図 19.1 カメラを種々の速度で流れの方向に移動して撮った“渦” (Tietjens, Springer)

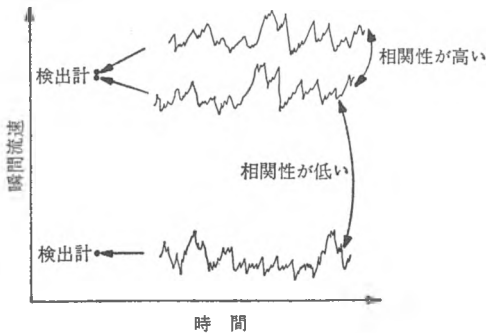


図 19.2 流速変動の相関

任意の周期関数はフーリエ級数——つまり多数の正弦波の重ね合わせにより表現しうる。フーリエ級数の理論を一般化すれば、§ 19.1.d に述べるように不規則関数を数学的に表現することができる。したがって、乱流を多数の波の重ね合わせと考えることができ、乱れの“波長”、

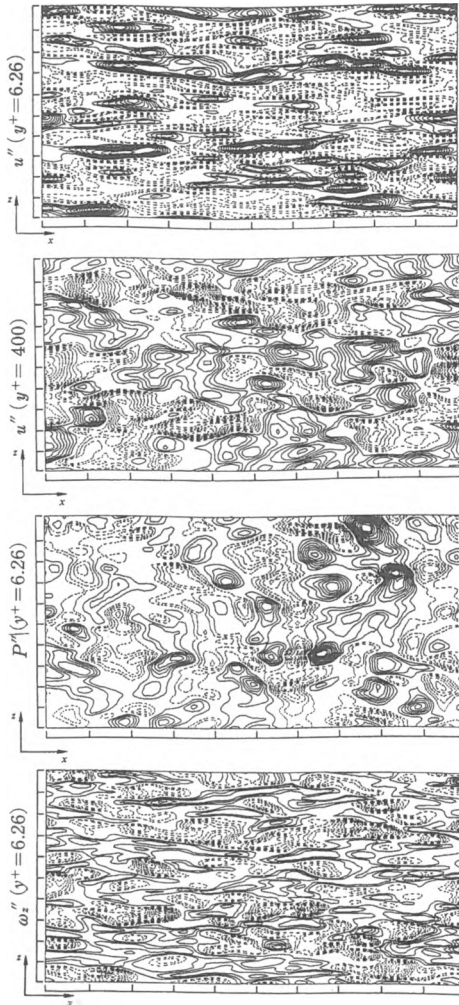


図 19.3 数値シミュレーション (LES 法) による乱れ場 (Moin and Kim, 1982)

“波数”，“周波数”などという表現が用いられる。

c. 相関係数

乱流場の一点で流速（その他の物理量）を測定すれば，それはある平均値のまわりに不規則な変動をしている（図 19.2）。また，ある瞬間の流れの場全体の流速を測定し，流速変動の等値線図を求めると空間的に不規則な分布をしている。このような瞬間の空間的流速分布を実験的に求めることは以前はむずかしかつたが，最近では流れの可視化画像の解析とか疎らな測定点でのデータからの流れ場の逆推定法あるいはコンピューターによる数値シミュレーションなどの方法でそれが可能となった。図 19.3 はコンピューターによる計算で求められた三次元乱流場，「流れの世界」図 35, 36 は逆推定法によって得られた三次元乱流場である。

ところで，このような不規則な場をどのように数学的に表現したらよいであろうか。乱れの場合におかれた二本の乱れの検出計の距離 r が近い

場合には，検出計からの信号は細かな変動では多少相違していても全体的にはよく似た形となる。検出計の間隔 r が大きくなるにつれて，二つの計器からの変動は互いにずれてくる。このような二点 (x と $x+r$) での乱れの信号の相似性を数学的に表すには場所的相関係数 $R(r)$ が用いられる。

$$R(r) = \frac{u'(x)u'(x+r)}{\sqrt{u'^2(x)}\sqrt{u'^2(x+r)}} \quad (19.1)$$

ここに、一はアンサンブル平均（同一条件下での多数の測定値の平均）を意味する。二点間の距離が0となれば二つの信号は全く一致するから $R(0)=1$ である。二点間の間隔が十分離れると二つの信号の間にはなんらの関係もなく $R(r)\rightarrow 0$ ($r\rightarrow\infty$) となる。また、

$$C(r) = \overline{u'(x)u'(x+r)} \quad (19.2)$$

を相関関数という。

式 (19.1) において検出計の座標 x のかわりに時間 t 、二点間の間隔 r のかわりに時間のずれ (lag time) τ をとれば、各点における自己相関係数 $R(\tau)$ となる。

d. スペクトル

さて、われわれは任意の周期関数がフーリエ級数により種々の周波数の周期関数 sine および cosine の和として表されることを知っている。区間 $(0, 1)$ の周期関数は

$$u'(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(2\pi n t) + b_n \sin(2\pi n t)\} \quad (19.3)$$

この場合には、成分である周期関数の位相はみな一致している。

あるいは、sine, cosine のかわりに exp を用いて複素関数表示をすれば次のようになる。

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(i2\pi n t) \quad (19.4)$$

上の考え方を一般化し、各成分波を任意の周波数 f_n とし、またその位相をでために θ_n だけずらして重ねると、不規則波を表現することができる。

$$u'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi f_n t + \theta_n) \quad (19.5)$$

ここに、 a_n, f_n, θ_n は n 番目の成分波の振幅・周波数および位相である。

図 19.4 は、位相・周期・振幅が少しずつずれた上段の 5 個の正弦波を重ね合わせると最下段の曲線のような不規則波が作れることを示したものである。いま成分波の周波数が連続的に変化するとすれば、 f_n のかわりに $f(=\omega/2\pi)$ を用い、また \sum を積分に変えて $u'(t)$ を

$$u'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (19.6)$$

と表すことができる。数学的には、いわゆるフーリエ積分である。ここに、 $F(\omega)$ は角周波数 $\omega(=2\pi f)$ の複素関数である。 $F(\omega)$ は式 (19.6) の逆フーリエ変換

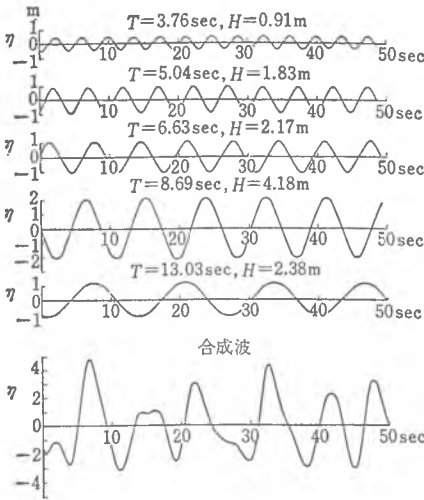


図 19.4 位相のずれた正弦波の重ね合わせによる不規則波の合成。ここに、 $T=1/f_n$ (合田；彰国社)

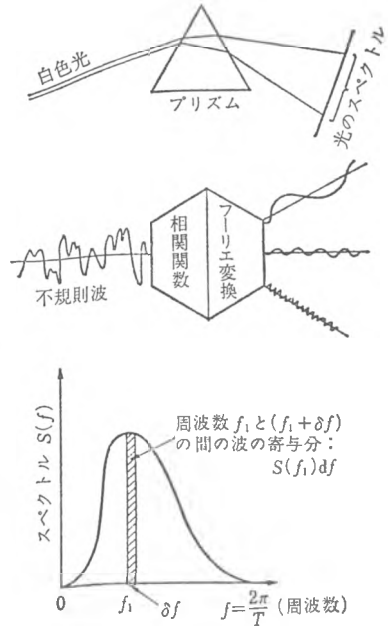


図 19.5 スペクトルの意味

から

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u'(t) e^{-i\omega t} dt \quad (19.7)$$

によって求まる。 $F(\omega)$ を極座標表示により

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{i\theta_\omega}$$

と書けば、 $u'(t)$ は

$$u'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)| e^{i(\omega t + \theta_\omega)} d\omega \quad (19.8)$$

となり、各成分波の位相角 θ_ω が周波数成分ごとに異なることがわかる。

以上のように関数のフーリエ級数表現の一般化により、任意の不規則関数は、さまざまな周波数の波 ($|F(\omega)| e^{i(\omega t + \theta_\omega)}$) の重ね合わせとして表現しうることが理解されたであろう。各周波数の波のもつ強さ (振幅) は $|F(\omega)|$ 、エネルギーは振幅の二乗 $|F(\omega)|^2$ に比例している。

さて、地上にふりそそぐ太陽光は種々の波長の電磁波から成り立っており、各波長の電磁波がほぼ均一に混じっている場合にはわれわれの肉眼には白色光として感じられる。この白色光をプリズムを通し、各波長の波ごとの屈折率の違いを

利用して分光すると、われわれの肉眼には各波長の電磁波特有の色の帯として感じられる。いわゆるスペクトルである。このように渾然とした種々の波長（あるいは周波数）の波の集合を各成分波ごとに分けると、波長ごとの成分波のもつエネルギーが明らかになる。

乱流場や不規則変動は、以上に述べたように種々の周波数（あるいは波長）の波の混合として表しうるから、これを各成分波ごとのエネルギー分布の関係としてとらえると現象を理解しやすい。光学におけるスペクトルの概念を拡張して、このような場合にも各成分波のエネルギー密度（振幅の二乗 $|F(\omega)|^2/T$ ）と周波数の関係をスペクトル $S(\omega)$ と呼ぶ。したがって、式 (19.7) より求まる周波数 ω の成分波の振幅の二乗として、スペクトル $S(\omega)$ は

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F(\omega)|^2}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{F(\omega) \cdot F^*(\omega)}{T} \quad (19.9)$$

と定義される。すべての成分波のエネルギーの和、すなわち ω の全領域についての $S(\omega)$ の積分は、定義により

$$\overline{(u'(t))^2} = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega \quad (19.10)$$

いま図 19.6 のように座標軸の方向に流れがあり、流れによって乱れの波が測定点を通過するものとする。もし、波面が流れに垂直で波の伝播（デンパ）の方向と流れの方向が一致しているならば、図 19.6(a) のように正しい波長が測定される。ところが、白い矢印で示す波面の方向と流れの方向が傾いておれば、同図の (b) のように実際より波長の長い波として観測される。

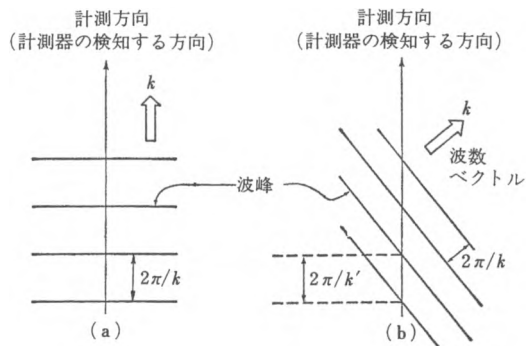


図 19.6 波の真の波長と見かけの波長

あらゆる方向に均一に進む等方性単一波長波の三次元スペクトルは図 19.7(a) のようにディラック (Dirac) のデルタ関数型のスペクトルである。この波を一方向に進む波として観測すると、真の波数 k より見かけ上小さな（波長の長い）波が測定され、そのスペクトルは図 19.7(b) のようになる。したがって、図

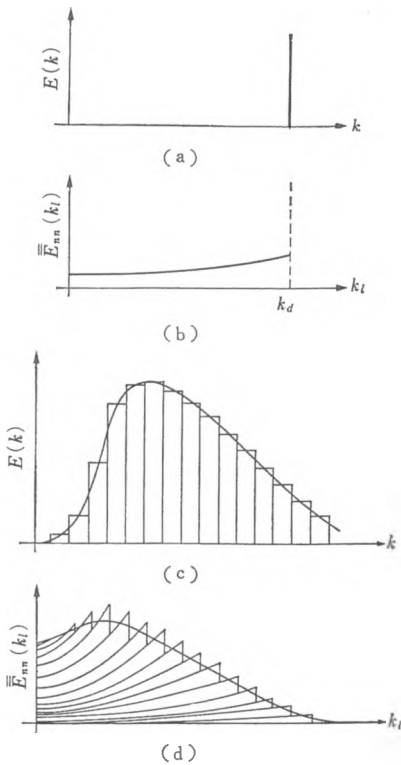


図 19.7 三次元スペクトルと一次元スペクトルの関係 (Corrsinによる)

19.7(c) に示すような三次元乱流場のスペクトルを、波数間隔ごとの狭いたんざく型のスペクトルに分割し、それぞれの区間を図 19.7(b) のように一次元スペクトルに変換して重ね合わせると、図 19.7(d) のような見かけ上の一次元スペクトルが得られる。われわれが普通の方法で測定するのはこのような見かけ上の一次元スペクトルである。

e. ウィナー-ヒンチンの定理

自己相関関数 $C(\tau) = \overline{u'(t)u'(t+\tau)}$ を式 (19.7) のフーリエ積分表示を用いて変形すれば、次のようなスペクトル $S(\omega)$ と自己相関の関係を導くことができる。

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \tag{19.11 a}$$

上式の逆変換として

$$C(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \tag{19.11 b}$$

を導くことができる。すなわち、自己相関関数とスペクトルは互いにフーリエ変換の関係にある。これらの関係をウィナー-ヒンチン (Wiener-Khintchine) の公式と呼ぶ。

スペクトルを周波数の正の領域においてのみ定義し、角周波数 ω のかわりに周波数 $f = \omega/2\pi$ を用いれば

$$E(f) = 4 \int_0^{\infty} C(\tau) \cos 2\pi f\tau d\tau \tag{19.12 a}$$

$$C(\tau) = \int_0^{\infty} E(f) \cos 2\pi f\tau df \tag{19.12 b}$$

式(19.11 b)において、 $\tau=0$ とおけば左辺は $C(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} (1/2T) \int_{-T}^T (u'(t))^2 dt = \overline{u'^2}$

となるから、先に示した

$$\overline{u'^2} = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega$$

の関係式が得られる。このウィナー-ヒンチンの公式はスペクトルや相関関数を求める実用的立場から重要であるのみならず、乱流場のスペクトル領域での表現と物理領域での相関関数としての表現とを結びつける関係として乱流現象の理解の上からも重要である。

実際に自己相関関数を求めこれを式 (19.11 a), (19.12 a) によりフーリエ変換して計算したスペクトルと、直接電氣的フィルターにより測定したスペクトルとを比較したのが図 19.8 で、両者はよく一致している。トゥーキー (Tukey) とクーリー (Cooley) により FFT (高速フーリエ変換) の方法が発

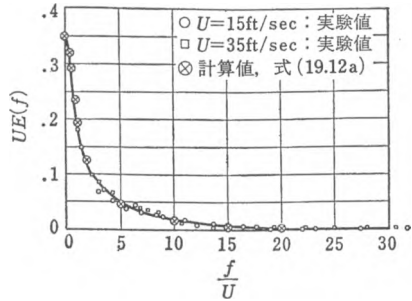


図 19.8

表されて以来、式 (19.7), (19.9) より直接的にスペクトルを計算することが多くなってきた。また、数の少ないデータから解像度の高いスペクトルを求める方法として、バーグ (Burg) による最大エントロピー法 (MEM: maximum entropy method) やアルゴリズムとしてはほぼ同一の赤池弘次の自己回帰モデルによる方法が提案され活用されている。最近ではまた、光学系による回折を利用してスペクトルを求める方法も用いられている。

19.2 等方性乱流

一見複雑に見える現象も原理的には単純な少数の法則で表されるという物理的ないしは力学的世界観からすると、複雑な乱流現象も単純化し理想化した状態の乱れの解明からその本質が見えてくるであろうと考えられる。このような立場から G.I. テイラー (1935~8) により提出されたのが等方均一性乱流の統計理論である。

実のところは、テイラーは彼自身 (1915) およびプラントル (1925) により独立に提案された気体の分子運動論 (kinetic theory of gases) からの類推である混合距離 (Mischungsweg) の考え方が、乱流の流速分布をよく説明するものの、

現象論的で実体がない点に疑問を懐き、これに代わるものとして統計的平均として二点間の流速変動の相関をとるという考えに達した (1921, 1935). この考えを押し進めて乱流統計理論を構築する際に、数学的展開を単純化するための理想化として、「等方均一性乱流」の概念が導入された (1935~8).

a. 相関係数テンソル

乱れの統計的平均量が、座標軸を回転させても反射させても変わらないとき、乱れは統計的に等方性 (isotropic) であるという. さらに、乱れの統計的平均値が空間的に均一 (homogeneous) に分布しているとき、乱れは等方均一であるという.

空間の二点 $P(x_1, y_1, z_1)$ と $Q(x_2, y_2, z_2)$ の速度の変動成分をそれぞれ (u_1, v_1, w_1) および (u_2, v_2, w_2) とするとき (本節では、煩雑さを避けるために u', v', w' を単に u, v, w と書く), これらの組合せによる二次の場所的相関係数は次のように 9 個の成分をもつテンソルで表される.

$$R = \begin{bmatrix} \overline{u_1 u_2} / \sqrt{\overline{u_1^2} \overline{u_2^2}} & \overline{u_1 v_2} / \sqrt{\overline{u_1^2} \overline{v_2^2}} & \overline{u_1 w_2} / \sqrt{\overline{u_1^2} \overline{w_2^2}} \\ \overline{v_1 u_2} / \sqrt{\overline{v_1^2} \overline{u_2^2}} & \overline{v_1 v_2} / \sqrt{\overline{v_1^2} \overline{v_2^2}} & \overline{v_1 w_2} / \sqrt{\overline{v_1^2} \overline{w_2^2}} \\ \overline{w_1 u_2} / \sqrt{\overline{w_1^2} \overline{u_2^2}} & \overline{w_1 v_2} / \sqrt{\overline{w_1^2} \overline{v_2^2}} & \overline{w_1 w_2} / \sqrt{\overline{w_1^2} \overline{w_2^2}} \end{bmatrix} \quad (19.13)$$

このような相関係数を成分とするテンソルを相関テンソル (correlation tensor) という.

乱れが等方均一性であれば、まず、 $\overline{u_1^2} = \overline{v_1^2} = \overline{w_1^2} = \overline{u_2^2} = \overline{v_2^2} = \overline{w_2^2} (= \overline{u^2})$ の関係より、相関テンソルの分母はすべて等しくなる. 次に、PQ 点が x 軸の方向に並んでいるものとすれば、式 (19.13) の対角要素以外の成分は 0 となる. なぜならば、たとえば、 $\overline{u_1 v_2}$ を考えると座標軸を x 軸のまわりに 180° 回転し、新しい座標軸を (X, Y, Z) , 流速成分を (U, V, W) と記せば、 $U_1 = u_1$, $V_2 = -v_2$ 等となる. したがって相関テンソルの成分は $\overline{U_1 V_2} = -\overline{u_1 v_2}$ となるが、これは等方性の性質により、もとの成分と同じにならなければならない. すなわち、 $\overline{u_1 v_2} = -\overline{u_1 v_2}$. したがって、 $\overline{u_1 v_2} = 0$ でなければならない. $\overline{u_1 w_2} = 0$ の関係は同様に証明される. また、 $\overline{v_1 w_2}$ は xz -面に対する鏡像を考えることにより 0 であることが示される. 対角成分のうち、 $\overline{v_1 v_2}$ と $\overline{w_1 w_2}$ とは等方性の仮定により相等しい ($\overline{v_1 v_2} = \overline{w_1 w_2}$). 乱れの均一性の仮定から、相関係数は二点間の距離 r と時間 t のみの関数でなければならない. そこで、相関係数テンソルの対角成分を

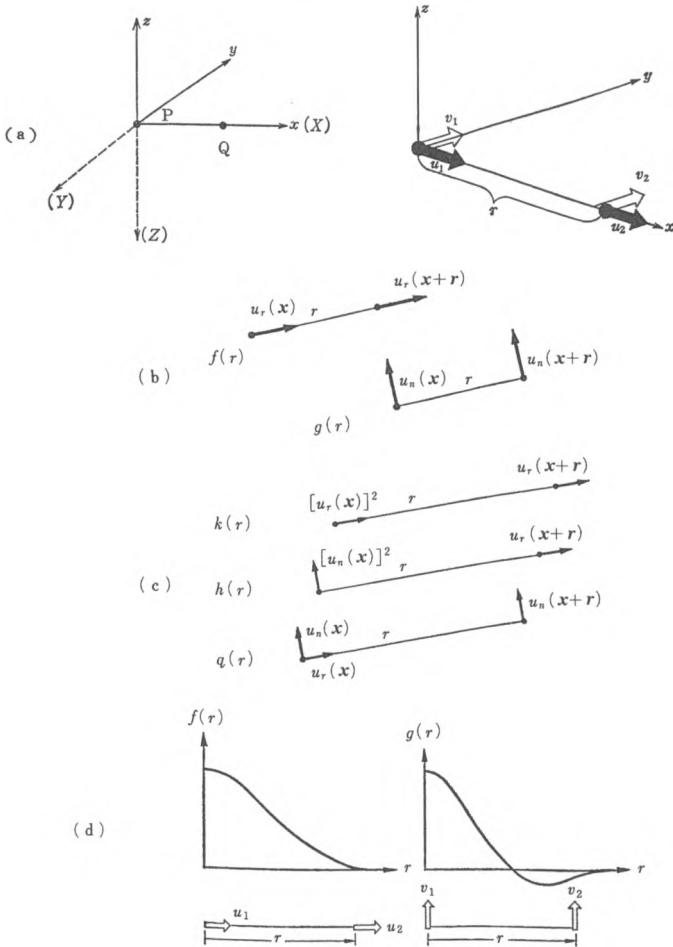


図 19.9 (a) 座標軸の回転, (b) 二重相関 $f(r), g(r)$, u_r : r 方向の速度成分, u_n : r に直交する方向の速度成分, (c) 三重相関 $k(r), h(r), q(r)$, (d) f, g の関数形

$$\left. \begin{aligned} \overline{u_1 u_2} &= \overline{u^2} f(r, t) \\ \overline{v_1 v_2} &= \overline{w_1 w_2} = \overline{u^2} g(r, t) \end{aligned} \right\} \quad (19.14)$$

と書くことができる。

二点 P, Q の方向が x 軸の方向と一致しない場合にも、相関係数テンソルは座標変換により二つの基本的な二次相関係数 f, g に関して

$$R = \frac{[f(r,t) - g(r,t)]}{r^2} \begin{bmatrix} xx & xy & xz \\ yx & yy & yz \\ zx & zy & zz \end{bmatrix} + g(r,t) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (19.15)$$

と表すことができる。ここに、 x, y, z は二点 P, Q を結ぶベクトルの成分 $(x, y, z) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ である。

Q点での連続の方程式、 $\partial u_2/\partial x_2 + \partial v_2/\partial y_2 + \partial w_2/\partial z_2 = 0$ の両辺に u_1 を掛け、 u_1 が x_2, y_2, z_2 と無関係であること、 $\partial/\partial x_2 = \partial/\partial x (x = x_2 - x_1)$ などの関係を考慮して変形し、時間的平均をとれば $\partial \overline{u_1 u_2}/\partial x + \partial \overline{u_1 v_2}/\partial y + \partial \overline{u_1 w_2}/\partial z = 0$ となる。これに、式 (19.15) の関係を代入すれば、 f と g の間に

$$g = f + \frac{r}{2} \frac{\partial f}{\partial r} \quad (19.16)$$

の関係をj得る。

図 19.10 は、風洞乱流の相関係数の実験結果で、直接測定による相関係数 g と上式の関係を用いて f より計算された g の値とが比較されている。

b. 最小渦径と平均渦径

乱れの機械的エネルギーは粘性の作用により熱エネルギーとして消散される。単位質量単位時間あたりの粘性によるエネルギー損失は次のように表される (式 (9.27))。

$$\begin{aligned} \epsilon = \nu \left\{ 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} \quad (19.17) \end{aligned}$$

これにより $\nu(\partial u/\partial x)^2$ をエネルギー消散を表す代表項とみなすことができる。したがって、小さな渦により速度の勾配が大きくなるほどエネルギー消散率は大きくなる。P点における速度の微分とQ点における速度の微分の積を作りその平均をとれば、 u_1, u_2 がそれぞれ x_1, x_2 の関数であることより、

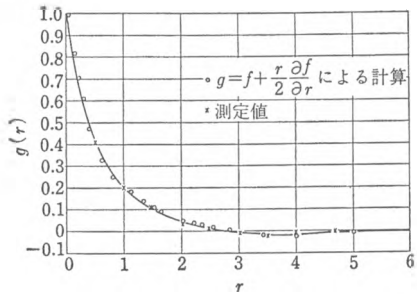


図 19.10 相関係数 f と g の関係式の検証

$$\frac{\overline{\partial u_1(x_1)} \cdot \overline{\partial u_2(x_2)}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \overline{u_1 u_2} \quad (19.18)$$

と変形される。上式の右辺の $\overline{u_1 u_2}$ に式 (19.15) を代入すれば $(\partial/\partial x_1 = -\partial/\partial x)$,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} (\overline{u_1 u_2}) = -\overline{u^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{f-g}{r^2} x^2 + g \right) \quad (19.19)$$

ここで $x_1 = x_2$ とすれば、式 (19.18) は次のようになる。

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 = -\overline{u^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = -\overline{u^2} f_0'' \quad (19.20)$$

同様に

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = -\overline{u^2} g_0'' \quad (19.21)$$

また、式 (19.16) より次式が得られる。

$$2f_0'' = g_0'' \quad (19.22)$$

f_0'' , g_0'' は長さの2乗分の1の次元をもつから、これらの $-1/2$ をそれぞれ $1/\lambda_x^2$, $1/\lambda_y^2$ とおいて、 λ_x , λ_y をエネルギー消散に関連する小さな渦径の代表値とみなし、テイラーの最小渦径 (microscale of eddies) と呼ぶ。 λ_x , λ_y は相関曲線 f , g の頂点 ($r=0$) でこれに接する放物線が横軸 r を切る点の座標に対応する。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\lambda_x^2} &= \frac{1}{2\overline{u^2}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = -\frac{1}{2} f_0'' \\ \frac{1}{\lambda_y^2} &= \frac{1}{2\overline{u^2}} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = -\frac{1}{2} g_0'' = -f_0'' \end{aligned} \right\} \quad (19.23)$$

スケールの大きな渦が存在するほど二点間の相関が大きくなる。したがって、乱流場を構成する種々のスケールの渦の平均径として

$$\left. \begin{aligned} L_x &= \int_0^\infty f(x) dx \\ L_y &= \int_0^\infty g(x) dx \end{aligned} \right\} \quad (19.24)$$

で平均渦径 (mean scale of eddies) が定義される。式 (19.16) の関係から L_x と L_y との間には次の関係がある。

$$L_x = 2L_y \quad (19.25)$$

c. 相関係数の伝播方程式——カルマン-ハワースの方程式

Q点におけるナビエ-ストークスの運動方程式に順次 u_1 , v_1 , w_1 を掛けて加え合わせ平均をとると、二次相関係数 $f(r, t)$ の変化を定める方程式が次のように得られる。これをカルマン-ハワース (Karman-Howarth) の方程式という。

$$\frac{\partial(\overline{u^2 f})}{\partial t} = 2\overline{u^2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \right) - 2(\overline{u^2})^{3/2} \left(\frac{\partial h}{\partial r} + \frac{4}{r} h \right) \quad (19.26)$$

ここに、 $h(r, t)$ は

$$h(r, t) = \frac{\overline{v_1^2 u_2}}{(\overline{u_1^2})^{3/2}} = \frac{\overline{w_1^2 u_2}}{(\overline{u_1^2})^{3/2}} \quad (19.27)$$

で定義される三重相関係数を意味する (図 19.9(c)). この相関項は運動方程式の非線型慣性項から出てきたものである. 後に述べるように乱流のエネルギー過程において非線型慣性項は重要な働きをなす. 式 (19.26) を解いて関数 f を求めるためには、 h に関する方程式を運動方程式より導くことが必要である. 上と同じような操作により三重相関 h に関する方程式を導くと、今度は新たに四重相関係数を含む方程式となり際限がない. このような連鎖をなんらかの合理的仮定で有限個で打ち切る問題を完結問題 (closure problem) という. このように、乱れの統計的性質を理論的に決定することは等方均一という最も単純化された場合においてすら破綻をきたしてしまふ. 理論的に乱流の構造を決定することは § 19.4 に述べるコルモゴロフの局所等方性の理論の発表をまたなければならなかった.

19.3 乱流におけるエネルギーの移行過程

円柱背後の後流域の渦の発生の状態からも推察されるように、平均流のエネルギーは流れの場と同程度のスケールの大きな渦によって乱れのエネルギーとなる. このスケールの大きな渦によりもち込まれた乱れのエネルギーは、ナビエ-

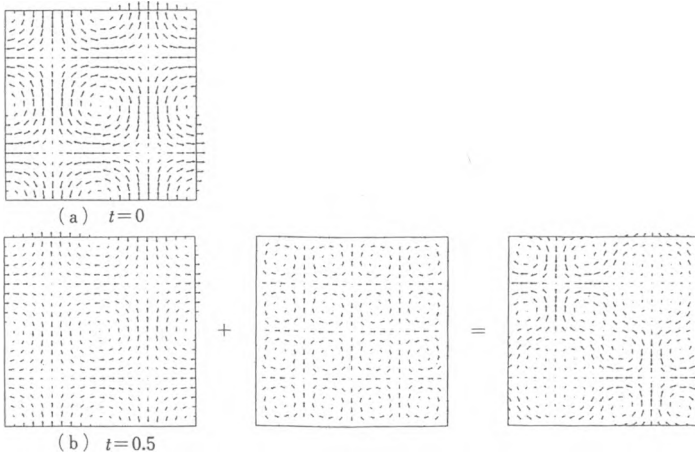


図 19.11 乱流場のエネルギー・カスケード

ストークス方程式の非線型慣性項の作用により、順次スケールの小さい（波数の大きい）乱れの成分に輸送される。たとえば、流速 u' の中に $a \sin kx$ という変動の波があるとする、

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x} = \frac{a^2}{2} k \sin 2kx \quad (19.28)$$

であるから、慣性項から最初の波の2倍の波数の波が作り出される。もっと厳密に取り扱うには、 $t=0$ において流速が次のように与えられている場合を考える。

$$\left. \begin{aligned} u' &= A \cos ax \sin by \sin cz \\ v' &= B \sin ax \cos by \sin cz \\ w' &= C \sin ax \sin by \cos cz \end{aligned} \right\} \quad (19.29)$$

ここに、連続の条件より $Aa+Bb+Cc=0$ である。上式の初期条件のもとにナビエ-ストークスの運動方程式と連続の方程式を解くと、微小時間 $t=\delta t$ 後の流速が次のように求まる。

$$\begin{aligned} u'(\delta t) &= A(1-\theta\nu\delta t)\cos ax \sin by \sin cz \\ &+ \frac{A_3}{a}\delta t \sin 2ax \cos 2by - \frac{A_2}{a}\delta t \sin 2ax \cos 2cz \end{aligned} \quad (19.30)$$

ここに $\theta=a^2+b^2+c^2$ 。すなわち、 δt 時間後には粘性のため最初の波が $\theta\nu$ の割合で減衰する一方、波数が2倍の波が新たに発生することになる。この大きな渦から小さな渦への乱れのエネルギー輸送過程はカスケード・ダウン(cascade-down)と呼ばれ、次節に述べるコルモゴロフの局所等方性理論の基礎を構成するものである。

カルマン-ハワースの相関関数の伝播方程式 (19.26) の両辺に $(2/\pi)\cos kr$ を掛けて r について 0 から ∞ まで積分してフーリエ変換を行うと、この関係を波数

空間で表現することができる。さらに、ある波数 k よりも大きい波数領域についてこの式を積分すれば、

$$\frac{\partial E_k}{\partial t} = T_k - D_k \quad (19.31)$$

の関係が導かれる。これは、波数が k よりも大きい領域（径の小さな渦）に含まれる単位質量あたりの乱れのエネルギー E_k の時間変化は、波数が k よりも小さい成分波領域

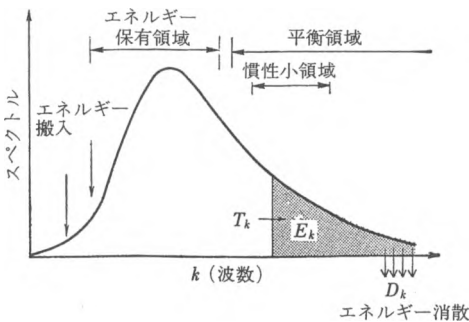


図 19.12 乱れのエネルギーの波数領域での搬入・輸送・消散

(大きい渦)より輸送されるエネルギー T_k と k より波数の大きい (径の小さな) 渦により消散されるエネルギー D_k との差であることを表している。

19.4 コルモゴロフの局所等方性の理論

式 (19.31) により, 乱流のエネルギー過程は明らかになった。しかし, この式は相関伝播方程式の波数空間での表現にすぎないから, 式 (19.31) は閉じていなくて直接解くことはできない。しかし, 近代流体力学の特徴は, 粘性流体の章でも述べたように流体運動の基礎方程式を数学的にやみくもに解くのではなく, 式の含有する物理的な情報を理解しその上に立って現象の理論的解明をすすめるところにある。乱流理論の場合にも, 前節までに述べてきた種々の考察の上に立った新しい理論が, 1941年ソ連のコルモゴロフ (Kolmogorov) により展開された。第二次世界大戦中のことでもあり, また, ロシア語で発表されたという言葉上の不利もあって, この新しい観点に立つ理論が世界に紹介されたのは1948年以後である。それと同じ頃, 量子力学の創始者の一人として著名なハイゼンベルク (1948) その他の人々により, おのおの独立に次々とスペクトルの関数形を決定する理論が提出された。

a. エネルギー・スペクトルに関するコルモゴロフの $-5/3$ 乗則

コルモゴロフの理論は等方均一性という制約を取り払って, レイノルズ数の大きい現実の乱流場一般 (壁乱流, 後流, 噴流, 混合層) に成立する普遍的な理論である。この理論の基礎になっているのは次のような乱流の物理的過程である。

(i) 大きな渦 (波数 k_0) の作用により平均流から (単位質量あたり ε の) 乱れの運動エネルギーが取り込まれる。この乱れのエネルギーは非線型慣性項による各波数間の相互作用により順次小さな渦のエネルギーへと移行する。

(ii) 慣性項の作用による各波数間のエネルギーのやりとりは, 注目している波数の近傍で大きく, 遠く隔った波数間の相互作用は無視しうる。

(iii) エネルギー保有領域の長さや速度のスケールは, それぞれ $(1/k_0)$ および $(\varepsilon/k_0)^{1/3}$ であり, レイノルズ数は $Re = k_0^{-1}(\varepsilon/k_0)^{1/3}/\nu = \varepsilon^{1/3}k_0^{-4/3}/\nu$ である。一方, 粘性による強いエネルギー消散は, $k_d = (\varepsilon/\nu^3)^{1/4}$ のオーダー以上の波数域で生じる。したがって, レイノルズ数 Re は $Re = (k_d/k_0)^{4/3}$ である。

(iv) レイノルズ数が十分大きいと, 波数 k_0 と乱れのエネルギーの吸込み領域の波数 k_d は十分離れる ($k_0 \ll k_d$)。その結果, 慣性項の作用が支配的となり, 慣

性項による高波数域へのエネルギー輸送の領域が広くなり、エネルギーの吸込み（粘性消散）はますます波数の大きい領域に押しやられる。

(V) レイノルズ数が十分大きければ、慣性項の支配的な領域が広くなり、また十分隔った各波数間の独立性の仮説により、 $k \gg k_0$ の波数領域の構造は乱れのエネルギーがどのような機構により発生したかには関係しない。このような波数領域では圧力項の作用により乱れのエネルギー分布は等方性をもつに到る。すなわち、“乱れのエネルギーをもち込む大きな渦（低波数）領域は非等方性であっても、それより十分小さな渦領域では乱れは等方性をもつようになる。”これを局所等方性の仮説 (hypothesis of local isotropy) という。

このような場合、乱れの平衡領域では慣性項の作用を通して、大きな渦領域から送り込まれる乱れのエネルギーの内部調整が行われている。それゆえ、この領域の乱れは外部からの影響を表すパラメーターにより記述される。それは、とりわけ高波数領域で粘性の作用により行われるエネルギーの消散率 ε

$$\varepsilon = 2\nu \int_0^{\infty} k^2 E(k, t) dk = -\frac{3}{2} \frac{d\overline{u^2}}{dt} \quad (19.32)$$

であり、これはとりも直さず低波数領域からのエネルギー輸送である。また、エネルギー消散は動粘性係数 ν に関係するゆえ、 ν も外的パラメーターと考えられる。

これらの考察から、次のような普遍的平衡領域の理論が立てられる。“平衡領域に関する運動は統計的には ε と ν により一義的に決定される”。より使いやすいパラメーターとして ε と ν から次のように長さ η と速度 v の基本量を作ることができる。この長さ η をコルモゴロフの最小渦径という。

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4}, \quad v = (\nu\varepsilon)^{1/4} \quad (19.33)$$

平衡領域すなわち局所等方性の領域では、次元的考察からエネルギー・スペクトルは次のように導かれる。

$$E(k, t) = v^2 \eta E_e(\eta k) \quad (19.34)$$

ここに、 E_e は無次元の普遍的関数である。

コルモゴロフ波数 $k_d = 1/\eta$ とエネルギー保有領域の波数 k_0 との比は $k_d/k_0 = Re^{3/4}$ であるからレイノルズ数 Re がきわめて大きいと、エネルギー保有領域の波数 k_0 と慣性項の支配領域の波数 k と粘性項の支配領域の波数 k_d が十分離れて、

$$k_0 \ll k \ll k_d \quad (19.35)$$

慣性項の支配的な領域では粘性の作用は無関係となる。このような中間領域を慣

性小領域 (inertial subrange) と呼ぶ。式 (19.34) において、右辺の形が η を含まないためには、 $E_e(\eta k) = (\eta k)^{-5/3}$ となる。すなわち、慣性小領域での乱れのエネルギー・スペクトルは、次のコルモゴロフの $-5/3$ 乗則にしたがう。

$$E(k, t) = \alpha \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (19.36)$$

$$(k_0 \ll k \ll k_d) \quad \text{あるいは} \quad (1/l \ll k \ll 1/\eta)$$

ここに、 k : radian/cm 単位; $\alpha=0.5$, 普遍定数。

この関係を相関関数の形に直すと次のようになる。ただし、ここにいう相関は式 (19.1) あるいは (19.13) に定義した相関ではなく、距離 r だけ離れた二点間の速度の差の二乗の平均として定義される構造関数 (structure function) $B_{dd}(r)$ である。エネルギー消散領域の渦のスケール η よりも大きく、エネルギーを取り込む領域の渦のスケール l より小さい r について

$$B_{dd}(r) = \overline{|u(\mathbf{x}+r, t) - u(\mathbf{x}, t)|^2} = \beta v^2 \left(\frac{r}{\eta}\right)^{2/3}$$

$$= \beta (\varepsilon r)^{2/3} \quad (l \gg r \gg \eta) \quad (19.37)$$

粘性項の支配的な領域 (粘性小領域; viscous subrange) については種々の理論が提出されている。ハイゼンベルクは次の関数形を導いた。

$$E(k, t) \propto k^{-7} \quad (k_d \ll k) \quad (19.38)$$

b. 慣性小領域におけるその他の物理量のスペクトル

コルモゴロフの局所等方性の理論の考え方は、単に乱れの速度成分についてのみならず、その他の多くの乱れの特性的に対しても適用しうる。特に、慣性小領域については次のようなスペクトルあるいは相関関数が求められている。

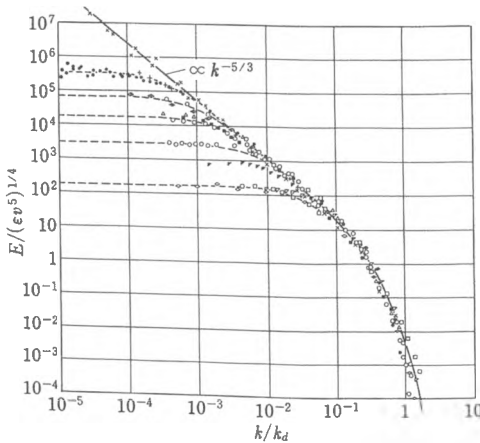


図 19.13 コルモゴロフの相似則。種々の流れのさまざまなレイノルズ数の乱流に対する規格化エネルギー・スペクトル

×潮流 (4×10^4), ●乱流境界層 (2×10^5), △格子乱流 (8×10^4), +円形噴流 (4×10^4), △乱流境界層 (4×10^4), ◇円柱後流 (2×10^4), ■乱流境界層 (2×10^4), □管内流 (7×10^3), ○一様剪断乱流 (4×10^3), ▼格子乱流 (10^3), ▽格子乱流 (4×10^2), ◇円柱後流 (10^2), □乱流境界層 (10^2) (D.R. Champan, 1979 より)。

$$\text{圧力変動: } E_P(k) \propto k^{-7/3} \quad (19.39)$$

$$\text{温度変動: } E_T(k) \begin{cases} \propto k^{-5/3} & (\text{慣性・(対流)小領域}) \\ \propto k^{-1} & (\text{粘性対流小領域}) \end{cases} \quad (19.40 \text{ a})$$

$$\text{濃度変動: } E_\theta(k) \begin{cases} \propto k^{-5/3} & (\text{慣性小領域}) \\ \propto k^{-1} & (\text{粘性・対流小領域, } k \ll (\gamma/D)^{1/2}) \end{cases} \quad (19.40 \text{ b})$$

ここに, D : 拡散係数, γ : ひずみ速度.

ラグランジュ速度相関およびラグランジュ・スペクトル:

$$R_L(\tau) = 1 - \frac{\tau}{\tau_*} \quad (19.41 \text{ a})$$

$$S_L(f) \propto f^{-2} \quad (19.41 \text{ b})$$

c. 二次元乱流の慣性小領域のエネルギー・スペクトル

通常の流れでは, たとえ平均流場が二次元であっても, 乱れは三次元性をもっている. 理論的に考えられる二次元乱流は数値シミュレーションによって実現されるほか, 大気や海洋のスケールの大きい流れも二次元乱流としての性格をもつ. というのは地球規模の大気の流れや海洋の流れは, 水平のスケールに比べて鉛直方向のスケールが極度に小さい (地球の半径が 6400km であるのに対して, 対流圏の高さは 10km であり, 平均の海洋深は 4km) からである.

二次元乱流を規定する外的パラメーターは, 粘性 ν とエンストロフィ (平均二乗渦度の 1/2, $Q = \frac{1}{2} |\omega|^2$) の消散率 $\eta = -dQ/dt$ であり, 高周波数領域でエネルギー・スペクトルの相似則

$$\left. \begin{aligned} E(k) &= \eta^{1/6} \nu^{3/2} F(k/k_d) \\ k_d &= \eta^{1/6} \nu^{-1/2} \end{aligned} \right\} \quad (19.42)$$

が成立する. レイノルズ数がきわめて大きい場合には, 粘性の関与しない慣性小領域のエネルギー・スペクトルとして “-3乗則”

$$E(k) = C\eta^{2/3} k^{-3} \quad (19.43)$$

が成立する.

二次元乱流では, 三次元乱流におけるエネルギーのカスケード・ダウンに対して, カスケード・アップ (乱れのエネルギーの低周波数方向への流れ) が起こる.