

# 15. 管路の乱流

## 15.1 滑らかな管路

### a. 管の流入部の流れと十分に発達した流れ

本節では、図に示すように大きな水槽から真直な一様断面の管路に流れ込む流れの流速分布と摩擦損失の問題を取り扱う。管の入口では流れは一様流速分布となっている。しかし、流下するにつれて粘性により管壁面から境界層が発達する。このため管路の実効断面積は徐々に減少し、断面内の流量保存の条件を満たすよう中心部の流速は加速される。管路入口からある距離  $l_E$  の所で周囲の壁面から発達した境界層は互いに交わり、それより下流では管路全体に粘性の作用の及んだ十分に発達した流れの状態が続く。この部分では流れは流下方向に一様である。壁面からの境界層が互いに交わるまでの距離（助走区間の長さ：entrance length） $l_E$  は、境界層が層流のまま発達を続けるならば  $l_E/d = 0.065 Re$  ( $d$ ：管の直径、 $Re = Ud/\nu$ ) である。遷移レイノルズ数を  $Re = 2000$  とすれば、最長助走区間は  $l_E = 130d$  である。しかし、多くの場合境界層厚  $\delta$  の増加につれてレイノルズ数  $Re_s = U\delta/\nu$  が限界値に達し、境界層は途中で層流状態から乱流境界層へと遷移する。乱流境界層内では流体の激しい混合運動のため、境界層の発達の仕方は早められ、 $l_E$  は  $l_E = 50 \sim 100d$  と短くなる。 $l_E$  の正確な値は、管路のどこで流れが乱流境界層に遷移するかに関係し、一般的な関係式は与えられない。

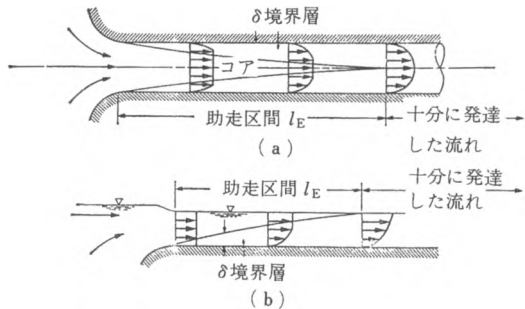


図 15.1 (Daily-Harleman, Addison-Wesley)

た流れの状態が続く。この部分では流れは流下方向に一様である。壁面からの境界層が互いに交わるまでの距離（助走区間の長さ：entrance length） $l_E$  は、境界層が層流のまま発達を続けるならば  $l_E/d = 0.065 Re$  ( $d$ ：管の直径、 $Re = Ud/\nu$ ) である。遷移レイノルズ数を  $Re = 2000$  とすれば、最長助走区間は  $l_E = 130d$  である。しかし、多くの場合境界層厚  $\delta$  の増加につれてレイノルズ数  $Re_s = U\delta/\nu$  が限界値に達し、境界層は途中で層流状態から乱流境界層へと遷移する。乱流境界層内では流体の激しい混合運動のため、境界層の発達の仕方は早められ、 $l_E$  は  $l_E = 50 \sim 100d$  と短くなる。 $l_E$  の正確な値は、管路のどこで流れが乱流境界層に遷移するかに関係し、一般的な関係式は与えられない。

## b. “壁法則”と“速度欠損則”

壁面近くの流れは、そこで重要な役割をする物理量——密度  $\rho$ 、動粘性係数  $\nu$ 、壁面摩擦応力  $\tau_0$ 、壁からの距離  $y$ ——により支配され、管全体にかかわる量—— $Re = Ud/\nu$ ——には無関係であると推論される。前者のうち  $\tau_0$  と  $\rho$  から作られる

$$U_\tau = \sqrt{\tau_0/\rho} \quad (15.1)^{\dagger}$$

は速度の次元をもち、速度の代表スケールとみなしうる。これを摩擦速度 (friction velocity) という。したがって、これら支配量から作られる無次元長さを

$$\eta = \frac{U_\tau y}{\nu} \quad (15.2)$$

で定義すれば、壁面近くの流速分布はレイノルズ数に無関係に

$$\frac{\bar{u}(y)}{U_\tau} = f_n \left( \frac{U_\tau y}{\nu} \right) \quad (15.3)$$

の形に書きうる。これをプラントルの“壁法則” (law of wall) という。

これに反して、管の中央部での流れは、管壁での摩擦応力の発生機構など局所的なものとは無関係であり、流れの場の全体的な量—— $d=2a$ ,  $U_{max}$ ,  $-d\bar{p}/dx$  あるいは  $\tau_0$ ,  $\rho$ ——によって決まる。したがって、これらより次の無次元的な流速分布関係

$$\frac{U_{max} - \bar{u}(y)}{U_\tau} = g_n \left( \frac{y}{a} \right) \quad (15.4)$$

が成立しなければならぬ (図 14.7)。これはカルマンの“速度欠損則” (velocity defect law) と呼ばれている。

## c. 流速分布

(1) 混合距離理論による流速分布 さて、十分に発達した管路の乱流を考える。こうした流れは、流れの方向 ( $x$  方向) には平均的に見て一様で、いわば第8章の平行流に対応する状態である。

問題を二次元化するために、円形断面のパイプあるいは十分幅広い矩形断面の管路や開水路を考える。また、管壁は十分滑らかであるとする。平均流速  $u(y)$ <sup>††</sup> に関する流体の運動方程式 (14.5) の左辺の項はすべて 0 に等しく、二次元管路

<sup>†</sup> 従来から、摩擦速度を表す記号に  $U_*$  が用いられている。最近これにかわって  $U_\tau$  を使用する場合が増えている。これは、添字記号 \* が一般的に無次元化された変数を表すために用いられるので、この使用法と混合しないため、また摩擦速度が剪断応力  $\tau$  より定義される速度の次元をもつ量であることをはっきり示すためである。

<sup>††</sup> 以下特に混乱が生じないかぎり  $\bar{u}$  を  $u(y)$  あるいは単に  $u$  と書く。

の場合には次のようになる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) \quad (15.5)$$

したがって、 $-(\partial p/\partial x) + (\partial \tau/\partial y) = 0$  の関係を積分して次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \tau &= (a-y) \left( -\frac{dp}{dx} \right) && \text{(二次元管路—平行壁間の流れ)} \\ \tau &= \frac{(a-y)}{2} \left( -\frac{dp}{dx} \right) && \text{(円管路)} \end{aligned} \right\} \quad (15.6)$$

ここに、 $a$ は管の半径、または二次元開水路の水深、平行な壁の間隔の半分を表し、 $y$ は壁面より垂直にとるものとする。剪断応力 $\tau$ は分子粘性による応力とレイノルズ応力との和である。しかし、分子粘性の作用を考慮しなければならないのは壁面のごく近くだけで、そこを離れると乱流運動が卓越して、剪断応力はほとんどレイノルズ応力によるものと考えられる。

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} - \rho \overline{u'v'} \quad (15.7a)$$

$$\approx -\rho \overline{u'v'} \quad (15.7b)$$

ところで、プラントルの混合距離理論 (14.8) によれば、これは

$$\tau = \rho l^2 \left| \frac{du}{dy} \right| \left| \frac{du}{dy} \right| \quad (15.8)$$

と書ける。すでに第14章で述べたように、混合距離 $l$ に関してプラントルとカルマンはそれぞれ次のように仮定した。

$$\text{a) } l = \kappa y \quad (\text{プラントル}) \quad (15.9)$$

$$\text{b) } l = \kappa \frac{du/dy}{d^2u/dy^2} \quad (\text{カルマン}) \quad (15.10)$$

管路乱流の剪断応力は、式 (15.6) のように直線分布となるが、混合距離に関するプラントルの仮定が適用しうる範囲では、むしろ剪断応力 $\tau$ は壁面剪断応力 $\tau_0$ に等しいと考えるべきである。こうした領域を“**constant stress layer**” (一定剪断応力層) と呼んでいる。結局、剪断応力分布は

$$\text{A) } \tau = \tau_0 \begin{cases} = -\frac{dp}{dx} \cdot a & \text{(二次元管路)} \\ = -\frac{dp}{dx} \cdot \frac{a}{2} & \text{(円管路)} \end{cases} \quad (15.11)$$

あるいは断面全体を考えれば

$$\textcircled{B} \quad \tau = \left(1 - \frac{y}{a}\right) \tau_0 \quad (15.12)$$

管内の流速を求めるには、式 (15.8) に上式の  $\tau$  および  $l$  の関係式を代入して積分を行えばよい。そのうち、最も単純な仮定の組  $\textcircled{A}\textcircled{B}$

$$\tau = \tau_0 = \text{const}, \quad l = \kappa y \quad (15.13)$$

を用い、かつ、式 (15.8) で  $du/dy$  がいまの場合常に正であるから絶対値記号を取り去れば、次の関係が得られる。

$$\frac{\tau_0}{\rho} = (\kappa y)^2 \left(\frac{du}{dy}\right)^2$$

すなわち、

$$\frac{du}{dy} = \frac{U_\tau}{\kappa y} \quad (15.14)$$

ここに、 $U_\tau$  は式 (15.1) により定義される摩擦速度  $U_\tau = \sqrt{\tau_0/\rho}$  である。

したがって、上式を積分して、管路乱流の流速分布式

$$\frac{u(y)}{U_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln y + C_1 \quad (15.15)$$

を得る。ここまでの議論は、壁面の粗滑に言及しておらず、上式はいずれの場合にも成立する。しばらくの間以下に滑らかな管路に関して話をすすめる。

#### 滑面円管路の流速分布則

さて、壁面近くでは“壁法則”（流速分布は  $\rho$ ,  $\nu$ ,  $\tau_0$ ,  $y$  により支配される）式 (15.3) が成立することを考えれば、上式は新たに普遍定数 (universal constant)  $A_s$  (添字  $s$  は smooth の意味) を導入して

$$\frac{u(y)}{U_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{U_\tau y}{\nu} + A_s \quad (15.16)^\dagger$$

と書くことができる。これを対数分布則 (log-law) という。実験より定まるカルマン定数  $\kappa = 0.4$  および普遍定数  $A_s = 5.5$  を導入し、さらに自然対数を常用対数に直せば ( $(1/\kappa) \log_e 10 = 2.30/0.4 = 5.75$ )、滑面管路の対数流速分布は式 (15.17) のように与えられる。

$$\frac{u(y)}{U_\tau} = 5.75 \log_{10} \frac{U_\tau y}{\nu} + 5.5 \quad (\text{滑面管路}) \quad (15.17)^{**}$$

<sup>†</sup> 最近、乱流境界層については普遍定数の値は  $\kappa = 0.41$ ,  $A_s = 5.0$  ととられることが多い。§ 16.1.c を参照。

<sup>\*\*</sup> 流速分布の無次元表示として、 $U^* = u/U_\tau$ ,  $y^* = U_\tau y/\nu$  の記号が用いられることがある。

(2) 次元的考察による対数分布則 図 15.2(b), 15.3 および 16.5 に示すように, プラントルの混合距離の理論は円管や平行平板間の乱流の流速分布と抵抗損失をよく説明できる. けれども, 乱流変動の真の姿(乱流構造)の研究がすすむにつれて, 混合距離の考え方が乱流運動をあまりにも模型的に考えているとの反省や批判が生まれた. このため流速の対数分布則の根拠を次元的考察におこらうとする考えがでてきた. すなわち, 先に述べたように壁面近傍の流速分布には壁法則が成立する.

$$u(y)/U_\tau = f_n(U_\tau y/\nu) \quad (15.18)$$

一方, 壁近傍を除く流速分布は速度欠損則  $g_n(y/a)$  にしたがう.

$$\frac{U-u(y)}{U_\tau} = g_n\left(\frac{y}{a}\right) \quad (15.19)$$

そして壁法則と欠損法則は共通の適用領域をもつ. このためには, それぞれの法則はこの共通領域で

$$\begin{aligned} f_n\left(\frac{U_\tau y}{\nu}\right) &= \frac{1}{\kappa} \ln \frac{U_\tau y}{\nu} + C & \left(\frac{U_\tau y}{\nu} \gg 1\right) \\ -g_n\left(\frac{y}{a}\right) &= \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{a} + D & \left(\frac{y}{a} \ll 1\right) \\ &= \frac{1}{\kappa} \ln \frac{U_\tau y}{\nu} - \frac{1}{\kappa} \ln \frac{U_\tau a}{\nu} + D \end{aligned}$$

のように表示されなければならない (Izakson, 1937; Millikan, 1939). この対数分布則は  $\kappa=0.4$ ,  $C=5.5$ ,  $D=0$  とするとき実験結果とよく一致する.

### (3) 高次の方法

しかし, もっと複雑な流れやさらにすすんで乱れの性質までも求めるためには, より高度の理論が必要となる. 平均流速分布を求めるにはレイノルズ方程式 (14.5) が示すように, 変動の二次の相関を知る必要がある. 速度変動の二次の相関である乱れの強さまでも求めようとする, 速度変動の三次の相関が必要になる (第 19 章). というように, 流速変動の高次の性質を求めようとするより高次のものを知らなければならないという風にきりが無い. そこでなんらかの仮定を設けて, どこかでこの連鎖を断ち切らなければならない. これを乱流モデルの完結問題 (closure problem) と呼ぶ. 現在, 広く応用されている乱流の数値モデルには, 乱れのエネルギー ( $k$ ) とエネルギーの消散率 ( $\epsilon$ ) の関係による  $k-\epsilon$  (ケイ-イプシロン) モデル; 小さな渦 (変動) によるより大きな渦運動への粘性

的作用を乱流の統計理論より定式化し (SGS (subgrid scale) モデル), そのスケールより大きなスケールの流速変動場を求める LES (large eddy simulation) モデルがある。最近では, コンピューターの高性能化と計算理論の進歩により, ナビエ-ストークス方程式を直接数値的に解いて, 複雑な乱流運動の細部までをシミュレートすることができるようになってきている。

#### d. 粘性底層の厚さと普遍定数の意味

次に, 流速分布式 (15.16) の普遍定数項  $A_s$  の意味について考えよう。

壁のごく近傍は, 粘性の作用が支配的で式 (15.15), (15.16) は成立しない。この層を粘性底層 (viscous sublayer) という。粘性底層内では, むしろ, 剪断応力分布式 (15.7a) のレイノルズ応力項は省略しうるから

$$\tau \approx \tau_0 = \mu \frac{du}{dy} \quad (15.20)$$

の関係が成立する。これを積分することにより粘性底層内の流速分布は, 直線分布式

$$\frac{u(y)}{U_\tau} = \frac{U_\tau y}{\nu} \quad (15.21)$$

となる。粘性底層の外縁 ( $y = \delta_s$ ) で式 (15.15) は式 (15.21) と接続しなければならないから (図 15.2(a), (b)), 両式の右辺を等しいとおいて

$$\frac{1}{\kappa} \ln \frac{U_\tau \delta_s}{\nu} + A_s = \frac{U_\tau \delta_s}{\nu}$$

これより普遍定数  $A_s$  は

$$\begin{aligned} A_s &= \frac{U_\tau \delta_s}{\nu} - \frac{1}{\kappa} \ln \frac{U_\tau \delta_s}{\nu} \\ &= Re_s - \frac{1}{\kappa} \ln Re_s \quad (= 5.5) \end{aligned} \quad (15.22)$$

となる。ここに, レイノルズ数  $Re_s = U_\tau \delta_s / \nu$  はクエット流的な粘性底層の流速分布の安定限界に対応する一定のレイノルズ数と考えられ, 上式で  $A_s = 5.5$  とすれば次のように定まる。

$$Re_s = \frac{U_\tau \delta_s}{\nu} = 11.6 \quad (15.23)$$

これにより, 滑面管路の流速分布の定数項の意味づけができた。

#### e. 流速分布の領域区分

以上のように導かれた管路乱流の流速分布式を実験結果と比較したのが図 15.2

(b) である。対数分布式 (15.17) と粘性底層での式 (15.21) の中間の領域では、流速分布は  $U_{\tau}y/\nu \approx 4$  で層流則から離れ、滑らかに乱流対数則に遷っている。この中間層はバッファー域と呼ばれ、粘性の作用も乱流による混合作用も同程度に働く層である。式 (15.7 a) の右辺のいずれの項をも省略せずに解けば、この層の分布をも表す一般的な流速分布式が得られ、その両極限が log-law と linear law になる。したがって、管内の壁面乱流は壁からの無次元距離により、次のような三領域に分類できる。

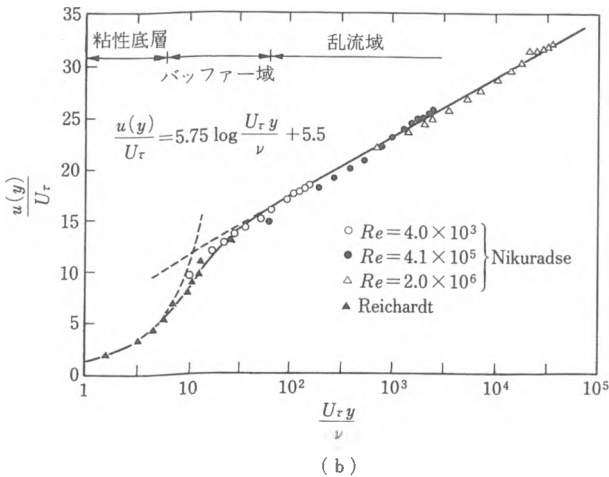
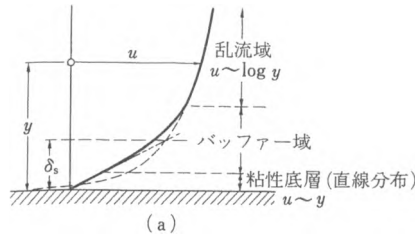


図 15.2 管路乱流の流速分布

粘性底層	: $0 < \frac{U_{\tau}y}{\nu} < 4$	}
バッファー域	: $4 < \frac{U_{\tau}y}{\nu} < 30 \sim 70$	
乱流域	: $30 \sim 100 < \frac{U_{\tau}y}{\nu}$	

管路の最大流速は、式 (15.17) で  $y=a$  とおき

$$\frac{U_{\max}}{U_{\tau}} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{U_{\tau} a}{\nu} + A_s \quad (15.24)$$

上式と式 (15.17) の差を作れば、

$$\frac{U_{\max} - u(y)}{U_{\tau}} = -\frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{a} \quad (15.25)$$

を得る。これは、§ 15.1.b に述べたカルマンの速度欠損則にはかならない。

式 (15.17) は壁面近くの一定応力層に関して求められた流速分布式であるにもかかわらず、図 15.2(b), 15.3 に明らかなように管の全断面にわたって実験結果と非常によい一致を示している。ある仮定や条件のもとに導かれた理論がその範囲を越えて成立することはまああることで、自然の柔軟さを示すものである。

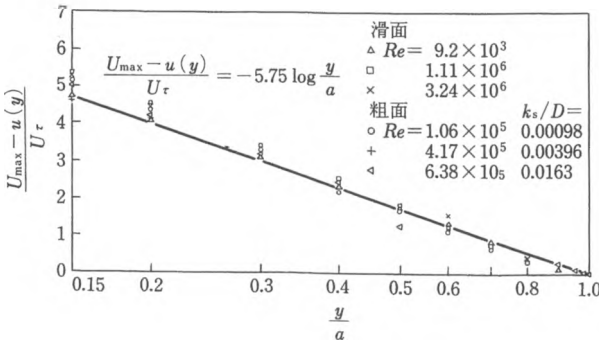


図 15.3 速度欠損則

カルマンの力学的相似の仮説 (式 (14.13) すなわち (15.10)) には特に“壁面近く”という条件はないから、これと剪断応力に関する直線分布式 (15.12) とを用いて (⑥⑧) の組合せにより、次の微分方程式を解けばさらに精度のよい流速分布式が得られそうに思われる。

$$\tau_0 \left(1 - \frac{y}{a}\right) = \rho \kappa^2 \left(\frac{du}{dy}\right)^4 / \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)^2 \quad (15.26)$$

これを積分すれば次のようになる。

$$u(y) = U_{\max} + \frac{U_{\tau}}{\kappa} \left\{ \ln \left(1 - \sqrt{1 - \frac{y}{a}}\right) + \sqrt{1 - \frac{y}{a}} \right\} \quad (15.27)$$

しかし、上式と実験とを比較すれば、むしろ限定された条件のもとに導かれたプラントルの対数分布則式 (15.17) の方がより実験結果と一致している。したが

って、管内乱流の流速分布式としては一般に単純な対数分布式 (log-law) が用いられる。

## 15.2 円管路の摩擦抵抗

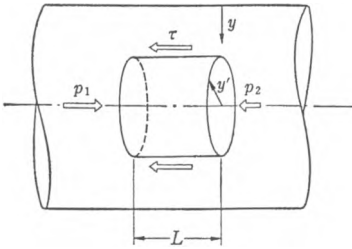


図 15.4

滑らかな円形断面の管路の摩擦抵抗について考察する。管軸方向に長さ  $L$ 、管の中心からの半径  $y' (= a - y)$  の流体柱状部に働く力のつりあいをみる。図 15.4 を参考にして、この柱体部の前後の面に働く圧力差  $(p_1 - p_2)$  ( $\pi y'^2$ ) と、側面に働く流体の内部摩擦力  $\tau(2\pi y' L)$  とはつりあっている。したがって、

剪断応力  $\tau$  の分布はこの両者を等しいとおいて

$$\tau = \frac{p_1 - p_2}{L} \cdot \frac{y'}{2} = -\frac{(a - y)}{2} \cdot \frac{dp}{dx} \quad (15.28)$$

である。また、壁面摩擦応力は  $y = 0$  において

$$\tau_0 = -\frac{a}{2} \frac{dp}{dx} = -\frac{d}{4} \frac{dp}{dx} \quad (15.29)$$

である。ここに、 $a =$  管の半径、 $d =$  管の直径。管路の摩擦抵抗係数  $f$  は、圧力勾配と断面平均流速  $U_0 = Q/\pi a^2$ 、管径  $d$  から次のように定義される。

$$\frac{p_1 - p_2}{L} = \frac{f}{d} \cdot \frac{1}{2} \rho U_0^2 \quad (15.30)$$

これを **Darcy-Weisbach** の摩擦損失式という。この表式は摩擦損失による圧力勾配は流れの運動エネルギーに比例すると考えるのが妥当であること、使用する単位系が異なっても抵抗係数が変わらないためには、これが無次元数でなければならないという考えによっている。上式より

$$f = -\frac{dp}{dx} / \frac{1}{d} \left( \frac{1}{2} \rho U_0^2 \right) \quad (15.31)$$

$dp/dx$  のかわりに式 (15.29) より、 $\tau_0$  を用いれば、

$$f = 8 \frac{\tau_0}{\rho U_0^2} = 8 \left( \frac{U_\tau}{U_0} \right)^2 \quad (15.32)$$

$$\tau_0 = \frac{f}{8} \rho U_0^2; \quad \sqrt{\frac{f}{8}} = \frac{U_\tau}{U_0} \quad (15.33)$$

断面平均流速  $U_0$  を流速分布より求めるために速度欠損則，式 (15.25) の両辺に  $2\pi(a-y)dy$  を掛けて，管全体について積分すれば

$$\begin{aligned} \frac{\pi a^2(U_{\max}-U_0)}{U_\tau} &= \frac{2\pi}{\kappa} \int_0^a \left(\ln \frac{a}{y}\right) (a-y) dy \\ &= \frac{2\pi a^2}{\kappa} \int_0^1 (1-\xi) \ln \frac{1}{\xi} d\xi \\ &= \pi a^2 B \end{aligned} \tag{15.34}$$

ここに， $\xi=y/a$

$$B = \frac{2}{\kappa} \int_0^1 (1-\xi) \ln \frac{1}{\xi} d\xi = 3.75 \tag{15.35}$$

となる。すなわち

$$U_0 = U_{\max} - 3.75 U_\tau \tag{15.36}$$

実験結果と比較すれば，定数 3.75 は少々大きくなり

$$U_0 = U_{\max} - 4.07 U_\tau \tag{15.37}$$

ところが， $U_{\max}$  は式 (15.17) で  $y=a$  とおいた式 (15.24) で与えられるから，これを上式に代入すれば， $U_0/U_\tau$  すなわち  $\sqrt{8/f}$  を表す式が得られる。

$$\frac{U_0}{U_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{U_\tau a}{\nu} + (A_s - B) \tag{15.38}$$

上式の右辺の  $U_\tau a/\nu$  を， $U_\tau a/\nu = (U_\tau/2U_0) \cdot (U_0 d/\nu) = (\sqrt{f}/4\sqrt{2}) Re$  と変形すれば，滑らかな円管路の摩擦抵抗の理論式が次のように得られる。

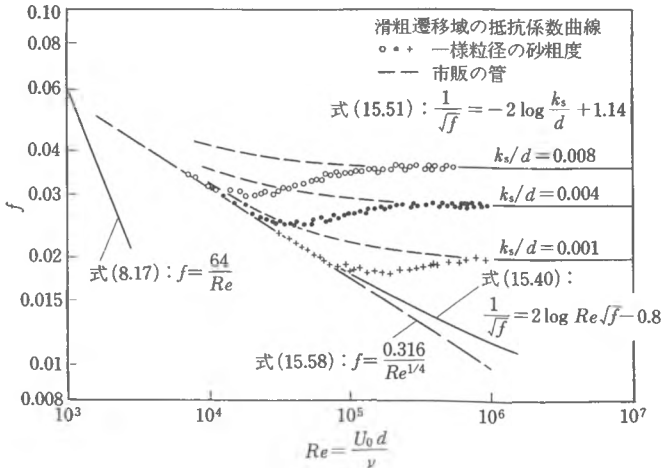


図 15.5 円管路の抵抗係数とレイノルズ数 (Daily-Harleman より)

$$\sqrt{\frac{8}{f}} = \frac{1}{\kappa} \ln(Re \sqrt{f}) + (A_s - B) - \frac{1}{\kappa} \ln(4\sqrt{2}) \quad (15.39)$$

実用に便利なようにこれを書き直し、定数項に実験による補正を行えば、

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.0 \log_{10} \left( \frac{U_0 d}{\nu} \sqrt{f} \right) - 0.8 \quad (\text{滑らかな円管路}) \quad (15.40)$$

となる (上式右辺の定数の理論値は 0.91 である)。

図 15.5 に滑らかな円管の抵抗係数とレイノルズ数の関係を実験値と比較して示す。乱流管路の抵抗係数 (式 (15.40))  $f$  は、もし同一レイノルズ数で層流流れが可能であるとしたときの値  $f = 64/Re$  に比べて大きな値となっている。またレイノルズ数の増大に伴う  $f$  の値の変化はずっと少ない。

### 15.3 粗い管路

#### a. 流速分布

管壁が粗い場合にも前項に説明した滑らかな管の場合と全く同様に議論を展開できて、対数流速分布則式 (15.15) に達する。ところが、粗い管路では粘性の作用の卓越する粘性底層は存在しない。かわりに個々の粗度要素の作る後流層がこれにかわる。

したがって、プラントルの壁法則は粘性  $\nu$  のかわりに粗度の高さ  $k_s$  を流速の支配量の一つに考慮し、これを代表長さとして次のように書き換えなければならない。

$$\frac{u(y)}{U_r} = f_n \left( \frac{y}{k_s} \right) \quad (15.41)$$

式 (15.15) に上の粗面の場合の壁法則を適用すると、粗い管路の流速分布式として

$$\frac{u(y)}{U_r} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{k_s} + A_r \quad (15.42)$$

を得る。ここに、 $A_r$  (添字  $r$  は rough の意味) は普遍定数である。

ニクラージェ (Nikuradse, 1933) は管の内側に一樣粒径の砂を貼付けた人工的な粗管で実験を行った。その結果によれば、上式の定数  $A_r$  は粗度  $k_s$  を砂の径 (篩 (フルイ) の目の大きさ) にとるとき、 $A_r = 8.5$  である。

$$\frac{u(y)}{U_r} = 5.75 \log_{10} \frac{y}{k_s} + 8.5 \quad (\text{粗い管路}) \quad (15.43)$$

このようにして、 $A_r$  の値は実験的に 8.5 と定められた。しかし、普通の粗い管

では、粗度の高さは人工粗度と異なり一様ではないから、逆に上式、あるいはむしろ上式から導かれる摩擦抵抗式 (15.51) と実験とを比較してその管の粗度  $k_s$  を定義している。これを相当粗度 (equivalent roughness) と呼ぶ。

式 (15.43) と滑管の流速分布式 (15.17) との差は

$$\frac{\Delta u}{U_\tau} = \frac{u_{\text{smooth}} - u_{\text{rough}}}{U_\tau} = 5.75 \log \frac{U_\tau k_s}{\nu} - 3.0$$

となり、管が粗くなる ( $U_\tau k_s / \nu$  が大きくなる) につれて、 $\Delta u / U_\tau$  が大きくなる。カルマンの速度欠損則は、滑らかな管路の場合と全く同じである。

$$\frac{U_{\max} - u(y)}{U_\tau} = -\frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{a} \quad (\text{粗あるいは滑な管路}) \quad (15.25 a)$$

### b. 壁面の粗滑

ところで管の粗滑とは何であろうか。手で触れてみてどんなに滑らかな管でも、顕微鏡的に見ても滑らかということはないし、また、明らかに粗い管であってもレイノルズ数が十分小さければ層流流れとなり滑管との差異は実際上なくなってしまふ。壁面近くでの粘性係数に関連する長さのスケールは、先に述べたように  $\nu / U_\tau$  であり、粘性底層の厚さ  $\delta_s$  はこれに比例する。この長さあるいは粘性底層の厚さ  $\delta_s$  は流速の増加とともに薄くなっていくが、これらと粗度  $k_s$  との相対的大きさ  $U_\tau k_s / \nu$  (または  $k_s / \delta_s$ ) により管路壁面の実際的な粗滑が決まると考えられる。

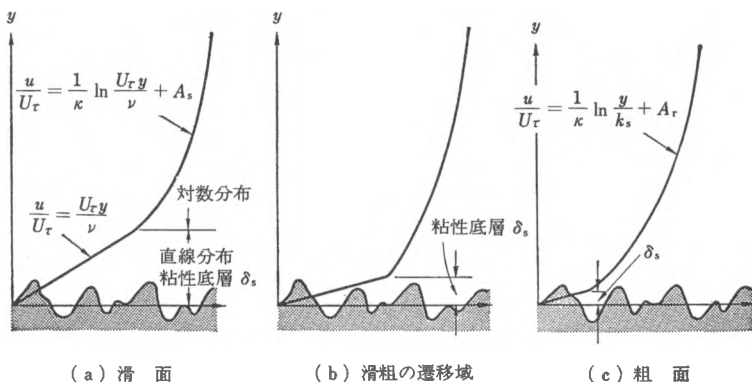


図 15.6 壁面の粗滑—壁面の粗さと粘性底層外縁高さ  $\delta_s$  (式 (15.23) との関係)

図 15.2 に示されるように  $U_\tau y / \nu < 4$  の範囲では粘性の影響が強く、直線流速

分布が成立している。粗度要素がこの層内にあれば、粗度は實際上粗面として考えなくてよいと思われ、実験的にもこの考えの正しいことが支持されている。こういう流れの状態を“水理学的に滑らかである” (hydraulically smooth) という。これは、 $U_\tau k_s/\nu = (U_\tau \delta_s/\nu)(k_s/\delta_s) = 11.6(k_s/\delta_s)$  の関係より、粗度の高さ  $k_s$  が粘性底層の厚さ  $\delta_s$  の約 1/3 以下であることに相当する。これに対して、 $U_\tau k_s/\nu > 70$  の範囲では流速分布式 (15.43) が成立し、管は完全に粗管となり、抵抗係数  $f$  は  $k_s/d$  にのみ関係する。その中間が遷移領域であり、抵抗係数  $f$  はレイノルズ数  $Re$  と相対粗度  $k_s/d$  の関数である。

$$\left\{ \begin{array}{lll} \text{水理学的滑面} & : U_\tau k_s/\nu < 4, & (3 < \delta_s/k_s), \quad f(Re) \\ \text{遷移領域} & : 4 < U_\tau k_s/\nu < 70, & (1/6 < \delta_s/k_s < 3), \quad f(Re, k_s/d) \quad (15.44) \\ \text{完全粗面} & : U_\tau k_s/\nu > 70, & (\delta_s/k_s < 1/6), \quad f(k_s/d) \end{array} \right.$$

遷移領域では流速分布式

$$\frac{u(y)}{U_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{y}{k_s}\right) + A\left(\frac{U_\tau k_s}{\nu}\right) \quad (15.45)$$

の  $A$  が一定ではなく  $U_\tau k_s/\nu$  の関数である。また、滑面の流速分布を上式のように変形すれば、 $A$  は

$$A = 5.5 + 2.5 \ln(U_\tau k_s/\nu) \quad (15.46)$$

となる (図 15.7)。

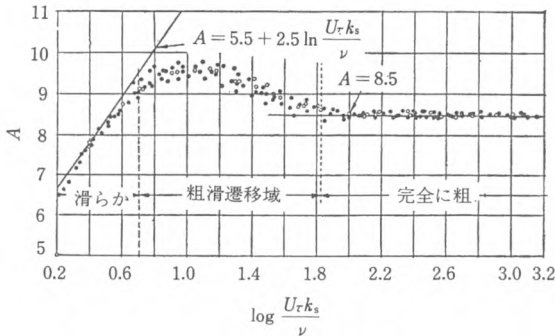


図 15.7 壁面の粗滑と流速分布式 (15.45) の定数  $A$  の関係 (Schlichting, McGraw-Hill)

### c. 粗い管の摩擦抵抗

滑らかな管の場合と同様にして、流速分布則から粗い管路の摩擦抵抗公式を導

くことができる。管路流に対する欠損則 (15.25 a) を管断面全体について積分すれば、平均流速  $U_0$  と最大流速  $U_{\max}$  の間の関係として

$$U_0 = U_{\max} - 3.75 U_r \quad (15.47)$$

を得る。一方、最大流速は式 (15.42) において  $y=a$  とおいて

$$U_{\max} = U_r \left( 2.5 \ln \frac{a}{k_s} + A_r \right) \quad (15.48)$$

となる。したがって、上の二式より

$$\frac{U_0}{U_r} = 2.5 \ln \frac{a}{k_s} + 4.75 \quad (15.49)$$

となる。これを式 (15.32) で定義される無次元の摩擦抵抗係数  $f$  の形で表すと

$$f = 8 \times \left( 2.5 \ln \frac{a}{k_s} + 4.75 \right)^{-2} \quad (15.50)$$

$$= \left( 2 \log_{10} \frac{a}{k_s} + 1.68 \right)^{-2} \quad (15.50 a)$$

となる。実験との比較により定数値に多少の修正 (1.68 は 1.74 に変える) を行い、 $a$  のかわりに直径  $d$  を用いれば、次式の粗管の摩擦抵抗公式が得られる。

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \frac{k_s}{d} + 1.14 \quad (\text{粗い円管路}) \quad (15.51)$$

上式によれば、完全に粗いパイプの抵抗係数はパイプ径に対する相対的な粗さ  $k_s/d$  のみ関係し、レイノルズ数には無関係である、図 15.5 にニクラーゼによる管路の摩擦抵抗係数の実験結果を示す。この場合のように人工的の粗度を与えたパイプの  $f$  はレイノルズ数の増加とともに、層流曲線  $f=64/Re$  から滑管乱流への遷移の場合と同じ遷移曲線にしたがって  $f-Re$  曲線上に載り、レイノルズ数の増加により水理的に滑らかな状態を出るにつれて  $Re$  軸に平行な直線に徐々に移行している。これに反し、図中に破線で示した市販のパイプの場合には、完全粗面状態の  $f$  値より大きな  $f$  値からレイノルズ数の増加とともにこの状態に漸近している。これは粗度要素が均一でないので、レイノルズ数が小さく粘性底層がそれほど薄くない状態でも粗度要素の一部が底層上に突出して粗度効果を発揮するためである。市販のパイプのような自然の粗い管に対する抵抗は、粗管と滑管の場合の内挿式として、コールブルック-ホワイト (Colebrook-White) により次のように与えられている。

$$\frac{1}{\sqrt{f}} + 2 \log \frac{k_s}{d} = 1.14 - 2 \log \left( 1 + 9.35 \frac{d/k_s}{Re \sqrt{f}} \right) \quad (15.52)$$

後流則による抵抗公式

次章に述べるように、平板に沿う乱流境界層にも対数則が成立する。しかし、境界層の外縁に近づくにつれて流速分布は対数則から離れ、コールスによる後流関数による補正が必要となる。

円管流の場合にはコールスの後流則による流速分布の補正はほとんど必要がないが、一応この方法による抵抗則についてふれる。コールスの流速分布則 (式 (16.8)) を用いて平均流速  $U_0 = \int_0^a 2\pi u(y)(a-y)dy/\pi a^2$  を求めると、摩擦損失係数  $f = 8(U_\tau/U_0)^2$  とレイノルズ数  $U_0 d/\nu$  について次の関係が得られる。

$$\sqrt{\frac{8}{f}} \exp\left(\kappa \sqrt{\frac{8}{f}}\right) = \frac{aU_0}{\nu} \exp\left(\frac{3}{5}\Pi + \kappa A_s - \frac{3}{2} - \kappa F\right) \quad (15.53)$$

円管流に後流則を適用すると、後流パラメーター  $\Pi$  はほぼ次の値をとる。

$$\Pi = 0.03 \quad (\text{円管: 粗面})^\dagger$$

壁面の粗度効果を表す  $F (= \Delta U/U_\tau)$  は円管の場合、図 15.8 および次式に示すようである。

$$F \begin{cases} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{U_\tau k_s}{\nu} + D & \left( 7 \leq \frac{U_\tau k_s}{\nu} \right) \\ = -0.5 (< 0) & \left( \frac{U_\tau k_s}{\nu} \leq 7 \right) \end{cases} \quad (15.54)$$

式 (15.53) を抵抗係数の評価に用いても、 $\Pi \cdot F$  の後流則の効果は  $A_s$  の変化とみなすことができる。

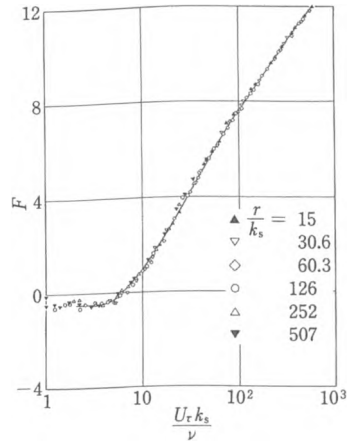


図 15.8 粗い円管流の場合の  $F(U_\tau k_s/\nu)$  (谷による Nikuradse のデータの再評価, 1989)

<sup>†</sup> 円管路流では後流則による補正の必要がない (事実, 粗面円管では  $\Pi = 0.03$ ) との予想に反して, 滑面円管については  $\Pi = 0.3$  の値が谷 (1989) により報告されている。しかし, この値は流速分布の測定から直接的に求められたものではなく, ニクラセ (1932) の円管路の摩擦損失係数  $f$  と管軸流速と平均流速の比  $U_{max}/U_0$  のデータを再整理して間接的に得られたものである。したがって,  $\Pi$  の値が予想外に大きいのではなく,  $A_s$  の値が平板の場合と異なることと考えることもできる。著者が流速分布から直接計算したところでは,  $\Pi = 0.06$  となっている。

### 15.4 ベキ乗流速分布式とブラジウスの抵抗公式

管壁の粗滑にかかわらず成立する流速分布式としてベキ乗公式 (式 (15.55)) が早くから実験的に知られている。

$$\frac{u(y)}{U_{\max}} = \left(\frac{y}{a}\right)^{1/n} \quad (15.55)$$

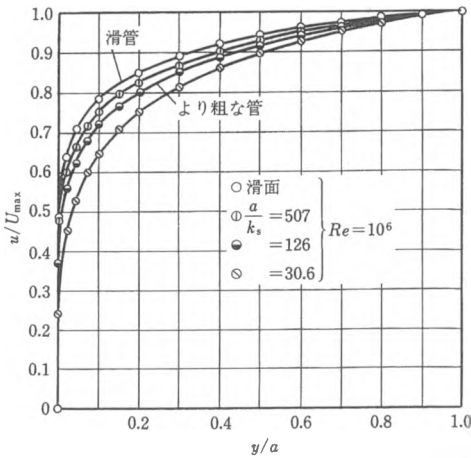


図 15.9 粗管内の流速分布

と最大流速の比は次式のようになる。

$$\frac{U_0}{U_{\max}} = \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)} \quad (15.57)$$

一方、レイノルズ数が  $10^5$  以下の滑管乱流の抵抗に関しては、ブラジウスの実験公式 (1911) がある。

$$f = 0.3164 Re^{-1/4} \quad (Re \leq 10^5, \text{滑管}) \quad (15.58)$$

ブラジウスの公式は図 15.5 に破線で記入されている。このブラジウスの公式は流速分布の  $1/7$  乗則に対応するもので、両者を理論的に関連づけることができる。すなわち式 (15.58) を  $f$  の定義式 (15.32) を用いて変形し、平均流速  $U_0$  と最大流速  $U_{\max}$  の関係 (15.57) を代入すれば、

$$\frac{U_{\max}}{U_0} = 8.74 \left(\frac{U_0 a}{\nu}\right)^{1/7} \quad (15.59)$$

となる。この関係は  $y=a$  のみならず、すべての  $y$  で成立すると仮定すれば、次

滑管についての  $n$  の値は常用のレイノルズ数の範囲 ( $Re \approx 10^5$ ) で 7 であり、普通 “ $1/7$  乗則” とも呼ばれている。 $n$  の値はレイノルズ数の増加とともに少し増加し、近似的に

$$n = 2 \log_{10} \frac{Re}{10} \quad (\text{滑管}) \quad (15.56)$$

の関係が実験的に知られている。

管が粗い場合には  $n$  の値は滑管に比べて小さくなる。

式 (15.55) の積分より平均流速

式となる.

$$\frac{u(y)}{U_\tau} = 8.74 \left( \frac{U_\tau y}{\nu} \right)^{1/7} \quad (15.60)$$

上の二式をまとめると 1/7 乗則 (15.55) が得られる.

## 15.5 ま と め

一様径の円管路流という最も単純なケースをとってみても、流体の流れは以上のように複雑である。混乱を防ぐためこれまでの議論を整理して要点をまとめておく。

		流速分布	抵抗係数	
円管路流	層流	… ハーゲン-ポアズイユ (放物線分布)	$64/Re$ , 式(8.17)	
	乱流	滑面	対数則式(15.17)	$f_n(Re)$ , 式(15.40)
		粗面	対数則式(15.43)	$f_n(k_s/d)$ , 式(15.51)
		(滑面)	(ベキ乗則) 式(15.55)	(ブラジウス公式, 式(15.58))
		(粗面)	(ベキ乗則) 式(15.55)	—