

# 5. 渦 (うず)

完全流体は最も単純化され抽象化された仮想的流体である。しかも、実在流体の最も重要な属性である粘性がないとして理論が展開されているから、粘性が主役をはたす流れの理論としては適当とはいえない。事実、そのままではダランベールの背理のように現実の経験と全く相反する結果を与えることもある。しかし、完全流体の力学も渦の作用を考えると実在流体のモデルとしてかなり有効である。場合によっては、実際の現象を一層明瞭に分析的に理解するのに都合がよい。すでに述べた平板に働く揚力や自由流線（死水領域）理論による物体に作用する抗力の理論も、結局は渦層の存在を考慮したことによるものであり、渦層は実在流体の粘性作用を抽象化したものと考えることができる。また、非流線形の物体から下流に交互に発生する渦列（カルマン渦列）は渦を考慮した完全流体の理論により説明される。

以下には、まず流体中の渦に関する基本定理を述べ、次に具体的な現象について解説する。

## 5.1 渦線・渦管・渦糸

渦度  $\omega$  は流速ベクトル  $v$  から式 (1.37), すなわち

$$\begin{aligned}\omega &= \text{rot } v \\ &= \nabla \times v\end{aligned}\quad (5.1)$$

により導かれるベクトル量で、流れのすべての点で定義される。ちょうど速度ベクトルから流線・流管が定義されたと同じように、渦度ベクトルから渦線・渦管を定義しうる。流れの中の一つの曲線上のすべての点での接線が、その点の渦度ベクトルの方向と一致するような曲線を渦線 (vortex line) という。渦度ベクトル  $\omega$  の成分を  $\xi, \eta, \zeta$  とするとき、渦線は微分方程式

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta}\quad (5.2)$$

の解として求められる。

流れの中の小さな閉曲線を通るすべての渦線により構成される管を渦管 (vortex tube) と呼ぶ。§5.3のヘルムホルツの渦定理に述べるように、一つの渦管を構成する流体粒子は、いつまでも同じ渦管としてあたかも一つのかたまりのように運動するから、渦管に含まれる流体を断面が無限小の渦管におき換えて、これを渦糸 (vortex filament) という。渦糸は渦管の中の

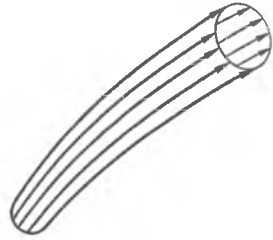


図 5.1 渦管

一定角速度で回転している流体部分を抽象した概念である。渦線が渦度場の幾何学的な形を表すのに対し、渦糸は微小な断面積の渦管内の流体部分の性質 (渦の断面積  $\sigma$  と渦度  $\omega$ ) を表す。渦線と渦糸の概念上の違いは、幾何学的な点と力学的な質点の関係にたとえられる。

ある閉曲線  $C$  についての循環  $\Gamma$ , 式 (1.53) と、その閉曲線にかこまれた任意の曲面  $S$  上の渦度  $\omega$  の間には簡単な関係がある。ストークスの定理により閉曲線に沿う積分は面積分に変換しうるから、式 (5.1) の関係を用いて

$$\begin{aligned}\Gamma &= \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S (\text{rot } \mathbf{v})_n dS \\ &= \iint_S \omega_n dS\end{aligned}\quad (5.3)$$

となる。ここに、 $dS$  は曲面  $S$  の面素、添字の  $n$  はベクトル  $\text{rot } \mathbf{v} = \omega$  の  $S$ -面の法線方向の成分を表す (§1.7)。

ベクトル解析によればあるベクトルを  $A$  とするとき、一般に  $\text{div } \nabla \times A = 0$  の関係が成立する。ここで、ベクトル  $A$  を速度ベクトル  $\mathbf{v}$  におき換えると、渦度は  $\omega = \nabla \times \mathbf{v}$  で定義されるから、上式は

$$\text{div } \omega = 0 \quad (5.4)$$

であることを示している。つまり、流れの場の渦度を場所的に見ると、流れの中のどこにも渦度の湧出しも吸込みも存在しないことを意味している。このことは流れ場を時間的に見たときに、流れの場で渦度の発生消滅がないこと (渦の不生不滅) をラグランジュの渦定理が保証しているのと対をなしている。

上の関係は、流体が非粘性流体であろうと粘性流体であろうと、また、非圧縮性流体であろうと圧縮性流体であろうと成立する。速度ベクトル  $\mathbf{v}$  については、流体が非圧縮性ならば

$$\text{div } \mathbf{v} = 0$$

であるが、圧縮性流体では

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \neq 0$$

であることと対比して留意してほしい点である。

## 5.2 ケルビンの循環不変定理

微小距離  $d\mathbf{s} = (dx, dy, dz)$  離れた二点  $P(x, y, z)$  と  $Q(x+dx, y+dy, z+dz)$  を考える。P点の座標の実質微分はP点の速度  $\mathbf{v}$  である。

$$\frac{Dx}{Dt} = u, \quad \frac{Dy}{Dt} = v, \quad \frac{Dz}{Dt} = w \quad (5.5)$$

同じようにQ点の座標の実質微分はQ点の速度  $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$  である。したがって、二つの実質微分の差をとれば

$$\frac{D}{Dt}(d\mathbf{s}) = d\mathbf{v} \quad (5.6)$$

の関係が得られる。

(注 5.1) 式 (5.5) の  $(x, y, z)$  は、正確に表現すると、P点にある流体粒子の座標  $X(t)$ ,  $Y(t)$ ,  $Z(t)$  とすべきであるが、混乱の心配がないので  $x, y, z$  とした。

ところで、循環  $\Gamma$  の積分素  $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = (u dx + v dy + w dz)$  の実質微分をとると、上の関係を用いて

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt}(\mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}) &= \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \cdot d\mathbf{s} + \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} \\ &= \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \cdot d\mathbf{s} + \frac{1}{2} d\mathbf{v}^2 \end{aligned} \quad (5.7)$$

となる。上式右辺の第一項の  $D\mathbf{v}/Dt$  はオイラーの運動方程式の左辺である。すなわち、質量力がポテンシャル  $\Pi$  をもてば、

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} &= \frac{\partial \Pi}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, & \frac{Dv}{Dt} &= \frac{\partial \Pi}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{Dw}{Dt} &= \frac{\partial \Pi}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}$$

この関係より、式 (5.7) の右辺の第一項は

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \cdot d\mathbf{s} &= \left( \frac{\partial \Pi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z} dz \right) \\ &\quad - \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right\} \end{aligned}$$

$$= d\Pi - \frac{1}{\rho} dp$$

式 (5.7) を閉曲線 C に沿って積分すれば,  $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \Gamma$  より左辺は  $D\Gamma/Dt$  である. 右辺の各項は上の関係より一価の関数で閉曲線 C に沿う積分は 0 となるから, 次の関係が導かれる.

$$\frac{D}{Dt} \Gamma = 0 \quad (5.8)$$

上の関係は**循環の不変性**——“完全流体中で流体とともに動く任意の閉曲線についての循環は時間がたっても不変である”——を表現しており, ケルビン (Lord Kelvin (William Thomson), 1824—1907) の**循環定理** (1869) と呼ばれている.

(注 5.2) 粘性流体の場合は次のようになる.

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = -\nu \oint_C (\nabla \times \boldsymbol{\omega}) \cdot d\mathbf{s} = \nu \oint_C (\nabla^2 \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{s}$$

### 5.3 ヘルムホルツの渦定理

完全流体の流れ場で質量力が一価のポテンシャルをもち, 圧力と密度の間に一意的関係があれば, 渦に関する次の諸定理——ヘルムホルツ (Helmholtz, 1821—1894) の**渦定理** (1858) が成立する.

(i) **渦の不生不滅**: 流体中にはじめ渦がなければその後も渦は生じないし, はじめ渦があればいつまでも消滅しない. (これは, 特にラグランジュの**渦定理** (1781) と呼ばれる).

(ii) **非粘性流体中の渦線を構成している流体粒子は, いつまでも渦線を構成し続ける.** (注 5.2, 5.3).

(iii) **渦糸・渦管の強さの不変性**: 一本の渦糸 (渦管) の渦の強さはどの断面についても等しい. また, 渦糸 (渦管) の強さは時間がたっても変化しない.

(iv) **渦糸に端はない**: したがって, 渦糸は流体中で一つの閉曲線を形作るか, あるいは流体の境界にその端をもち, 流体中で終わることはない.

(v) **渦管の伸縮と強さ**: 渦管は引き伸ばされると強さを増し, 逆にその長さが縮まると強さは弱くなる.

渦に関する一般定理は最初ヘルムホルツ (1858) により研究された. それゆえ, 渦に関する諸定理はヘルムホルツの**渦定理**といわれる. 彼の導いた**渦定理**の一部は, その後ケルビン (1869) により, より簡単な証明が与えられた.

定理 (i) の証明：歴史的にはヘルムホルツの渦定理の成立が先であるが、ここでは式 (5.8) のケルビンの循環定理からこれを証明する。まず、ケルビンの定理から渦なしの永続性——“最初渦なしであった流れの場は、いつまでも渦なしである”——が保証される。なぜならば、ある瞬間のどんな閉曲線にもこれに対応する最初の流れの場の閉曲線があり、この閉曲線内は渦なしであるから。

定理 (ii) の証明：次に図 5.2 のように、ある渦線  $L$  上の一点  $A$  を通る二本の線  $AB, AB'$  を引き、この線を通るすべての渦線により構成される二つの面  $S_1, S_2$  を考える。この面上の任意の閉曲線  $C$  に沿う循環は 0 である。もし 0 でないならば、式 (5.3) によりこの閉曲線内の点を貫く渦線  $L'$  があることになり、渦線により構成される面ではなくなる。流体の運動につれて、その閉曲線  $C$  も移動変形するが、循環はケルビンの定理により常に 0 である。したがって、最初と同じ流体粒子により形成されている面 (material surface)  $S_1, S_2$  は変形後もやはり渦線より構成された面であり続ける。つまり、渦面は流体運動を通じて常に一つの渦面として保たれている。このとき、両渦面の交線は最初の渦線  $L$  上にあった流体粒子で構成されなければならない。もしそうでなければ、 $L$  は少なくとも面  $S_1, S_2$  のいずれかと交わらねばならない。このとき、その面は渦線  $L$  により貫かれ、この点のまわりの閉曲線の循環は 0 でなくなり矛盾する。

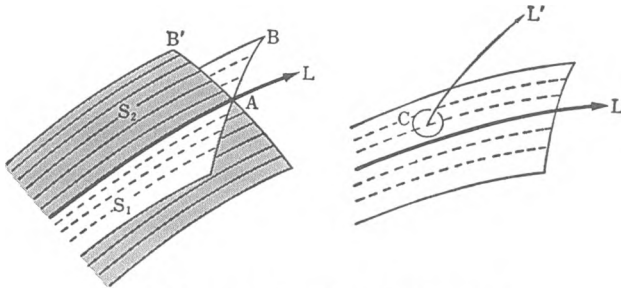


図 5.2 ヘルムホルツの渦定理 (ii) の証明

定理 (iii), (iv) の証明：渦管の二つの断面をとる。この渦管を巻く二本の閉曲線の間には図 5.3 のようにカットを入れると、渦管を巻く一つの曲面  $S$  ができる。渦管により構成されるこの  $S$ -面を貫く渦線は存在しえない (すなわち  $\omega_n = 0$  である) から、式 (5.3) より

$$\int_{ABCD} u_s ds + \int_{DD'} u_s ds + \int_{D'C'B'A'} u_s ds + \int_{A'A} u_s ds = 0$$

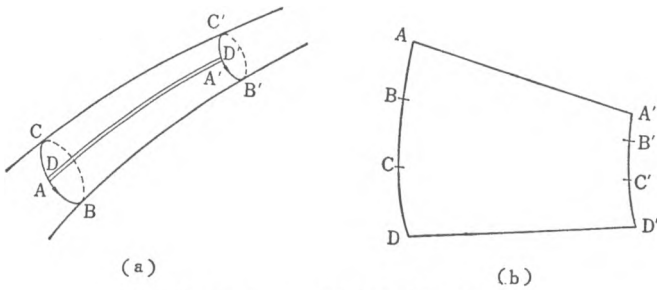


図 5.3 ヘルムホルツの渦定理 (iii) の証明

ここに、 $ds$  は線素、 $u_s$  は線素の接線方向の流速成分である。ところで、上式の第二項と第四項の積分は同一の積分路であり、ただ方向が逆なだけであるから

$$\int_{AA'} u_s ds = - \int_{A'A} u_s ds = - \int_{D'D} u_s ds$$

である。したがって、

$$\int_{ABCD} u_s ds = \int_{A'B'C'D'} u_s ds \quad (5.9)$$

それゆえ、一つの渦管を一周する閉曲線についての循環は閉曲線のとり方にはよらない。

この二つの断面の面積を  $\sigma$  および  $\sigma'$ 、断面の法線方向の渦度成分を  $\omega_n$  および  $\omega'_n$  とすれば、再び式 (5.3) により

$$(\sigma \omega_n)_{ABCD} = (\sigma' \omega'_n)_{A'B'C'D'} \quad (5.10)$$

すなわち、細い渦管では渦管の強さ (すなわち、渦度と断面積の積) は、どの断面についても等しい (定理 (iii) 渦管の強さの場所的不変性の証明)。

また、定理 (ii) により、ある一つの渦管の流体粒子はいつまでもその渦管として行動するから、ケルビンの循環定理により

$$(\sigma \omega_n)_{t=0} = (\sigma \omega_n)_{t=t}$$

となる (定理 (iii) 渦管の強さの時間的不変性の証明)。

流れの中で  $\omega$  は  $\infty$  になりえないから、渦糸の断面積  $\sigma$  は 0 にはならない。したがって、渦糸・渦線は流れの中で中断することはなく、それ自身閉じているか流れの境界に達していなければならない (定理 (iv) の証明)。

タバコの煙を口の中に入れていたずらに口からはき出して作る煙の輪 (vortex ring) は前者の例であり、上空より地上に達する竜巻きは後者の例である。

## 渦管の伸縮と渦度の変化

ケルビンの定理は循環の不変について述べている。ヘルムホルツの定理は“渦糸はいつまでも渦糸である”と述べている。この二つの定理から渦管の伸縮による渦度の変化について次の関係が導かれる。

いま、断面積  $dA$ 、長さ  $ds$ 、渦度  $\omega$  の渦管の一部をとる。渦管のこの部分の質量は  $\rho ds dA = \text{一定}$  である。一方、この渦管の循環はケルビンの定理により  $\omega dA = \text{一定}$  である。したがって、渦管の渦度  $\omega$  について次の関係が成立する。

$$\omega \propto \frac{1}{dA} \propto \rho ds \quad (5.11)$$

つまり、渦管が引き伸ばされて細くなれば、渦度  $\omega$  は大きくなり渦管の中の流体粒子の回転の角速度は速くなる。逆に縮んで太くなれば渦度は小さくなり、流体粒子の回転は遅くなる（定理 (V) の証明）。

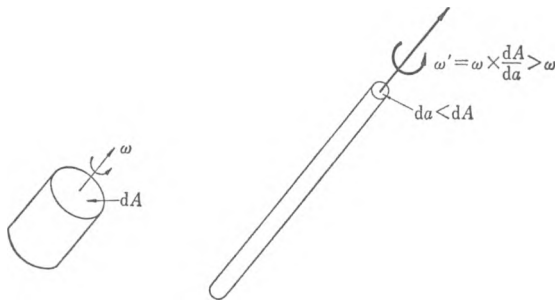


図 5.4 渦管の伸縮による渦度の変化

(注 5.3) 渦定理 (ii) (渦糸はいつまでも流体とともに動く) は、ヘルムホルツ (1821—1894) により 1858 年に導かれた。しかし、ラム (Lamb, 1932) の指摘によるとその証明は不完全であって、より完全な証明はコーシー積分 (1789—1857, 1827) を用いて行うことができる。この証明法はラグランジュ系によるもので、式の誘導は簡単ではないので、ここでは、ケルビンの循環定理 (1869) による直接的証明を採用した。

(注 5.4) 定理 (ii) は、通常“非粘性流体中の渦線は流体とともに動く”あるいは“最初渦線を形成していた流体粒子はいつまでも渦線を形成する”などと表現されるが、次の英文の表現が最も正確で完全である。“a”や“the”による対象の区別の仕方に注意して欲しい。

“The fluid particles constituting a vortex line will continue to constitute a vortex line as the fluid flows provided it is inviscid and either a homogeneous liquid or a barotropic gas.” (Yih, 1969)

### 5.4 不連続面と渦層

図 5.5 のように一つの境界面を介して隣り合う流れの速度が不連続的に変化しているとき、この不連続面を流れに垂直な軸をもつ渦の層 (vortex sheet) とみ

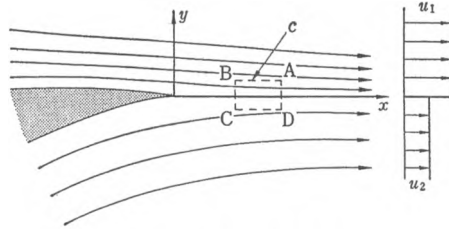


図 5.5 速度の不連続面

なすことができる。というのは、不連続面をはさむ積分路 ABCD についての循環  $\Gamma$  をとると、 $(\overline{BA} = \overline{CD} = \delta x, \overline{CB} = \overline{DA} = \delta y$  として)

$$\begin{aligned} \Gamma &= \oint_C u_s ds \\ &= \int_{AB} u_1 dx + \int_{BC} v dy + \int_{CD} u_2 dx + \int_{DA} v dy \end{aligned}$$

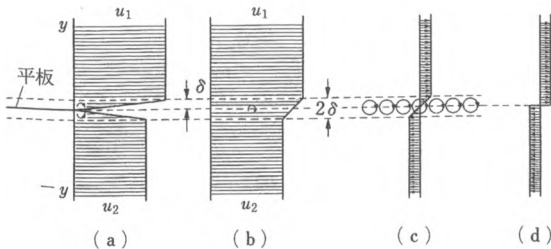
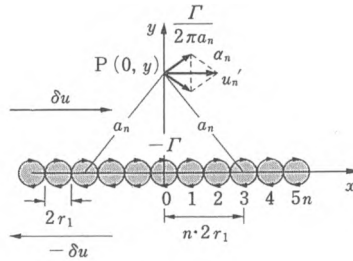


図 5.6 渦層による不連続面の形成 (Tietjens, 1960)

$$= \int_{AB} (u_1 - u_2) dx = -(u_1 - u_2) \delta x \quad (5.12)$$

となり、渦度  $\omega$  は式 (5.3) により

$$\omega = \frac{\Gamma}{\delta S} = \frac{\Gamma}{\delta x \delta y} = \frac{u_2 - u_1}{\delta y} \quad (5.13)$$

のようになる。

このことは、図 5.6 のように、 $x$  軸方向に一樣な流れの中に一列に径の小さな渦 (図では時計まわりの循環  $-\Gamma$  をもつ) を密に配列すると、渦の作る速度場のため渦層の上側では  $\delta u$  だけ流速が増加し渦層の下側では逆に  $\delta u$  だけ流速が減少し、渦層内ではこの不連続な流速変化が滑らかにつながるようになっていいると考えればよい。不連続面は渦層厚さ  $2r_1$  あるいは  $2\delta$  が零の極限である。

図 5.7 を参照すれば、渦度は  $\omega \equiv -\partial u / \partial y$  であり、その単位時間あたりの発生率は、渦層の厚さに無関係に次式のようにになる。

$$\int_{y_2}^{y_1} \left( -\frac{du}{dy} \right) u dy = \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} \quad (5.14)$$

#### 粘性による壁面からの渦度の供給

このように不連続面は渦の層とみなされれば、最初渦なしであった流れの中に渦の層である不連続面が存在するのは、ラグランジュの渦の不生不滅の定理に反するように思われる。しかし、この定理は完全流体の内部について述べているのであって、その境界面 (壁面) での渦の生成を禁じているものではない。完全流体の場合は、壁面での流体の滑りが許されるが、実在の粘性流体ではこれが実現できないために壁面上の渦層が、いわばコロの働きをして滑りなしの現実と滑りのある完全流体との間をつ

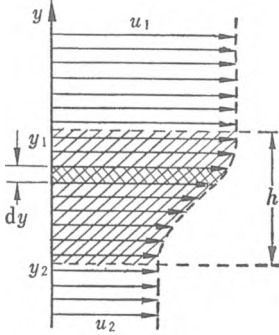


図 5.7 渦層

つ、この定理は完全流体の内部について述べているのであって、その境界面 (壁面) での渦の生成を禁じているものではない。完全流体の場合は、壁面での流体の滑りが許されるが、実在の粘性流体ではこれが実現できないために壁面上の渦層が、いわばコロの働きをして滑りなしの現実と滑りのある完全流体との間をつ

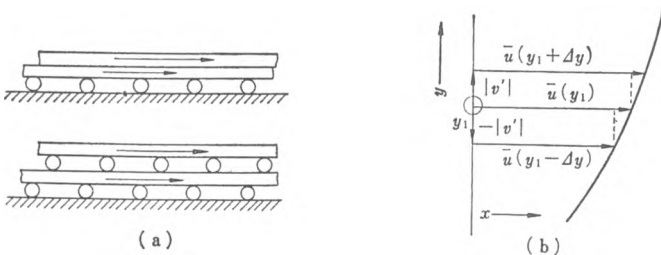


図 5.8 (a) 渦層による壁面での滑り, (b) 渦層による剪断流れ

ないでいるのである (図 5.8).

自由流線をもつ流れ (死水理論, § 4.9) で仮定した物体の端部からの速度の不連続面は, 物体のよどみ点から壁面に沿って発達するコロの列である境界層が後の流体中に押し流されたものとみなすことができる. この意味で, 死水理論は直接的には粘性を考慮してはいないが, 渦層である速度の不連続面によりやはり粘性の効果を間接的に含んでいるといえる.

### 5.5 翼に働く揚力と渦

クッター-ジュコフスキーの定理 (§ 4.6.a) は, 物体のまわりに (時計まわりの) 循環  $\Gamma = -\Gamma_*$  が存在すれば, その物体には

$$L = \rho U \Gamma_*$$

の揚力が働くことを述べている. しかしながら, なぜ物体——たとえば翼——のまわりに循環が発生するのかについては述べていない.

(i) 静止流体中におかれた翼を急に動かすと, 翼に固定された座標に対して

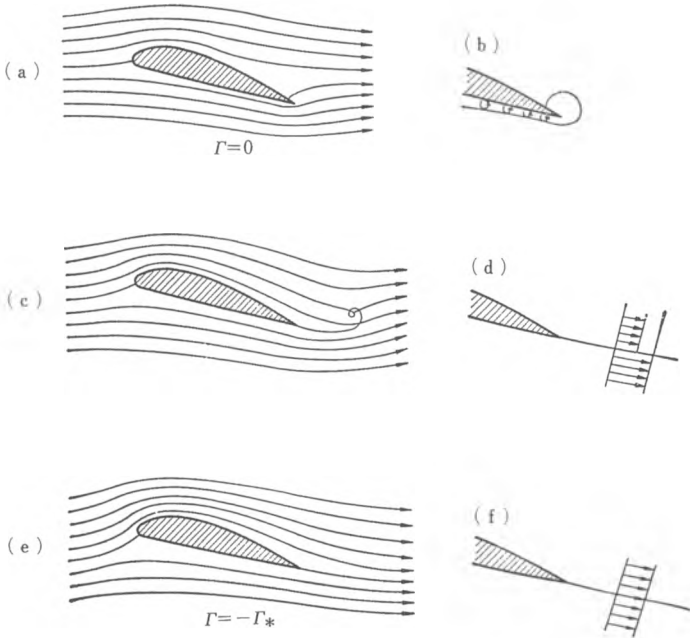


図 5.9 翼まわりの循環の発生とクッターの条件-ジュコフスキーの仮定

図 5.9(a) のように循環なしのポテンシャル流の場ができる。流線の剥離点は翼の上面にあって、翼の下面の流線は翼端の鋭い角を急に回りこんで上面で翼から離れる。翼が運動を始めた非定常状態では、粘性の作用は周囲に及ぼさず、また圧力方程式中の  $\partial\phi/\partial t$  の項が効くため翼端でも圧力  $p$  は  $-\infty$  とはならない (図 5.9(a))。

(ii) しかし、定常状態ではこのような鋭角を回るポテンシャル流れはそこで流速が無限大となり無限大の負圧を生じなければならない。§ 4.3.b の“角を回る流れのパラドックス”で述べたように、現実にはこのような流れは不可能であり、翼下面の流れは翼端を急に回り切れず翼端の低圧部に巻き込んで、翼下面に発達する境界層の反時計まわりの渦を蓄積する (図 5.9(b))。一方、翼上面の剥離点は翼端の低圧部に引き寄せられて翼端へ移動し、それとともに、この渦は翼から離脱する (図 5.9(c))。

(iii) このように翼の尖った後端から剥離流線が出る状態になっても、はじめ

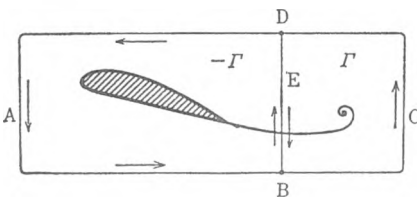


図 5.10 発達渦と翼まわりの循環

はこの流線の上下の流速に差があり、剥離流線は不連続面 (渦層) となっている (図 5.9(d))。このため剥離流線は流速の不連続面の不安定性により変形し渦層渦を形成しつつ (§ 18.3)、後方に押し流される。

(iv) このとき、ケルビンの循環不変定理は翼まわりにこれを打ち消す逆向きの循環 (時計まわりの循環  $-\Gamma = \Gamma_*$ ) が生じることを要求する。すなわち、図 5.10 のように十分大きな閉曲線 ABCDA で翼と渦をかこむと、この閉曲線に沿う循環は 0 でなければならない。そこで、閉曲線を二つの部分 ABEDA と BCDEB とに分ければこのことは明らかである。

$$\oint_{\text{ABCDA}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{\text{ABEDA}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} + \oint_{\text{BCDEB}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

この翼まわりの循環は翼後端からの剥離流線の上下の流速が等しくなるまで増加する。その結果、流れは滑らかに翼端を離れるようになる (図 5.9(f))。この条件は正に翼 (一般に突角のある物体) まわりの循環を定めるクッタの条件あるいはジューコフスキーの仮定の物理的意味に相当している。実際の粘性流体の場合にも、翼が運動し出した瞬間には粘性の作用は遠くに及ぼさず物体の周囲に留ま

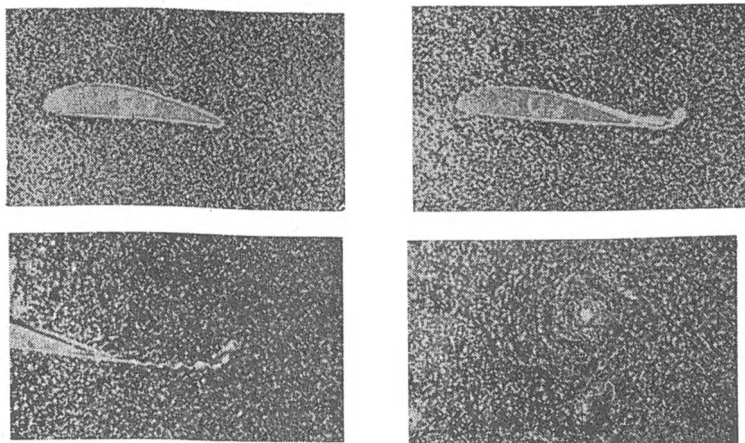


図 5.11 翼の運動に伴う発進渦 (Tietjens, 1960)

るから、流れは完全流体の流れと考えてよい状態にある。その後、翼の後端から渦が発生し後に流されてゆく。この渦を発進渦 (starting vortex) と呼ぶ。この様子は実際に実験で示すことができる。定常流は発進渦が無限遠の下流に流された状態である。

それでは翼のまわりに循環を形成しているものは何であろうか。定常流中の翼面は、滑りなしの条件を満たすべく薄い渦層に覆われていると考えられる。翼の上面の渦層は時計まわりの回転をもち、翼の下面では逆回転の渦である。翼をかこむ閉曲線内の循環  $\Gamma = \sum \omega \sigma$  は上下非対称の翼では  $\Gamma \neq 0$  であり、そのために翼に揚力が働く。翼のまわりに循環があるということは、翼を取り巻く閉曲線を渦糸が貫いていることである。翼理論では翼断面を渦糸の集団でおき換えることを行うが、その理由は上に述べた事実による。

## 5.6 渦の誘導する速度

無限に広がっている流体中にある微小長さ  $\delta s$ 、強さ  $\Gamma$  の渦糸部分が、点  $P(x)$  に作る速度寄与分  $\delta v$  は次の法則で与えられる。

$$\begin{aligned} \delta v &= \frac{\Gamma}{4\pi} \text{rot} \left( \frac{ds}{r} \right) \\ &= \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\delta s}{r^2} \times \frac{r}{r} \end{aligned}$$

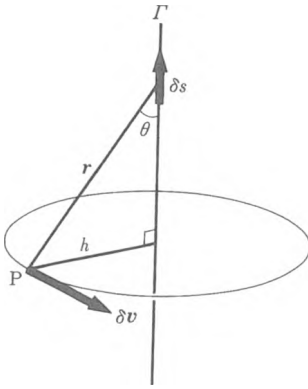


図 5.12 渦糸の微小要素が点 P に作る速度

$$= \frac{\Gamma \sin \theta ds}{4\pi r^2} \cdot e \quad (5.15)$$

ここに、 $r$  は渦糸部分から点 P へのベクトル、 $r = |r|$ 、 $ds$  は渦糸の微小線要素ベクトル、 $\theta$  は渦糸の軸が渦糸と P 点を結ぶ線となす角、 $e$  は  $ds$  と  $r$  に直交する単位ベクトル（証明は省略）。

一般に速度場  $v$  が与えられたとき、渦度  $\omega$  の場はその定義式 (1.32) から直ちに求まる。逆に渦度  $\omega$  の場が作る速度場は、上式の積分形で表される。

$$v = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\omega \times r}{r^3} dV \quad (5.16)$$

式 (5.15) の関係は電磁気学におけるビオ-サバル (Biot-Savart) の法則にはかならない。この場合は  $\Gamma$  を電流密度とすれば  $v$  は磁場ベクトルを表す。ただし、流体力学におけるビオ-サバルの法則は運動学的 (kinematic) なものであり、かつ流体が非粘性であること（ないしその他の性質）に依存しない。この法則を非粘性流体の篇に入れたのは、単に記述上の便宜のためにすぎない。

二次元の場合、ないしは三次元場の真直な渦糸の場合には、渦糸と点 P の垂直距離を  $h$  とすれば、( $r = h/\sin \theta$ ,  $s = h \cot \theta$  であるから)

$$u_\theta = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \theta}{r^2} ds = \frac{\Gamma}{4\pi h} \int_{-\infty}^{\infty} \sin \theta d\theta = \frac{\Gamma}{2\pi h} \quad (5.17)$$

この結果は二次元場の渦糸の作る流速の式(式 (4.42), (4.46)) と一致している。

一般に速度場 (ベクトル場) を渦なしの部分  $v_1$  と渦ありの部分  $v_2$  の和

$$v = v_1 + v_2 = \text{grad } \Phi + \text{rot } A$$

と表すことができる。  $\Phi$  をスカラー・ポテンシャル、 $A$  をベクトル・ポテンシャルという。ここに、

$$A = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\omega}{|r|} dV, \quad v_2 = \text{rot } A = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\omega \times r}{r^3} dV$$

## 5.7 二次元の渦糸群の運動

無限に広がった静止した空間の点  $z_0 (= x_0 + iy_0)$  にある強さ  $\Gamma$  の渦糸が作る速度場は、式 (4.39), (4.46) より複素速度ポテンシャル  $W(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - z_0)$  で表され、その虚数部から流関数  $\Psi$  は

$$\Psi(x, y) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \quad (5.18)$$

となる。ここに、 $r = |z - z_0|$ 。したがって、点  $(x_i, y_i)$  にある  $i$  番目の渦糸の強さを  $\Gamma_i$  とすれば、渦糸群の作る速度場の流関数は、

$$\Psi = -\frac{1}{2\pi} \sum_i \Gamma_i \ln r_i \quad (5.19)$$

と表される。ここに、

$$r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$$

渦糸は自分自身の効果を除いた速度で移動するから、 $k$  番目の渦糸の位置を  $X_k(t)$ ,  $Y_k(t)$  とすれば、

$$\frac{dX_k}{dt} = \frac{\partial \Psi_k}{\partial y_k} = u_k, \quad \frac{dY_k}{dt} = -\frac{\partial \Psi_k}{\partial x_k} = v_k \quad (5.20)$$

$$\Psi_k = -\frac{1}{2\pi} \sum_{i \neq k} \Gamma_i \ln r_{ik} \quad (5.21)$$

$$r_{ik} = \sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2} \quad (5.22)$$

ここに、 $\Psi_k$  は  $k$  番目の渦糸を除いた渦糸群の流関数、 $r_{ik}$  は  $i$  番目と  $k$  番目の渦糸の距離である。

速度ポテンシャル  $\Phi$  ではなく、流関数  $\Psi$  で流速場を表現したのは、すぐ後の議論が簡単となるからである。

### a. 二本の渦糸の運動

強さの等しい2個の渦糸の場合は、(次に述べる関数  $H$  によるまでもなく) 簡単に直接的に次の結果が導かれる。

(i) 同じ符号の強さの等しい二本の渦糸は、それらを結ぶ直線の中心のまわりに渦糸の回転と同じ方向に角速度一定 ( $\omega = \Gamma/\pi h^2$ ) の円運動を行う (図 5.13

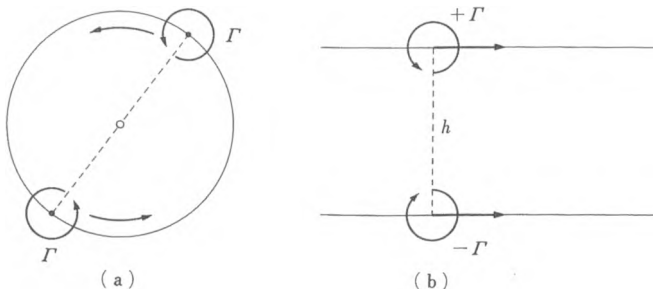


図 5.13 二本の渦糸系の運動  
(a) 同符号の渦糸, (b) 異符号の渦糸.

(a)).

(ii) 符号が反対で強さの等しい二本の渦糸は、それらを結ぶ直線（間隔  $h$ ）と直角に、回転方向が正（反時計まわり）の渦糸を進行方向の左手に見るように、速さ  $\Gamma/2\pi h$  で進む（図 5.13 (b)）。

### b. 一本の渦糸列の安定性

符号と強さ（ $\Gamma$ ）の等しい渦糸が等間隔  $a$  で  $x$  軸上に無限に並んでいるとする（図 5.14）。この場合の複素速度ポテンシャルは

$$W = \frac{\Gamma}{2\pi i} \{ \ln z + \ln(z-a) + \ln(z-2a) + \dots + \ln(z+a) + \ln(z+2a) + \dots \}$$

$$= \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \left\{ \frac{\pi z}{a} \left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{2^2 a^2}\right) \dots \left(1 - \frac{z^2}{n^2 a^2}\right) \dots \right\} \quad (5.23)$$

となる。ただし、上二行の複素速度ポテンシャル式の付加定数項は異なるが、この項は速度場には影響しないので省略した。

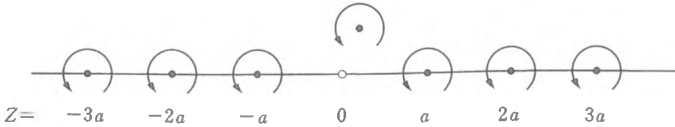


図 5.14 一本の直線上に等間隔に配列した同符号の渦列の安定性

一方、 $\sin z$  は

$$\sin z = z \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{2^2 \pi^2}\right) \dots \left(1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2}\right) \dots \quad (5.24)$$

のように無限乗積で表すことができるから、この関係を使うと  $W$  は

$$W = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \left( \sin \frac{\pi z}{a} \right) \quad (5.25)$$

となる。原点  $z_0=0$  あるいは一般的に  $z_0 = \pm na$  にある渦糸が自分以外の渦糸に誘導される速度は、複素速度ポテンシャル  $W$  から自分自身の作る場を差し引いて、

$$\bar{v}_{z_0} = \left[ \frac{d}{dz} \left( W - \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - z_0) \right) \right]_{z = \pm na}$$

$$= \frac{\Gamma}{2\pi i} \left[ \frac{\pi z}{a} \cot \frac{\pi z}{a} - \frac{1}{z - z_0} \right]_{z = \pm na} = 0 \quad (5.26)$$

したがって、この渦糸列は静止の状態にある。

一方、原点以外にある渦糸群が任意の位置  $(x, y)$  に誘導する速度場は、上の

結果を用いて

$$\bar{v} = u - iv = \frac{\Gamma}{2\pi i} \left( \frac{\pi}{a} \cot \frac{\pi z}{a} - \frac{1}{z} \right) \quad (5.27)$$

となる。  $z$  が十分小さいとすれば上式は近似的に

$$= -\frac{\pi\Gamma}{6a^2 i} z = -\frac{\lambda}{i} z \quad (5.28)$$

と表される。ここに、  $\lambda = \pi\Gamma/6a^2$ 。いま、原点にある渦糸に微小変位

$$dZ = dX + i dY \quad (5.29)$$

を与える ( $Z = X + iY$ )。ここに、  $X(t)$ 、  $Y(t)$  はこの渦糸の位置を表す時間の関数で、独立変数である座標  $(x, y)$  と区別して大文字を用いた。このとき原点にある渦糸は式 (5.28) の誘導速度場によって移動し、  $u = dX/dt$ 、  $v = dY/dt$  であるから  $\bar{v} = dZ/dt$  と表せる。したがって、式 (5.28) を代入すれば、

$$\frac{dZ}{dt} = -\frac{\lambda}{i} Z \quad (5.30)$$

となる。上式の共役関係より

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{\lambda}{i} Z \quad (5.31)$$

上の二式から  $Z$  を消去すれば、

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} = \lambda^2 Z \quad (5.32)$$

となる。上式の一般解は

$$Z(t) = Ae^{\lambda t} + Be^{-\lambda t} \quad (5.33)$$

( $A, B$  は積分定数)。  $\lambda$  が正 (負) の実数であれば時間の経過とともに  $e^{\lambda t}$  ( $e^{-\lambda t}$ ) は無限に大きくなる。つまり、原点にある渦糸 (いまの場合渦糸は無限に並んでいるので、原点は特別な点とはみなされない) の、任意の位置にある渦糸は、ひとたび平衡位置から少々ずれ始めると他の渦糸の作る速度場により急速にその位置を変える。これに応じて (原点にある渦糸の変位により速度ポテンシャルが変化する) 他の渦糸もいっせいに動き始める。したがって、この配列の渦糸列は式 (5.26) により静止状態にあるもののそれは不安定な平衡状態である。

### c. 渦糸群の運動の一般法則

いま、渦糸群の相互位置の関数

$$H = -\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \Gamma_i \Gamma_j \ln r_{ij} \quad (5.34)$$

を考える。二重和記号はまた  $\sum_{i < j} \sum$  とも記される。さて、 $k$  番目の渦の位置  $(x_k, y_k)$  での関数  $H$  の偏微分係数  $\partial H / \partial x_k$  は  $\ln r_{ij}$  の偏微分のうち  $x_k$  を含まない項は零となるから、式 (5.34) の二重和は  $x_k$  を含む場合のみをとり、 $i=k$  と  $j=k$  の場合のみを考えればよい。

$i=k$  のとき二重和  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n$  は  $\sum_{j=k+1}^n$  となる。一方、 $j=k$  の場合には  $i < j=k$  であるから (あるいは図 5.15 を参考にすれば)、 $\sum \sum = \sum_{i=1}^{k-1}$  となることを考えると、式 (5.21) より、

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x_k} &= -\frac{\Gamma_k}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{i \neq k} \Gamma_i \ln r_{ik} \\ &= \Gamma_k \frac{\partial \Psi_k}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (5.35)$$

となる。同様に

$$\frac{\partial H}{\partial y_k} = \Gamma_k \frac{\partial \Psi_k}{\partial y_k} \quad (5.36)$$

が得られる。したがって、式 (5.20) と式 (5.35), (5.36) から

$$\Gamma_k \frac{dX_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_k}, \quad \Gamma_k \frac{dY_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_k} \quad (5.37)$$

上式の関係は質点系の力学においてハミルトンの正準方程式と呼ばれるものに相当し、 $H$  はハミルトン関数である。

この関数  $H$  を用いて、渦糸群の挙動に関する次の一般法則が導かれる。

(i)  $\sum \Gamma_i \neq 0$  ならば、個々の渦糸は相互に位置関係を変えても、渦糸群の重心は動かない。

$$X_c = \sum \Gamma_k X_k / \sum \Gamma_k = \text{一定}, \quad Y_c = \sum \Gamma_k Y_k / \sum \Gamma_k = \text{一定} \quad (5.38)$$

ただし、 $\sum \Gamma_i = 0$  の場合には、このことはいえない。

(ii) 原点まわりの慣性モーメントは不変である。

$$\sum \Gamma_k (X_k^2 + Y_k^2) = \text{一定} \quad (5.39)$$

(iii) 原点まわりの角運動量は不変である。

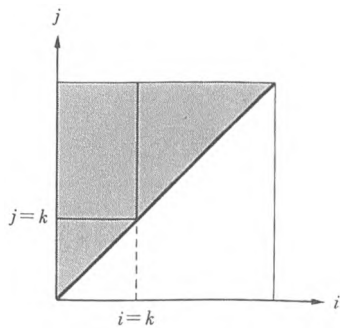


図 5.15 二重和  $\sum_{i < j} \sum$  の計算範囲

$$i=k \text{ のとき } \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \rightarrow \sum_{j=k+1}^n$$

$$j=k \text{ のとき } \sum \sum \rightarrow \sum_{i=1}^{k-1}$$

$$\sum \Gamma_k \left( X_k \frac{dY_k}{dt} - Y_k \frac{dX_k}{dt} \right) = \frac{1}{4\pi} \sum_i \sum_j \Gamma_i \Gamma_j = \text{一定} \quad (5.40)$$

(iv)  $H$  は時間的に不変である.

$$H = \text{一定} \quad (5.41)$$

## 5.8 カルマン渦列

等しい強さ  $\Gamma$  (反時計まわりの方向を正とする) の渦糸が一直線上に等間隔  $a$  で無限に長く並んでいるものとする. この渦糸の並ぶ方向を  $x$  軸とし, 渦糸の一つを原点とすれば, 渦糸列の複素速度ポテンシャル  $W$  は式 (5.25) で表される.

$$W = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \left( \sin \frac{\pi z}{a} \right)$$

このような渦列を間隔  $b$  で二本配列する (図 5.16). ただし, 各渦列の渦の回転方向は逆とする. 第一と第二の渦列の  $x$  軸方向の相対的位置を  $x_0$  とすると, 二本の渦列の作る複素速度ポテンシャルは, 式 (5.25) より

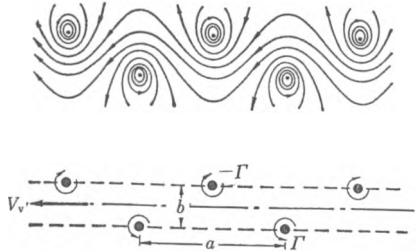


図 5.16 カルマン渦列

$$W = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \left\{ \sin \frac{\pi}{a} \left( z + \frac{ib}{2} \right) \right\} - \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \left\{ \sin \frac{\pi}{a} \left( z - x_0 - \frac{ib}{2} \right) \right\} \quad (5.42)$$

フォン・カルマン (von Karman, 1881—1963, 1911) はこのような二本の渦列の安定性を研究し, 上下の渦列が  $x_0 = a/2$  のように交互に配列し, しかも, 渦の配置が

$$\cosh(\pi b/a) = \sqrt{2} \quad \text{すなわち} \quad b/a = 0.2806 \quad (5.43)$$

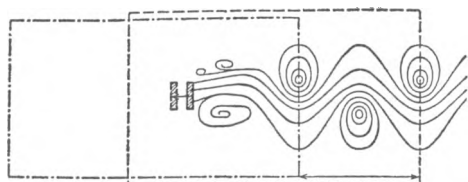
の特別の場合以外は渦列は不安定で, なんらかの外乱を受けるとき配列が崩れてしまうことを理論的に示した. この安定渦列をカルマン渦列 (Karman vortex street) という. このとき, 渦列は全体として静止流体に対し

$$V_v = \frac{\Gamma}{2a} \tanh \frac{\pi b}{a} = \frac{\Gamma}{2\sqrt{2}a} \quad (5.44)$$

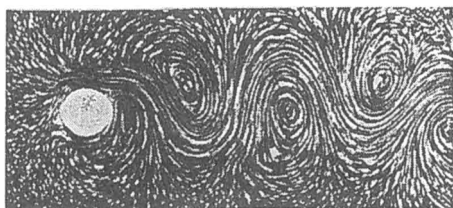
の速度で  $x$  の方向 (下の渦列を図 5.16 のように反時計まわりとすると  $x$  の負の方向) に動くことも導かれる.

静止流体中をある一定の速度  $U$  で鈍い形の物体 (非流線形の物体) を  $x$  の負の

方向に動かすとき（あるいは一様流の中に物体をおくとき），図 5.17 のような規則的な渦列が発生する．よどみ点で物体にぶつかった流線は上下に分かれて壁面に沿って流れるが，壁面での滑りなしの条件のために物体の上面では時計まわりの循環をもつ渦層（下面では反時計まわりの渦層）が生じ，剝離点から流れの中に押し流される．この渦層による不連続面は不安定で自ら巻き込んで物体の背後に渦を形成し，上下交互に下流に流されてカルマン渦列となる．



(a)



(b) (Tietjens, 1960)

図 5.17 鈍い物体よりの渦列の発生

を  $f$  とすれば，これらの間に

$$fa = U - V_v$$

の関係がなければならない．したがって，

$$S = \frac{fd}{U} = \left(1 - \frac{V_v}{U}\right) \frac{d}{a} \quad (5.45)$$

この無次元数  $S$  はストローハル (strouhal) 数と呼ばれ，円柱 (径  $d$ ) の場合普通のレイノルズ数の範囲で  $S$  はほぼ 0.2 という一定値となる．他の物体の場合の  $S$  もこれに近い値であることが知られている．渦が離脱し流体中に放出されるたびに，物体のまわりの循環の方向が変化するのでクッター-ジューコフスキーの定理により物体には流れと垂直の方向に交互に揚力が働く．このため，流れの中の物体や流体中を運動する物体は振動し，これにより音が発生する．この音はギリシャ神話の風の神イオラス (Æolus) にちなみ，イーオーリアン・トーン (Æolian tone) といわれる．風の強い日のピューピューという風の音は，木の小枝や電線がカルマン渦のために振動して発する音である．なお，流れの中の音は渦の運動，境界層の剝離点の移動，乱流 (噴流) 中の組織構造などによっても発生し，物体の振動を伴わない場合もある．

渦列間隔に比べて十分大きい閉曲線で物体をかこみ、この検査領域内の運動量束の変化を考えれば、物体に働く抵抗  $D$  は次のようになる。

$$D = \frac{\rho \Gamma^2 b}{a} (U - 2V_v) + \frac{\rho \Gamma^2}{2\pi a} \quad (5.46)$$

$\Gamma$ ,  $V_v$ ,  $a$  の関係を代入すれば、

$$D = \rho a U^2 \left\{ 0.7936 \frac{V_v}{U} - 0.3141 \left( \frac{V_v}{U} \right)^2 \right\} \quad (5.47)$$

抵抗係数  $C_D$  を  $C_D = D / ((1/2)\rho U^2 d)$  ( $d$ : 物体の幅) で定義すれば、

$$C_D = \frac{2a}{d} \left\{ 0.7936 \frac{V_v}{U} - 0.3141 \left( \frac{V_v}{U} \right)^2 \right\} \quad (5.48)$$

円柱の場合、実験より求められる  $V_v/U = 0.14$ ,  $a/d = 4.3$  の値を上式に代入すると

$$C_D = 0.91 \quad (5.49)$$

となる。この抵抗係数の値は実験値ときわめてよい一致を示す。その他の物体についても理論式はほぼ妥当な値を与える。

カルマン渦による物体の振動：カルマン渦により発生する交番揚力は、しばしば構造物の振動の原因となったり、それに伴う繰返し応力による材料の疲労破壊を引き起こすので注意が必要である。

円柱(直径  $d$ ) の場合には、カルマン渦列の発生はレイノルズ数がほぼ  $Re = Ud/\nu \approx 40$  から始まり、 $Re \approx 200$  くらいまでは物体の背後に明瞭で規則的な渦列の形成が見られる。これらの渦は物体のさらに下流で合体 (merging) してその配列が変化することが知られている。より高いレイノルズ数域では、円柱の後流は乱流となり渦列は不明確となるものの流速変動には強い周期性が見られ、カルマン渦の発生による交番揚力は依然として働く。

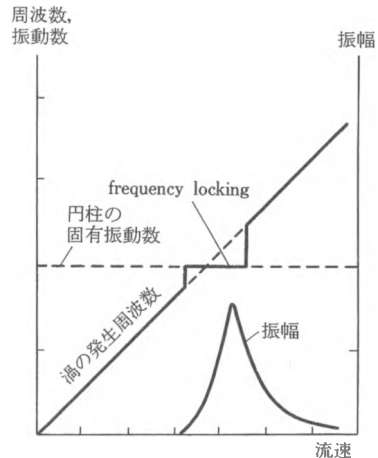


図 5.18 流れの中の弾性支持円柱の振動：(上)流速と渦の発生周波数の変化(ロッキング現象)，(下)カルマン渦による振動揚力との共鳴による円柱の振動振幅

弾性的に支持された円柱などの鈍い物体が軸に垂直に流れを受けて、カルマン渦の発生と共鳴して振動するとき、カルマン渦の発生周期が共鳴点を中心としてある幅で弾性支持物体の固有振動数に引きつけられる現象がある。これを周波数ロック（**frequency locking**）あるいは **synchronization** という。図 5.18 は流速と渦の発生周期および物体の振幅の関係を模式的に示したものである。

なお、流れが円柱などの柱状の弾性体の軸に沿って流れる場合にも、限界流速以上では物体が振動する（たとえば、原子力発電所の炉心の核燃料体など）ので注意が必要である。ついでながら、パイプなどの弾性体では、中を流れる流れによっても振動が発生する。水を勢よく噴出するホースがのたうつことで、私たちは同種の現象を日常経験できる。

（注 5.5）カルマン渦列は実験室規模の現象にとどまらず、海中の島の孤立峰からも発生していることが衛星写真から発見された（「流れの世界」図 6）。

## 5.9 プラウドマン-テイラーの定理

渦ないしは回転流れにおける不思議なおもしろい現象に関する定理を示す。本書では回転流体（この流れは密度成層流とともにきわめておもしろい）は扱わない方針である。しかし、渦に関連してぜひとも紹介したい現象がある。容器に水を満たしこれを水平面内で一定角速度  $\omega = (0, 0, \omega)$  で回転する台の上ののせると、容器内の水全体はやがて台と同じ角速度で回転し、回転系に対して相対的に静止した状態となる。しかし、非回転系から見ると、容器内の水は剛体的回転運動を行っている。

このような運動を行っている流体の内部に生じる緩やかな運動（加速度を無視しうる運動）は、コリオリ力（Coriolis force） $-2\rho\omega \times v'$  と圧力勾配  $\text{grad } p'$  とがつりあっている状態である。すなわち、

$$\frac{\partial p'}{\partial x'} = +2\rho\omega v' \quad (5.50)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial y'} = -2\rho\omega u' \quad (5.51)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial z'} = 0 \quad (5.52)$$

これをベクトル表示すれば、

$$\text{grad } p' = -2\rho\omega \times \mathbf{v}' \quad (5.53)$$

ここに上つき付号' は回転系の座標に関して表した量を意味する。

式 (5.50), (5.51) をそれぞれ  $z$  で偏微分し, 式 (5.52) の関係を用いれば

$$\frac{\partial u'}{\partial z'} = 0, \quad \frac{\partial v'}{\partial z'} = 0 \quad (5.54)$$

また, 式 (5.50), (5.51) をそれぞれ  $y, x$  で偏微分し,  $p$  を消去すれば

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0 \quad (5.55)$$

したがって, 式 (5.55) と連続の方程式から

$$\frac{\partial w'}{\partial z'} = 0 \quad (5.56)$$

結局, 式 (5.54), (5.56) より, “回転系に相対的に生じる緩やかな流体運動は, 高さ方向に一様である” というプラウドマン-テイラーの定理 (Proudman, 1916; Taylor, 理論 1917, 実験 1921, 1923) が導かれる。

インクのカーテン: この定理により生じる現象の実際の例を示そう。たとえば, 一定角速度で回転している台の上のせた容器内の水にインクを一滴二滴落とすとプラウドマン-テイラーの定理により, 一様回転流に重なって起こっている鉛直方向に二次元的な緩やかな流れ (台の回転が不規則だと自然にできる。台の回転が正確な場合は容器内の水を鉛筆などで乱して作る) のために, インクは鉛直な幕状に広がる。しかし, このインクのカーテンも容器の回転を止めると, たちまち容器全体に拡散してしまう。(回転椅子の上にピーカーを載せて回転させれば, 簡単に実験することができるので, 各人で試みよ。)

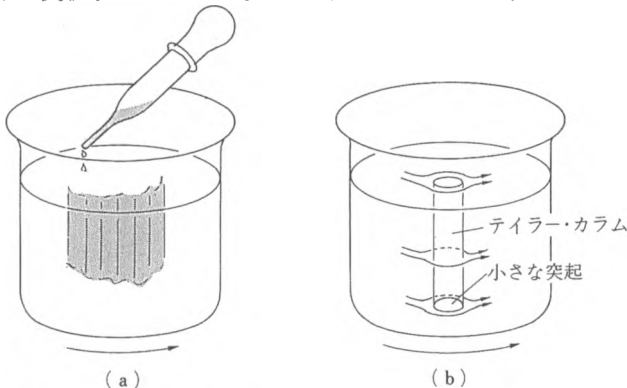


図 5.19 (a) 回転流体中のインクのカーテン, (b) テイラー・カラム

テイラー・カラム：もし、回転台の上の容器の底に小さな低い柱状体や突起物をおき、これをゆっくりと動かすか、あるいは回転速度をほんの少し変えて弱い流れを生じさせると、流れは低い突起を避ける高さ方向に一様な外側の二次元的な流れ（回転系に対する渦なし流れ）と背の低い突起の上に行ける筒状の流れのない部分“virtual solid cylinder”とに分かれる。底面の低い物体の上に形成される二次元的な流体部分をテイラー・カラム (Taylor column, 1923) と呼ぶ。

テイラーが Yih に語ったところによると、容器内に小魚を泳がせたところ、小魚はあたかもそこに固体の円柱があるかのようにテイラー・カラムを避ける行動をとったとのことである。