

14. 乱流におけるレイノルズ応力

14.1 乱流の発生とレイノルズ応力

a. レイノルズの実験

円形断面のパイプの中の流れは、すでに述べたようにハーゲン-ポアズイユの公式によって、流量と圧力勾配・管径・粘性の関係が与えられる。ところで、流量（あるいは断面平均流速、 U ）と圧力勾配（ $\Delta p/l$ ）の関係について種々実験を行う

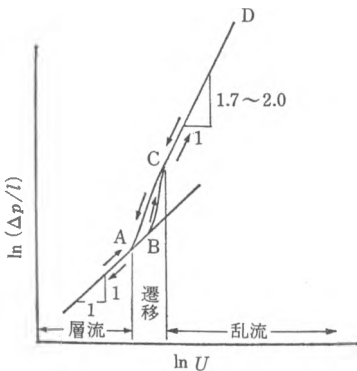


図 14.1 圧力勾配と平均流速

と、圧力勾配が小さく流量が少ない間は、この二つの量の間にはハーゲン-ポアズイユの公式に従う直線関係が成立するけれども、圧力勾配を徐々に上げていき流量を増していくとき急に圧力勾配と流量の関係が変化し水が流れにくくなる（図 14.1）。

この現象に関連して、レイノルズ (Reynolds, 1842—1912 (イギリス)) は次のような実験を行った (1883)。これは、流体力学の歴史の上においてきわめて重要なできごとであった。水槽より横にパイプを引いて静かに水を流し、上流側より注入する色素により水の運動を観察すると、流量が少ない間は色素の糸はきれいに下流に流れるが、流量がある値を超えると急に色素は拡散し管路一杯に広がってしまう（図 14.3(b)、電気火花による瞬間写真は図 14.3(c)）。これは前にあげた、流量と圧力勾配の関係がポアズイユ流れからはずれる状態にほかならない。

実験的にはハーゲン-ポアズイユ流れの成立条件は何一つ破られてはいない。にもかかわらず、ナビエ-ストークス方程式の理論解であるハーゲン-ポアズイユ流れが存在しえないということである。レイノルズはこの限界条件は今日レイノルズ数と呼ばれる無次元数 $Re = Ud/\nu$ (U : 管路流の断面平均流速, d : 管径,

この現象に関連して、レイノルズ (Reynolds, 1842—1912 (イギリス)) は次のような実験を行った (1883)。これは、流体力学の歴史の上においてきわめて重要なできごとであった。水槽より横にパイプを引いて静かに水を流し、上流側より注入する色素により水の運動を観察すると、流量が少ない間は色素の糸はきれいに下流に流れるが、流量がある値を超えると急に色素は拡散し管路一杯に広がってしまう（図 14.3(b)、電気火花による瞬間写真は図 14.3(c)）。これは前にあげた、流量と圧力勾配の関係がポアズイユ流れからはずれる状態にほかならない。

この現象に関連して、レイノルズ (Reynolds, 1842—1912 (イギリス)) は次のような実験を行った (1883)。これは、流体力学の歴史の上においてきわめて重要なできごとであった。水槽より横にパイプを引いて静かに水を流し、上流側より注入する色素により水の運動を観察すると、流量が少ない間は色素の糸はきれいに下流に流れるが、流量がある値を超えると急に色素は拡散し管路一杯に広がってしまう（図 14.3(b)、電気火花による瞬間写真は図 14.3(c)）。これは前にあげた、流量と圧力勾配の関係がポアズイユ流れからはずれる状態にほかならない。

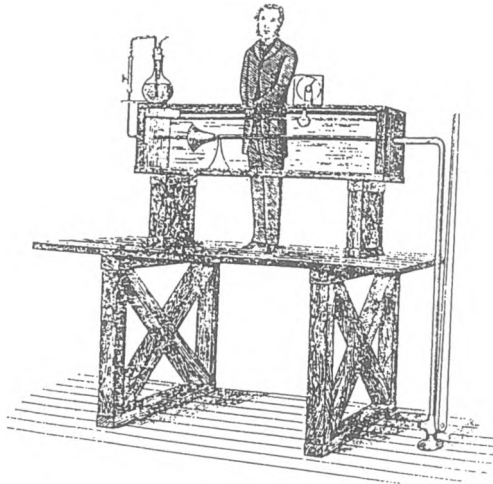


図 14.2

ν : 動粘性係数)がある値(約 2000)を超えることであることを見出した。このレイノルズ数を限界レイノルズ数という。(ちなみに、ここにいう限界レイノルズ数とは流れが乱流状態を維持できる最小レイノルズ数のことであって、レイノルズ

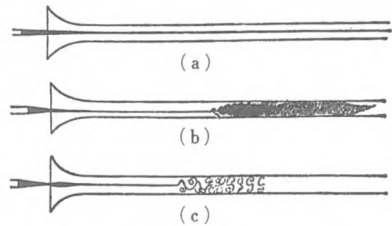


図 14.3

ズ数がこの値を超えると流れが直ちに乱流となるという意味ではない。流れのレイノルズ数が限界レイノルズ数を超えても、特別の注意を払ってまわりからの擾乱を防ぐと、もっと大きなレイノルズ数でも流れは層流でありえる。)レイノルズ数は先にも述べたように、流体粒子に働く慣性力 (Du/Dt) と粘性力 ($\nu \nabla^2 u$) との比である。レイノルズ数がある値を超えるとということは、粘性項に比べ慣性項が重要性を増し、流れの方程式が非線型となることを意味している。時間的に平均された流れに関しては円管内の流れは平行流であって非線型慣性項を欠くが、各瞬間瞬間については何もいえないのであり、つまるところ層流という流れの状態(ハーゲン-ポアズイユ流れ)は N-S (ナビエ-ストークス) 方程式の解の一つにすぎないのである。

レイノルズはさらに、流体粒子が不規則な運動をするこのような流れ——乱流——について、この運動に伴う応力(レイノルズ応力)の発生を N-S 方程式から

導いた。ここでは、まず流体運動のモデルによりこれを導く。

b. レイノルズ応力

流れの混合運動による一観測点での流速の変化から、まず模型的にレイノルズ応力について説明しよう。流体塊が上下に移動し混合する距離が l であり、移動する流体塊の大きさや頻度はある確率分布にしたがい不規則に起こるものとする。壁面から y の高さの点にはしたがって高さ $y+l$ あるいは $y-l$ の点からそれぞれ $u(y+l)$ あるいは $u(y-l)$ の流速をもつ流体塊が飛び込んできて、その瞬間この点の流速は $u(y)$ より

$$u(y \pm l) - u(y) \cong \pm l(du/dy) \quad (14.1)$$

だけ速くなったり遅くなったりする。この点での流速変動の大きさは同じでただ符号と持続時間と変動の発生する時刻は、設定されたモデルの性質上不規則である (図 14.4(a))。いまここで、流体塊の混合距離 l もある確率分布にしたがい不規則であるとすれば、この乱流混合モデルは一層実際の乱流変動に似たものとなる (図 14.4(b))。

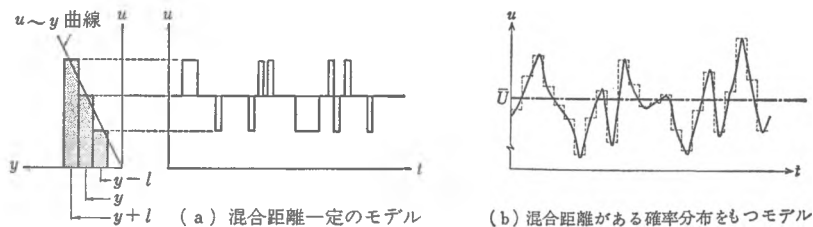


図 14.4

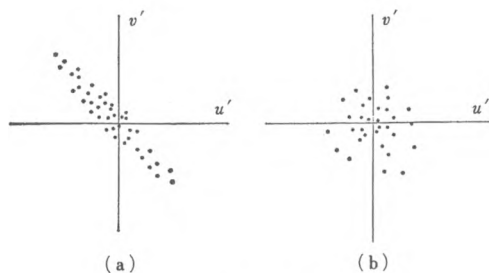


図 14.5

流速の乱流成分 u', v' は不規則に変動し、その平均は 0 であるが、 $u' \times v'$ は全くデタラメ (図 14.5(b)) ではなく、上のモデルからもわかるように統計的には、 $u' > 0$ ならば $v' < 0$ 、 $u' < 0$ ならば $v' > 0$ で $-u' \cdot v'$ の平均は正の

値となる。このことは、乱流境界層の中の流速変動成分を熱線風速計やレーザー流速計 (LDV) などの計器により計測し、同時刻に検知される u' と v' をそれぞれ

x, y 座標としてブラウン管上に標示すれば、それらの点の軌跡が負の傾きをもつ斜めの直線を中心に配列することにより確かめられる (図 14.5(a)).

このような乱流混合により、単位体積あたりの x 方向の運動量が $\rho(u \pm u') = \rho u(y \pm l)$ である流体塊が、 y 軸に直角な単位面積を通過して、単位時間あたりに体積 ($\mp v'$) だけ y 軸の負の方向 (あるいは正の方向) に移動する。その結果、平均的に $E[\rho(u \pm u') \cdot (\mp v')] = E[-\rho u v' - \rho u' v']$ の運動量が y 方向に輸送される。ここに、 v' は流体塊の y 方向への輸送速度であり、 E は統計的平均 (ensemble average) を意味する。したがって、運動量の法則により y 軸に直角な単位面積には、輸送された運動量に等しい応力 τ_{yx} が運動量成分の方向 (x 方向) に作用するものとみなしうる。すなわち、 $E[v'] = 0$ を考慮すれば、

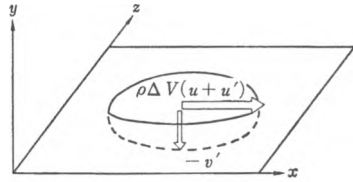


図 14.6

$$\begin{aligned}\tau_{yx} &= -E[\rho(u+u')v'] \\ &= -E[\rho u'v'] \\ &= -\overline{\rho u'v'}\end{aligned}\quad (14.2)$$

このような流れの乱流運動に伴う応力はレイノルズにより導かれた。この応力は、レイノルズ応力 (Reynolds stress) と呼ばれ、乱流現象の理論の基礎をなすものである。上の説明では τ_{yx} 成分のみ導いたが、応力テンソルの他の成分についてもレイノルズ応力が存在し、次のように表示される。

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\overline{\rho u'u'} & -\overline{\rho u'v'} & -\overline{\rho u'w'} \\ -\overline{\rho v'u'} & -\overline{\rho v'v'} & -\overline{\rho v'w'} \\ -\overline{\rho w'u'} & -\overline{\rho w'v'} & -\overline{\rho w'w'} \end{pmatrix}\quad (14.2a)$$

レイノルズ応力の物理的意味を理解しうるよう模型的な導き方をしたが、レイノルズ応力はもちろん次に示すようにナビエ-ストークス方程式からも導きうる。

c. レイノルズ方程式

流速および圧力をその統計的平均、あるいは定常流の場合には乱れの時間スケールに比べて十分長い時間 T に関する平均値、 $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{p}$

$$\bar{u} = E[u(x, t)] \quad \text{または} \quad \bar{u} = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} u \, dt \quad \text{etc.} \quad (14.3)$$

と変動分 u', v', w' との和

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= \bar{u}(\mathbf{x}, t) + u', & v(\mathbf{x}, t) &= \bar{v}(\mathbf{x}, t) + v' \\ w(\mathbf{x}, t) &= \bar{w}(\mathbf{x}, t) + w', & p(\mathbf{x}, t) &= \bar{p}(\mathbf{x}, t) + p' \end{aligned} \quad (14.4)$$

として表せば、ナビエ-ストークスの運動方程式は流速と圧力をそれらの平均値でおき換えたものにレイノルズ応力項を加えたもの書き直される。

$$\left. \begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) \\ & \quad = \rho F_x - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \nabla^2 \bar{u} - \rho \left(\frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \right) \\ & \rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) \\ & \quad = \rho F_y - \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \mu \nabla^2 \bar{v} - \rho \left(\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} \right) \\ & \rho \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) \\ & \quad = \rho F_z - \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \mu \nabla^2 \bar{w} - \rho \left(\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \quad (14.5)$$

これはレイノルズにより導かれた式で、レイノルズの方程式と呼ばれる。

14.2 レイノルズ応力に関する仮説

レイノルズの方程式 (14.5) を解くためには、レイノルズ応力を具体的に表す関係式が必要である。最も単純な考え方は、レイノルズ応力を流れの平均流速分布と関連づけるものである。これらの仮説により、円管内の流れ、平板上の流れ、噴流や後流などさまざまな基本的な流れの平均流速分布が理論的に求められる。

a. ブシネスクの渦動粘性係数

乱流運動による運動量の輸送効果を、分子運動による粘性効果の表示 $\tau = \rho \nu \frac{d\bar{u}}{dy}$ になぞらえて、ブシネスク (1897) はレイノルズ応力を

$$-\overline{\rho u'v'} = \rho \epsilon \frac{d\bar{u}}{dy} \quad (14.6)$$

と表現した。 ϵ は分子運動による分子動粘性係数 (kinematic molecular viscosity) $\nu (= \mu/\rho)$ に対応する渦動効果を表すもので、渦動粘性係数 (kinematic eddy viscosity) と呼ばれる。 ν と異なり ϵ は流体の性質では定まらず、流体運動の場所の関数である。

渦動粘性係数 ϵ は分子動粘性係数 ν と同じく [長さ] × [速度] の次元をもつ。

乱流による混合や輸送は、主として大きなスケールの渦によって行われるから、乱流場を代表する長さ (l_e) と速度 (U_e) を用いて、 ϵ を

$$\epsilon = kl_e U_e \quad (14.6a)$$

と表すことができる。この考えはプラントルに始まる (§ 17.1. b 参照)。

b. プラントルの混合距離理論

図 14.4 による模型的説明にも示されたように (式 (14.1)), ある点に生じる流速 u の変動分 u' は流体粒子の移動距離 l_1 と、その間の平均速度の勾配 $d\bar{u}/dy$ に比例する。 v' も同じように平均速度勾配に比例すると考えられる。

$$u' \sim l_1 \frac{d\bar{u}}{dy}, \quad v' \sim l_2 \frac{d\bar{u}}{dy} \quad (14.7)$$

したがって、 $\sqrt{\alpha l_1 l_2}$ ($\alpha : u'v'$ の相関係数) をあらためて l と定義すれば、レイノルズ応力 $-\overline{\rho u'v'}$ および渦動粘性係数 ϵ は次のように表される。

$$-\overline{\rho u'v'} = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \frac{d\bar{u}}{dy} \quad (14.8)$$

$$\epsilon = l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \quad (14.9)$$

上式の右辺の絶対値記号は $\tau = -\overline{\rho u'v'}$ の符号と $d\bar{u}/dy$ の符号が一致するように考慮したためである。上式はプラントル (1925) の混合距離の仮説 (mixing length hypothesis) あるいは理論と呼ばれ、 l を混合距離という。

壁面近くの乱流運動は、壁面により束縛されるから混合距離 l は y に比例すると考えられる (プラントル, 1933)。

$$l = \kappa y \quad (14.10)$$

したがって、式 (14.8) は次のように表される。

$$-\overline{\rho u'v'} = \rho \kappa^2 y^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \frac{d\bar{u}}{dy} \quad (14.11)$$

このモデルは次章以下に述べるように乱流の流速分布則をよく説明する。

c. カルマンの力学的相似の仮説

管路流の乱流流速分布が、壁面の粗滑やレイノルズ数に関係なく一つの相似則 (速度欠損則) にしたがうことから、カルマン (1930) は“各点での乱流混合の機構は、時間と長さのスケールが異なるにすぎず、相似である。”と考えた

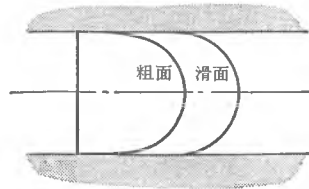


図 14.7

(力学的相似の仮説). したがって, 混合距離 l はその点の近くの平均速度分布の状態, すなわち速度の変化率 ($d\bar{u}/dy$, $d^2\bar{u}/dy^2$, ...) に関係する. これらから作られる長さの次元をもつ最も簡単な関数関係として

$$l = \kappa \left| \frac{d\bar{u}/dy}{d^2\bar{u}/dy^2} \right| \quad (14.12)$$

を得る. よって, レイノルズ応力式 (14.8) は次のように表される.

$$-\overline{\rho u'v'} = \rho \kappa^2 \frac{(d\bar{u}/dy)^4}{(d^2\bar{u}/dy^2)^2} \quad (14.13)$$

式 (14.10), (14.12) の κ をカルマン定数 (Karman constant) と呼ぶ.

d. 乱れのエネルギー方程式に基づく方法

最近になり, 乱流構造の研究解明がすすむにつれて (第21章), 混合距離モデルと実際の乱流運動の相違から, 混合距離理論の論拠についていくぶんの批判がある. しかし, この理論から導かれる流速分布は実験結果をよく説明するので, 別の理論的根拠でこれと同じ式を導くことが提案されている.

乱れの運動エネルギー方程式は, 境界層近似の程度で次のように書かれる.

$$\bar{u} \frac{\partial(\bar{q}^2/2)}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial(\bar{q}^2/2)}{\partial y} + \overline{u'v'} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} \overline{q^2 v} + \overline{p v} \right) + \varepsilon' = 0 \quad (14.14)$$

ここに, $\varepsilon' = -\nu [\overline{u'\nabla^2 u'} + \overline{v'\nabla^2 v'} + \overline{w'\nabla^2 w'}]$ は熱に変換される局所的乱れエネルギー ε にほぼ等しい (この ε は前項の渦動粘性係数 ε とは定義が異なるので注意). 流れのほぼ全域で乱れのエネルギー生産とエネルギー消散の間には局所的な平衡が成立しており, 乱れのエネルギー方程式は次のようになる.

$$-\overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \varepsilon \quad (14.15)$$

局所的な運動は速度のスケール $(\bar{q}^2)^{1/2} = (\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)^{1/2}$ と長さのスケール L_ε で

$$\varepsilon = (\bar{q}^2)^{3/2} L_\varepsilon^{-1}, \quad |-\overline{u'v'}| = a_1 \bar{q}^2 \quad (14.16)$$

と表される. 式 (14.16) を式 (14.15) に代入すれば,

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = (a_1^{3/2} L_\varepsilon)^{-1} (-\overline{u'v'})^{1/2} \quad (14.17)$$

ここで

$$l = a_1^{3/2} L_\varepsilon \quad (14.18)$$

とおけば, 式 (14.17) は混合距離理論の結果 (式 (14.8)) と一致する.