

## 2. ベルヌーイの定理および運動量保存則とその応用

### 2.1 ベルヌーイの定理（エネルギー保存則）

質点の力学におけるエネルギー保存則に相当する、流体力学におけるエネルギー保存則がベルヌーイの定理である。完全流体に対するオイラーの運動方程式（や粘性流体に関するナビエ-ストークスの方程式）は局所局所での力のバランスを表した基礎法則であるが、個々の問題についてはそれぞれの場合の条件を考慮してそのつど方程式の解を求めて初めて理論的結果がわかる。つまり、いちいち方程式を解かなければオイラーの基礎式からは何もわからない。これに反して、本章で述べるベルヌーイの定理はオイラーの運動方程式の第一積分であり、これを直接適用してさまざまな流れの場の状態を知ることができる。

ベルヌーイの定理は次のような特徴・利点をもっている。

- (i) 式形が簡単で覚えやすく、
- (ii) 物理的意味が明解であり、かつ
- (iii) 応用性が広い。

ベルヌーイの定理は、18世紀の流体力学の揺籃時代に“Hydrodynamica” (1738) を著し、流れのエネルギー的考察を行ったスイスの数学者ダニエル・ベルヌーイ (Daniel Bernoulli, 1700—1782) にちなんで名づけられたものである (基礎方程式からこの定理を導くことは、のちにオイラーにより行われた)。この定理がその単純さにもかかわらず、多くの流体现象の証明や説明と理解にはたす役割は非常に大きい。

ベルヌーイの定理は普通、流管内の流れに原理的にエネルギー保存則を適用して、直接的に導かれる。また、その方が導き方を理解しやすいであろう。しかし、ここでは、流体運動の基礎方程式であるオイラーの運動方程式から数学的に導いてみよう。わざわざめんどろな数学的方法でベルヌーイの定理を導くのは、基礎方程式から厳密に一つの定理を導くときの満足感を知ってもらいたいのと、いま

一つは普通はあまり重視されないベルヌーイの定理の成立条件をはっきりと示したいからである。次に詳しく述べるように、ベルヌーイの定理には二つの式形があり、その適用に対してそれぞれ制約がつく。

まず、最初にベルヌーイの定理を示そう。「流れが渦なしであろうが、渦ありであろうが、完全流体中の一本の流線 (s) に沿って、次の各項の和は一定である。」

$$\frac{1}{2}q^2 + \frac{p}{\rho} + gz = \text{const}(s) \quad (2.1)$$

$\uparrow$  運動エネルギー       $\uparrow$  圧力のエネルギー       $\uparrow$  位置のエネルギー

ここに、 $q^2/2$ : 単位質量あたりの運動エネルギー、 $p/\rho$ : 単位質量あたりの圧力のエネルギー、 $gz$ : 単位質量あたりの位置のエネルギー。式 (2.1) の各項を  $g$  で割った単位重量あたりのエネルギーは長さの次元をもち、水頭 (head) と呼ばれる。 $v^2/2g$  は速度水頭といわれる。

質点の力学におけるエネルギー保存則では運動エネルギー ( $mv^2/2$ ;  $m$ : 質量,  $v$ : 速度) と位置のエネルギー ( $mgh$ ;  $h$ : 高さ) の和が一定であるが、流体力学の場合には新たに圧力 ( $p/\rho$ ) がエネルギー式に加わっている。流体力学における圧力は応力であると同時に、エネルギー的でもあり、次に述べるように運動量的でもあるという特殊な役割を演じる。

流体のエネルギー式に圧力を考慮しなければならないことは、水を満たした水槽中の水塊のエネルギーを考えれば明らかである。ある基準面から鉛直上方に測る位置のエネルギーは浅い所の水塊よりもより深い所の水塊の方が小さい。しかし、(水塊に働く浮力と重力はつりあっているから) 力を加えずに、つまり外から仕事をするとなしに、(平衡状態のまま) 二つの水塊を入れ換えることができる。(厳密に考えると水塊の加速と減速の仕事が必要であるが、これは打ち消し合う。) したがって、この二つの水塊のエネルギーは相等しい。とすれば、深

表 2.1 質点系と流体系の対応

質点系		流体系
エネルギー保存則	↔	ベルヌーイの定理
運動量保存則	↔	flow force
角運動量保存則	↔	渦定理 (渦度保存則)

い所の水塊は失った位置のエネルギーを別の形 (水圧という形) に変換したと考えるべきである。非圧縮性流体では理屈の上では圧力による体積変化の形でエネルギーを蓄えるわ

けではないが、水圧という形でエネルギーを蓄えているとみてよいであろう。

この場合は、あるいは、水塊に働いている浮力に抗してこの水塊を移動させるために重力がなした仕事が、位置のエネルギーの差すなわち静水圧の差となると考えてもよいであろう (p. 63, 64 参照)。

### a. 運動方程式の積分によるベルヌーイの定理の導入

流速の二乗を

$$q^2 = u^2 + v^2 + w^2 \quad (2.2)$$

と書き、これに 1/2 を掛けて  $x, y, z$  で偏微分する。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} q^2 \right) = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.3 a)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2} q^2 \right) = u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.3 b)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{2} q^2 \right) = u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial v}{\partial z} + w \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.3 c)$$

これらの式の右辺の  $\sim$  を付した項は、運動方程式の加速度項にも現れる項である。そこで、上式を運動方程式の左辺の移流加速度項から差し引いて変形を行う。たとえば、運動方程式の第一式は

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} q^2 \right) = v \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + w \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (2.4)$$

となる。上式の右辺に式 (1.32) の渦度の表示を代入すれば、

$$= w\eta - v\zeta \quad (2.5 a)$$

と変形される。同様に、運動方程式の第二式、および第三式の移流加速度項は次のようになる。

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2} q^2 \right) = (u\zeta - w\xi) \quad (2.5 b)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{2} q^2 \right) = (v\xi - u\eta) \quad (2.5 c)$$

結局、運動方程式の両辺からそれぞれ  $\partial(q^2/2)/\partial x$ ,  $\partial(q^2/2)/\partial y$ ,  $\partial(q^2/2)/\partial z$  を差し引くと、左辺は局所的加速度項  $(\partial v/\partial t)$  と上の諸式の右辺となるので、

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (v\zeta - w\eta) = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} q^2 \right) \quad (2.6 a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - (w\xi - u\zeta) = F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2} q^2 \right) \quad (2.6 b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} - (u\eta - v\xi) = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{2} q^2 \right) \quad (2.6c)$$

となる。上式の左辺の第二項は、§ 1.5 の式 (1.35) に示したベクトル積の定義より、速度ベクトル  $\mathbf{v}$  と渦度ベクトル  $\boldsymbol{\omega}$  のベクトル積  $\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$  の  $x, y, z$  成分となっている。

$$\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u & v & w \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} = (v\zeta - w\eta)\mathbf{i} + (w\xi - u\zeta)\mathbf{j} + (u\eta - v\xi)\mathbf{k} \quad (2.7)$$

したがって、上式 (2.6) はベクトル表示により

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p - \text{grad} \left( \frac{1}{2} q^2 \right) \quad (2.8)$$

ここに  $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ 。もし、外力  $\mathbf{F}$  がポテンシャル  $\Pi$  をもち、流体が圧力で密度  $\rho$  の決まるバルトロピー流体であれば、

$$\text{grad} \left( \frac{1}{2} q^2 + P + \Pi \right) = - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} \quad (2.9)$$

と書ける。ここに、

$$\mathbf{F} = - \text{grad } \Pi \quad (2.10)$$

$$P = \int \frac{dp}{\rho(p)} \quad (2.11)$$

さて、式 (2.8) または式 (2.9) から  $\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$  の項が消える場合が二通りある。一つはいうまでもなく  $\boldsymbol{\omega} \equiv 0$ 、つまり流れ場が“渦なし”の場合である。いま一つは、上式のベクトル  $\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$  と直交する方向成分を考える場合である。それぞれの場合のベルヌーイの定理について次に述べる。

#### 流線上で成立するベルヌーイの定理——ベルヌーイの定理 I——

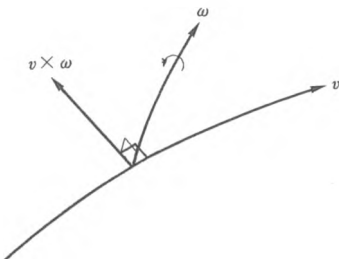


図 2.1 ベクトル  $\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$  と直交するベクトル

ベクトル積  $\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$  は二つのベクトル  $\mathbf{v}$  および  $\boldsymbol{\omega}$  に直交する方向のベクトルであるから、 $\mathbf{v}$  (あるいは  $\boldsymbol{\omega}$ ) はこのベクトル  $\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$  と直交する ( $\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{v}$  (流線) および  $\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} \perp \boldsymbol{\omega}$ )。ベクトル  $\mathbf{v}$  を連ねた線、つまり一本の流線 ( $s$ ) (あるいは  $\boldsymbol{\omega}$  をつないだ渦線) に沿って考えると、その流線方向 (あるいは渦線方向) の成分は零である (図 2.1)。

$$(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega})_s = 0 \quad (\mathbf{v} \text{ 上; 一本の流線 } s \text{ 上})$$

したがって、外力が保存力でポテンシャル  $\Pi$  をもち、かつ流れが定常であれば、流れが“渦なし”，“渦あり”を問わず一本の流線 ( $s$ ) について

$$\text{grad} \left( \frac{1}{2} q^2 + \int \frac{dp}{\rho(p)} + \Pi \right) = 0 \quad (2.12)$$

あるいは、流線  $s$  に沿って積分して

$$\frac{1}{2} q^2 + \int \frac{dp}{\rho} + \Pi = \text{const}(s) \quad (2.13)$$

を得る。ここに、定数  $\text{const}(s)$  は流線ごとに異なる値でありうる。

一本の渦線上のすべての流線の作る曲面上（あるいは一本の流線上のすべての渦線の作る曲面上）ではベルヌーイ和（式 (2.13) の右辺）は一定であり、この面をベルヌーイ面と呼ぶ。

非圧縮性の完全流体では、 $\Pi = gz$  とおいて、式 (2.13) は

$$\frac{1}{2} q^2 + \frac{p}{\rho} + gz = \text{const}(s) \quad (2.14)$$

となる。

#### エネルギー原理からのベルヌーイの定理の誘導

粘性のない流体の定常な流れの中に細い流管を考える。流れの中に小さな閉曲線をとるとき、この閉曲線上の各点を通る流線群により作られる管を流管という。したがって、流管を横切る流線は存在しない。

いま、流管の一部を切り取りその両端の面を断面 I および II とする。その断面積を  $A_1, A_2$ 、そこでの流速および圧力をそれぞれ  $v_1, v_2$  および  $p_1, p_2$  とする。微小時間  $\delta t$  後にこれらの断面はそれぞれ  $v_1 \delta t$  および  $v_2 \delta t$  だけ流れの方向に移動し、断面 I', II' となる。この間に断面 I, II に働く圧力のなす仕事は、(圧力) × (断面積) × (距離) であるから、連続の条件 ( $Q = A_1 v_1 = A_2 v_2$ ) を考慮して

$$\begin{aligned} \text{圧力のなす仕事} &= (p_1 A_1 v_1 - p_2 A_2 v_2) \delta t \\ &= (p_1 - p_2) Q \delta t \end{aligned} \quad (2.15)$$

である。

一方、この間に流管部分の運動エネルギーと位置エネルギーの増加は、断面 I' と II' の間の部分が移動の前後で共通であることから、流管 I-I' および II-II' の部分について考えて

$$\text{運動エネルギーの増加} = (\rho A_2 v_2 \delta t) \frac{v_2^2}{2} - (\rho A_1 v_1 \delta t) \frac{v_1^2}{2}$$

$$= \rho \left( \frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} \right) Q \delta t \quad (2.16)$$

および

$$\begin{aligned} \text{位置エネルギーの増加} &= \rho(A_2 v_2 \delta t) g z_2 - \rho(A_1 v_1 \delta t) g z_1 \\ &= \rho g (z_2 - z_1) Q \delta t \end{aligned} \quad (2.17)$$

したがって、エネルギーの増加を圧力のなした仕事に等しいとおけば

$$\rho \left( \frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} \right) + \rho g (z_2 - z_1) = p_1 - p_2 \quad (2.18)$$

となる。両辺を  $\rho$  で割り単位質量当たりのエネルギーで表現し整理すれば、オイラーの方程式の第一積分としてすでに導いたベルヌーイの定理となる。

$$\frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = E \quad (\text{一定})$$

非定常流れにおける流線に沿うエネルギー保存則

流線座標系による運動方程式 (1.17) の第一式を書き直せば、非定常流の場合の“渦あり流れ”の流線に沿うエネルギー関係式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right) = - \frac{\partial v_s}{\partial t} \quad (2.19)$$

ここで、流れが定常ならば、通常のベルヌーイの定理は上式の流線方向  $s$  に関する積分から直ちに導かれる。

### b. 圧力方程式——ベルヌーイの定理 II ——

もし、流れが渦なし ( $\omega=0$ ) ならば、速度ポテンシャル  $\Phi$  が存在し (§ 1.6. e および § 3.2. c 参照)、 $v$  は

$$v = \text{grad } \Phi \quad (2.20)$$

と表されるから、式 (2.8) は

$$F = \text{grad} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} q^2 + P \right) \quad (2.21)$$

となる。上式 (2.21) は「流れが渦なし」の場合 (渦なしであるため) には、外力  $F$  もまたポテンシャル  $\Pi$  (式 (2.10)) より導かれなければならない」ことを

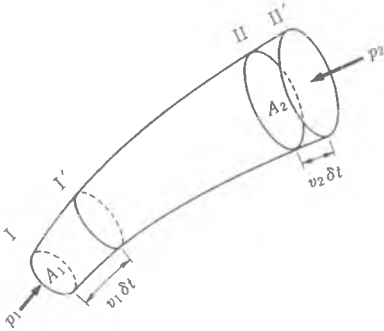


図 2.2

示している。したがって、

$$\text{grad} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} q^2 + P + \Pi \right) = 0 \quad (2.22)$$

式 (2.22) を積分すれば次式となる。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} q^2 + \int \frac{dp}{\rho} + \Pi = F(t) \quad (2.23)$$

ここに、 $F(t)$  は時間の任意関数である。関数  $F(t)$  は  $\Phi(x, y, z; t)$  に含めて取り扱うこともできる。

それゆえ、圧力は上式から次のように表せる。

$$\int \frac{dp}{\rho} = F(t) - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} q^2 + \Pi \right) \quad (2.23 a)$$

$\rho$  が一定の非圧縮性流体の場合には上式は次のようになる。

$$\frac{p}{\rho} = F(t) - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} q^2 + \Pi \right) \quad (2.24)$$

式 (2.23), (2.24) は流れ場の圧力を求めるのに用いられるので**圧力方程式**と呼ばれる。この関係式は、流れが非定常であっても渦なしであれば、流れの場合全体に成立する。それゆえ、**一般化されたベルヌーイの定理**と呼ばれることもある。

### c. 二つのベルヌーイの定理の比較と注意

式 (2.14) の関係は、完全流体の定常流の各流線に沿って成立し、流れが渦なしであることを要しない。これが普通にいうベルヌーイ (D. Bernoulli, 1700—1783) の**定理**である。この定理は“定常な流れの、一本の流線上で”成立するという条件はあるものの、“流れが渦あり”でも成立し、この点で式 (2.23), (2.24) よりもむしろ適用範囲が広いとみることができる。

これに反し、式 (2.23) または式 (2.24) の関係 (圧力方程式 あるいは 一般化されたベルヌーイの定理) は非定常流でもまた流線以外の流れ場全体に成立するが、流れ場が“流れが渦なし”であることを要求している。

“流れが非定常であっても、流れの場合全体”という条件は、式 (2.14) のベルヌーイの定理の“定常流の一本の流線上で”という成立条件を緩和したようにも見える。しかし、式 (2.23) または式 (2.24) には“流れが渦なし”であるという強い制約があるので、この「一般化された」という名称は必ずしも適当でない。

圧力のエネルギー  $p/\rho$  とは何だろうか

(i) **運動圧** ベルヌーイの定理における圧力項  $p$  を工学的には静圧 (static

表 2.2 ベルヌーイの定理と圧力方程式の成立条件の比較(1)

	ベルヌーイの定理 式(2.14)	圧力方程式 式(2.23)
i) 流体	完全流体	完全流体
ii) 定常・非定常	定常	定常 / 非定常
iii) 渦度	渦ありでもよい	渦なし
iv) 適用場	流線上	流体の場全体

表 2.3 ベルヌーイの定理の成立条件の比較(2)

	$\omega=0$ (渦なし)	$\omega \neq 0$ (渦あり)
定常 ( $\partial/\partial t=0$ )	式(2.23) ↓ 圧力方程式 ↓ (流れ場全体)	式(2.14): ベルヌーイの定理 (流線上で)
非定常 ( $\partial/\partial t \neq 0$ )		

pressure) と呼んでいる。しかし、これは間違った理解を与える。この項を静水圧 (hydrostatic pressure または gravitational pressure) に相当する成分  $p_{hs} = \rho g(h-z)$  ( $h$ : 水面の高さ) とそれとの差の成分  $p^*$

$$p^* = p - p_{hs} \quad (2.25)$$

とに分離し、流体の運動に関連する項  $p^*$  は、たとえば運動圧 (motion pressure) と称すべきものである (Prandtl and Tiejens, 1934, p. 121)。したがって、ベルヌーイの定理は、自由表面をもつ非圧縮性流体の定常流 (もしくは渦なし流れ) の場合には、

$$\frac{p^*}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \text{const} \quad (2.26)$$

と記される。

(ii) 定常非圧縮性流れのベルヌーイの定理 (式(2.14)) は、単位質量あたりの運動エネルギー  $q^2/2$  と位置のエネルギー  $gz$  と圧力項  $p/\rho$  の和が一定であることを述べており、すでに記したように流体力学におけるエネルギー保存則と呼ばれる。これより、圧力項  $p/\rho$  を第三のエネルギーと考えることができる。事実、この項は“圧力のエネルギー”ないしは  $p/\rho g$  の形にして“圧力水頭 (pressure head)”と呼ばれ、「 $p/\rho$  は圧力によって貯えられたエネルギーと解釈される」としたり、「 $\int dp/\rho$  は圧力のポテンシャル・エネルギーと考えることができる」

と表現されたりする。

しかし、圧力項  $p/\rho$  は流体のもつ実質的エネルギーではなく、またそれ自身で仕事をなしうる能力という意味でのエネルギーではない。仕事をなしうるのは圧力差が存在する場合である。この意味で圧力は一種の紛い物（まがいもの）のエネルギー（fictitious energy : Batchelor, 1967）といえる。

このことは、流管を通る流れに原理的にエネルギー保存則を適用してベルヌーイの定理を導く過程を考えれば、圧力項は外力のなす仕事として取り扱われており明らかである。あるいは、流線座標系で表した流線方向 ( $s$ ) の運動方程式 (1.16) は、定常流に対しては  $-\partial p/\partial s = \partial/\partial s(v^2/2 + gz)$  となる。上式は「単位質量あたり流れの運動エネルギーと位置のエネルギーの和の流線に沿う変化は、圧力勾配が流体になす仕事に等しい、あるいは流体が圧力勾配に抗して運動し失うエネルギーに等しい」ことを意味している。

たとえば、水を密閉した大きな容器に小さなシリンダーとピストンを取り付けて、ピストンに力を加えるとこの容器内の圧力を変えることができる。しかし、水は非圧縮流体であるからピストンはそのために仕事はしていない。外からの仕事なしに容器内の流体のエネルギー（圧力）が増えるということはおかしい。容器に水の流出口を設け、ここから水が流出する場合には、ピストンは減った水量に応じて仕事をし続けなければならない (Rouse, 1946)。

また、次のように考えてみよう。水をいっぱいにした水槽の下部の小孔から水平に水を噴出させる。噴出水のもっているエネルギーは（この高さを基準にすれば）運動エネルギーのみで、単位時間あたりの流出エネルギーは  $(\rho a'v)v^2/2$  ( $a'$ : 噴流の断面積) である。水槽内の水位変化を  $(-dz)$  とすれば、連続の関係から  $\int_0^t \rho a'v(v^2/2)dt = \int \rho A \left( \frac{2gz}{2} \right) dz$  である。これは水槽の水の失った位置エネルギー  $\int_z^h \rho g z A dz = \frac{\rho A g}{2} (h^2 - z^2)$  にほかならない。圧力のエネルギーの一部は消えてしまった。

ついでながら、後に述べる第6章で波のエネルギーとして位置のエネルギーと運動エネルギーが導かれる。しかし、“圧力のエネルギー”を求めないのは、それが線型近似の範囲で零となるためではなく、実質的エネルギーでないためである。

### 2.2 ベルヌーイの定理の応用

#### a. トリチェリーの定理

図 2.3 のように、水を満たした水槽の壁から流出する水流を考える。流出口 B を通る流線をさかのぼれば、必ず水面のある一点 A に達する。この流線 AB 上でベルヌーイの定理を適用する。添字 A, B でこれらの点の圧力  $p$ 、流速  $v$  およびある基準面からの高さ  $z$  を区別すれば

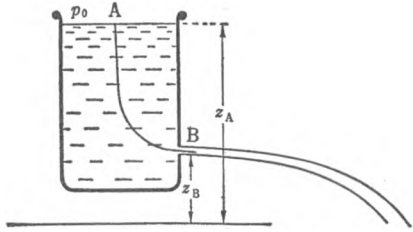


図 2.3 水槽からの流出

$$\frac{1}{2}v_A^2 + \frac{p_A}{\rho} + gz_A = \frac{1}{2}v_B^2 + \frac{p_B}{\rho} + gz_B$$

である。流出口の大きさに比べて水槽の面積が十分大きいとすれば、連続の条件から  $v_B \gg v_A \approx 0$  である。また、 $p_A$  も  $p_B$  も大気圧  $p_{atm}$  に等しい。したがって

$$v_B = \sqrt{2g(z_A - z_B)} = \sqrt{2gh} \tag{2.27}$$

ここに、 $h = z_A - z_B$  である。これをトリチェリー (Torricelli, 1643) の定理という。

ベナ・コントラクタ：トリチェリーの定理は、噴流の流速が  $v = \sqrt{2gh}$  であることを述べているのであって、これから噴出流量を求めるには噴流の縮脈を考えなくてはならない。水槽からの噴流の表面は曲率をもって流出口から流出し、ある

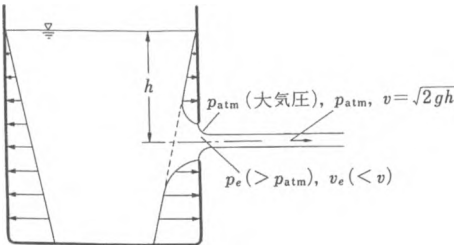


図 2.4 トリチェリーの定理と噴流口付近の水脈形状および圧力分布

距離とび出した所から幅ないしは断面が一様な流れとなる。トリチェリーの定理で与えられる噴出流速は、噴流幅が一定となって断面内の圧力がすべて大気圧  $p_{atm}$  に等しかった断面 ( $a'$ ; ベナ・コントラクタ (vena contracta)) 内での値である。したがって、噴出流量は  $a' \sqrt{2gh}$  であ

る。噴流が曲率をもって曲がっている流出口近傍では、噴流の流線を曲げるための求心力が必要である。このためには、噴流内部の圧力  $p_e$  は噴流表面に働く大気圧  $p_{atm}$  より大きくなければならない ( $p_e > p_{atm}$ )。したがって、ベルヌーイの

定理により流出口近傍の噴流内部の流速  $v_0$  はトリチェリーの定理の与える値よりも小さい (図 2.4).

**縮脈係数:** 水槽の垂直壁に働く水の圧力は, 流出口と反対側の壁面上では噴流の影響はなく静水圧分布である. 流出口のある側の垂直壁面上では, 流出口の面積 ( $a$ ) 分の静水圧 ( $\rho gha$ ) が欠けているだけではなく, 流出口近傍の壁面上の流速を無視しえないから, ベルヌーイの定理によりその分静水圧より壁面圧力は少なくなる. その水圧の欠損分 ( $\rho gh\delta a$ ) も加えると両方の水槽の壁に働く水圧は流出口と反対側の壁面上で  $\rho gh(a+\delta a)$  だけ大きい (図 2.4).

噴流が一様になった所での運動量は, 単位時間あたりの流出量 ( $a'v$ )  $\times$  密度 ( $\rho$ )  $\times$  速度 ( $v$ ) より,  $\rho v^2 a' = 2\rho gha'$  で運動量保存則よりこれが水槽の壁面に働く水圧差  $\rho gh(a+\delta a)$  に等しい.

$$\rho gh(a+\delta a) = 2\rho gha' \quad (2.28)$$

したがって, 両辺を  $a'$  で割って

$$a/a' + \delta a/a' = 2 \quad (2.29)$$

すなわち,  $0 \leq \delta a, a \geq a'$  より  $1 \leq a/a' \leq 2$  である. したがって, 縮脈係数  $k = a'/a$  は

$$\frac{1}{2} \leq k \leq 1 \quad (2.30)$$

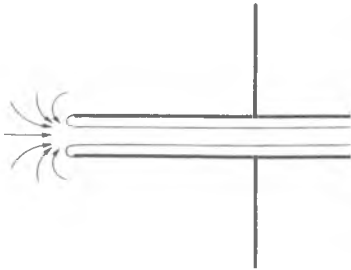


図 2.5 ボルダの流出口

図 2.4 のように垂直な壁に直に開けられた流出口の場合には, 後章 (§ 4.9, 式 (4.147)) に述べる自由流線の理論から,

$$k = \pi / (\pi + 2) = 0.611$$

となる.

**ボルダの流出口:** 水槽の壁から管を水槽内部に深く差し込んだのがボルダ (Borda)

の流出口である (図 2.5). この場合には流出口側の壁面上の圧力分布も噴流の影響を受けないから, 上式において  $\delta a = 0$  である. したがって

$$k = \frac{1}{2} \quad (2.31)$$

### b. ピトー管

流れの中に前面が丸みをおびた物体をおくと, 流れは物体の前面のある点 (よどみ点) でせき止められて, そこから両側に分かれる. この流速が 0 となるよど

み点を通る流線にベルヌーイの定理を適用すると、高さの差を無視して

$$p_{\infty} + \frac{1}{2} \rho v_{\infty}^2 = p_0$$

となる。ここに、添字 $\infty$ は物体の影響のない点での値を意味する。上式は、よどみ点では圧力が  $(1/2)\rho v_{\infty}^2$  だけ増加することを示している。この圧力の増加分を動圧 (dynamic pressure) といい、 $p_{\infty}$  を静圧 (static pressure)、静圧と動圧の和  $p_0$  を総圧 (total pressure) と呼ぶ。

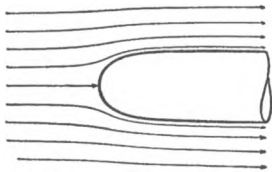


図 2.6 丸みをおびた物体まわりの流れ

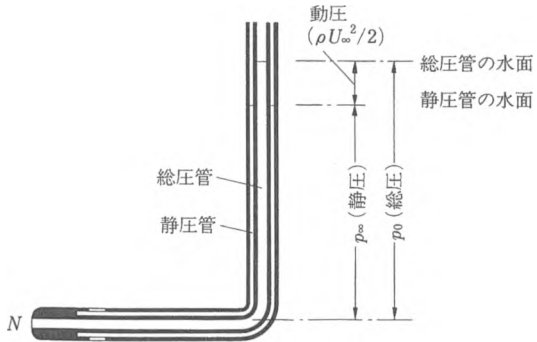


図 2.7 ピトー管

図 2.7 のような管を先端の孔を流れの方向に向けておけば、先端の孔によって総圧  $p_0$  が、管の側面にあけた孔によって静圧  $p_{\infty}$  が測られる。この二つの管の圧力差から次式

$$v_{\infty} = \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_0 - p_{\infty})} \tag{2.32}$$

により、流れの速度  $v_{\infty}$  を測ることができる。この流速測定管をピトー (Pitot, 1732) 管という。

c. ベンチュリー管

管路の一部に図 2.8 のような絞りの部分挿入する。管壁から流れの剝離や乱れが生じないように、管は滑らかに絞り、緩やかに拡大する。断面 ①, ② の間のベルヌーイの定理および連続の関係は

$$\frac{1}{2} v_1^2 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{1}{2} v_2^2 + \frac{p_2}{\rho}$$

$$v_1 A_1 = v_2 A_2$$

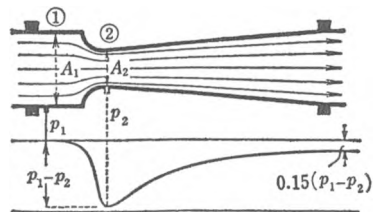


図 2.8 ベンチュリー管

である。これより

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2} \rho v_1^2 \left( 1 - \left( \frac{A_1}{A_2} \right)^2 \right)$$

したがって、流速  $v_1$  は次のようになる。

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_1 - p_2)} \quad (2.33)$$

ここに、 $n = A_1/A_2$  (断面積比)。この式によれば、断面を絞るほど二点間の圧力差が拡大する。すなわち、動圧  $\rho v_1^2/2$  を  $(n^2 - 1)$  倍に拡大して測れる長所があり、断面平均流速あるいは流量の測定に用いられる。この装置をベンチュリー (Venturi) 管という。この装置は Herschel (1842—1930) により 1898 年に発表され、絞りによる圧力降下を発見した Venturi (1746—1822) を記念して、ベンチュリー管と名づけられた。

#### d. 管のくびれ部の圧力

一部を細くした管に水が流れている (図 2.9)。管内の圧力は管の側壁に立てた細い管内の水柱の高さ  $h (p = \rho gh)$  で測られる。ベンチュリー管の場合と同様に管内の一本の流線にベルヌーイの定理を適用し、流量の連続の関係 ( $Q = vA = \text{一定}$ ,  $Q$ : 流量,  $A$ : 断面積,  $v$ : 流速) を適用すれば、各断面における水柱の高さの差は

$$h_a - h_b = \frac{Q^2}{2g} \left( \frac{1}{A_b^2} - \frac{1}{A_a^2} \right) > 0 \quad (A_a > A_b)$$

$$h_a - h_c = \frac{Q^2}{2g} \left( \frac{1}{A_c^2} - \frac{1}{A_a^2} \right) = 0 \quad (A_a = A_c)$$

となる。すなわち、管のくびれた部分の水柱の高さは低くなり、再び管が太くなると水柱の高さはもとに戻る。だが、ホースの先を絞ると水は勢いよく噴出し、

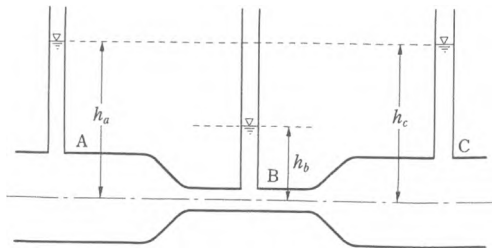


図 2.9 管のくびれ部の圧力と流速

これを手に受けると強い圧力を感じる。この経験の連想からか、人はよく管を細くするとその部分の水柱は高く上がると直感的に考えてしまう。しかし、実際は全く逆で、細い所では水柱は下がり極端な場合には負圧となり、空気を吸い込む。噴流の場合の手に感じる圧力は動圧であって、壁面に働く静圧ではない。

### 2.3 運動量保存則

#### a. 流体における運動量保存則

質点系の力学では、エネルギー保存則とともに運動量保存則が活用される。流体の力学においても同様である。質点系における運動量保存則は、“運動量の変化は力積に等しい”と表現されるが、これはニュートン力学の第二法則、運動方程式  $F=d(mv)/dt$  を書き換えたもの、ないしはいい換えたものである。

まず、簡単のために流れの方向に径が変化している真直な管の中の流れを考える(図 2.10)。流れの方向を  $x$  軸にとり、二つの断面 I, II の間の流体のもつ運動量が微小時間  $\delta t$

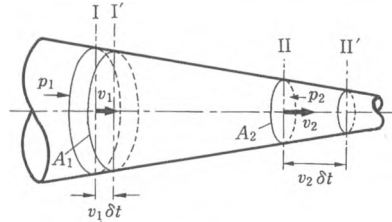


図 2.10

間にどれだけ増加するかを考える。微小時間  $\delta t$  後に断面 I は  $v_1\delta t$  だけ  $x$  方向に移動し、断面 II は  $v_2\delta t$  だけ移動するから、断面 I, II の間の流体の運動量(質量  $\times$  速度 = 密度  $\times$  体積  $\times$  速度)の微小時間  $\delta t$  後の増加分は、 $\delta t$  時間の前後に占める共通部分は消し合うことを考慮すると、 $\rho(A_2v_2\delta t)v_2 - \rho(A_1v_1\delta t)v_1$  である。管の流量を  $Q (=A_1v_1 = A_2v_2)$  とすれば、

$$\rho Q(v_2 - v_1)\delta t$$

また、この区間の流体に働く力積は、断面 I と II に働く圧力

$$A_1p_1\delta t - A_2p_2\delta t$$

と管の側面に働く力の  $x$  成分  $p_x S \delta t$  ( $S$ : 管側の面積) と外力(重力)の  $x$  方向成分  $\rho g_x V \delta t$  ( $g_x$ : 重力加速度の  $x$  成分,  $V$ : 断面 I, II 間の体積) である。したがって、運動量保存則は

$$\rho Q(v_2 - v_1) = A_1p_1 - A_2p_2 + p_x S + \rho g_x V$$

あるいは、

$$(\rho Q v_2 + A_2 p_2) - (\rho Q v_1 + A_1 p_1) = \rho g_x V + p_x S \quad (2.34)$$

と表される。

より一般的に、任意の形の管あるいは流管を考え、それぞれの断面におけるベクトル量の $\alpha$ 軸方向 ( $\alpha = x, y, z$ ) の成分を添字 $\alpha$ で示すと、運動量保存則は次のように書かれる (図 2.11)。ここに、運動量はエネルギーと異なりベクトル量であることに注意しなければならない。

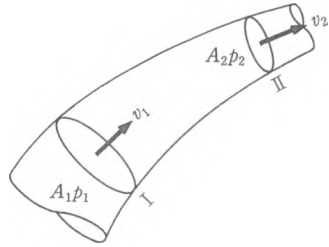


図 2.11

$\rho Q[(v_2)_\alpha - (v_1)_\alpha]$	$= (A_1 p_1)_\alpha - (A_2 p_2)_\alpha$	$+ (pS)_\alpha$	$+ (\tau S)_\alpha$	$+ (\rho g V)_\alpha$	(2.35)
単位時間あたりの 運動量の増加	圧力差	境界の 圧力	境界の 剪断力	重力の 成分	

上式はより簡潔に次のようにまとめられる。

$M'_\alpha - M_\alpha = F_\alpha$	(2.35 a)
-----------------------------------	----------

ここに、 $M'_\alpha - M_\alpha$  は式 (2.35) の左辺で、断面 I, II の間の $\alpha$ 軸方向の運動量束の増加分を表し、 $F_\alpha$  は式 (2.35) の右辺、つまり断面 I, II の間の流体に働く力の $\alpha$ 軸方向の成分を表す。

**b. 運動量方程式の一般的な導き方**

流体の場合には流体が空間を連続的に満たしているので、流れ場のある領域 (これを $V$ とする) に含まれる運動量の時間変化

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \mathbf{v} dV \quad (2.36)$$

を考える。運動量の変化はその領域に働く力と領域に流入する運動量の和に等しい。この領域の境界面 $S$ を通して流入する運動量は単位時間あたり

$$-\iint_S \rho \mathbf{v} v_n dS \quad (2.37)$$

である。ここに、 $v_n$  は $\mathbf{v}$ の法線成分 (図 2.12)。

領域の流体に働く力は、重力などの外力と領域の境界面 $S$ に働く圧力 $-p$ および剪断応力 $\tau$ である。したがって、流体における運動量保存則は次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \mathbf{v} dV = \iiint_V \rho \mathbf{F} dV + \iint_S \tau dS - \iint_S (p\mathbf{n} + \rho \mathbf{v} v_n) dS \quad (2.38)$$

ここに、 $\mathbf{n}$  は面要素 $dS$ への法線ベクトル。

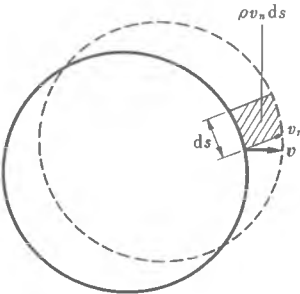


図 2.12

上式の右辺の表面積分の項をベクトル解析におけるガウスの定理により体積積分に変換すると、

$$\begin{aligned} -\iint_S (\rho n_i - \tau_i + \rho v_i v_n) dS &= -\iiint_V \left\{ \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_i v_k) \right\} dV \\ &= -\iiint_V \left\{ \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} + \frac{\partial (\rho v_k)}{\partial x_k} v_i + \rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right\} dV \end{aligned} \quad (2.39)$$

となる。さらに、連続式  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial (\rho v_k)}{\partial x_k}$  および  $\frac{\partial (\rho v_i)}{\partial t} = v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t}$  の関係を考慮すれば、式 (2.38) はオイラーの運動方程式 (1.13) となる。

### c. 運動量束とフロー・フォース

任意の断面Aを単位時間あたりに通過する流体のもつ運動量

$$M_f = \rho A v_n v \quad (2.40)$$

を運動量束 (momentum flux, rate of flow of momentum) と呼ぶ。

式 (2.38) の右辺第三項の被積分項

$$\rho n + \rho v v_n \quad (2.41)$$

は境界面の単位面積あたりに働く圧力と運動量束により発生する応力を表し、運動量の流れ (momentum flow) またはフロー・フォース (flow force) と呼ばれる。

開水路流では圧力分布は静水圧分布とみなせるので、断面全体の運動量の流れを  $\rho g$  で割って単位重量あたりに表現したものは

$$\frac{1}{\rho g} \int_0^h (p + \rho v^2) dz = \frac{1}{\rho g} \int_0^h \left( \rho g z + \rho \left( \frac{q}{h} \right)^2 \right) dz = \frac{h^2}{2} + \frac{q^2}{gh}$$

となる。ここに、 $q$  は単位幅流量、 $h$  は水深。この量を水理学 (hydraulics) の分野では

$$F = \frac{h^2}{2} + \frac{q^2}{gh} \quad (2.42)$$

とおき、specific force (比力) と呼ぶ。(ついでながら、specific をすべての場合について“比”と訳すのは誤訳である)。

### 運動量輸送による応力の発生

ある面を介しての運動量の輸送は、その面に運動量の方向の応力作用を及ぼす。たとえば、後の章 (第14章) で学ぶことであるが、乱流運動におけるレイノルズ応力 ( $\tau = -\overline{\rho u'v'}$ ;  $u', v'$ : 流速の乱流変動成分) や本書では扱わないが水の

波動運動によるラジエーション・ストレスがそれである。

## 2.4 運動量保存則の応用

### a. 平板に衝突する噴流

大気中で平板に角度  $\theta$  で斜めに水流が衝突し、その後水流は平板に沿って二方向に分流している。重力の影響は無視することとし、平板への法線と水流を含む平面内で考える。

流量を  $Q$ 、流速を  $v$  とすると、衝突前の噴流の  $x$  方向（平板に沿う方向）とそれに直交する  $y$  方向の運動量束

$M_x, M_y$  はそれぞれ

$$M_x = \rho Q v \cos \theta \quad (2.43 a)$$

$$M_y = -\rho Q v \sin \theta \quad (2.43 b)$$

である。衝突分流後の流量を  $Q_1$  および  $Q_2$  ( $=Q-Q_1$ ) とすると、衝突後の、 $xy$  方向の運動量束はそれぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} M_x' &= \rho Q_1 v_1 - \rho Q_2 v_2 \\ M_y' &= 0 \end{aligned} \right\} (2.44)$$

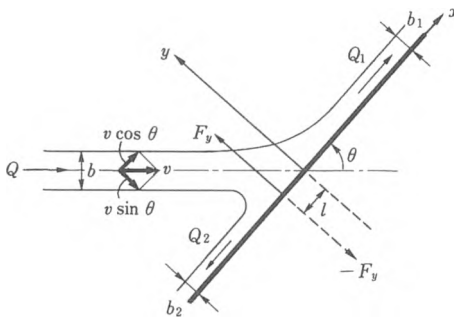


図 2.13 平板に衝突する噴流

一方、噴流の水脈上では圧力は大気圧であるから、ベルヌーイの定理により

$$v = v_1 = v_2 \quad (2.45)$$

式 (2.35 a) に以上の関係を代入すると、まず、平板に働く力が  $y$  方向の運動量束の変化から直ちに次のように求まる。

$$F_y = \rho Q v \sin \theta \quad (2.46)$$

平板に働く流れの摩擦力を無視しうると仮定すれば、平板に沿って働く力は零 ( $F_x=0$ ) であるから、

$$\begin{aligned} F_x &= \rho Q_1 v_1 - \rho Q_2 v_2 - \rho Q v \cos \theta \\ &= \rho v (2Q_1 - Q(1 + \cos \theta)) = 0 \end{aligned} \quad (2.47)$$

したがって、衝突後の水流の流量は

$$\frac{Q_1}{Q} = \frac{1 + \cos \theta}{2} \quad (2.48)$$

となる。噴流を平板に垂直に当てる場合 ( $\theta = \pi/2$ ) には、 $Q_1/Q = 1/2$  で左右に等

しく分流する。平板を傾けるにつれて衝突点の前方への流量が増える。

また、噴流の中心軸が平板に衝突する点のまわりに、 $x$ 軸の正の方向へ分かれる水脈と反対方向へ流れる水脈の運動量による推力のモーメントが、平板に垂直な衝突力の反力のモーメントとつりあう条件  $(F_y l = \frac{b_1}{2} \rho Q_1 - \frac{b_2}{2} \rho Q_2)$  から、衝突力の作用点  $l$  は

$$l = \frac{1}{2} b \cot \theta \quad (2.49)$$

となる。ここに、 $b$  : 噴流の幅、 $b_1 (= Q_1/v_1 = Q_1/v)$ 、 $b_2 (= Q_2/v_2 = Q_2/v)$  : 分岐水脈の幅 ( $b_1 + b_2 = b$ )。

### b. 曲管部に働く力

直径  $d$  の円管が  $90^\circ$  曲がっており、この中を流速  $v$  で流体が流れている (図 2.14)。このとき、曲管部には流れの方向変化による力が働く。この力は運動量則の適用によって求められる。

曲がりの手前では運動量の流れ (flow force) は

$$x \text{ 方向 : } 0, \quad y \text{ 方向 : } p_1 + \rho v_1^2$$

である。また、曲がりの後では

$$x \text{ 方向 : } p_2 + \rho v_2^2, \quad y \text{ 方向 : } 0$$

である。管径は一樣であるから  $v_1 = v_2 = v$  であり、エネルギー損失を無視しうるとして  $p_1 = p_2 = p$  である。したがって、管が流体より受ける力は

$$x \text{ 方向の力} = -F_x = -\pi \frac{d^2}{4} (p + \rho v^2) \quad (2.50 a)$$

$$y \text{ 方向の力} = -F_y = -\pi \frac{d^2}{4} (p + \rho v^2) \quad (2.50 b)$$

### c. 管の急拡大部での損失

管の断面積が  $A_1$  から  $A_2$  に急に拡大する場合のエネルギー損失は、運動量保存則から求めることができる。逆に、同じ方法で管の急縮部での損失を正確に求めることはできない。それは図 2.15 に示すように急縮と急拡大では断面積急変後の流れの状況が全く異なり、急縮の場合には急縮部で縮流となるが、この幅を理論的に推定することがむずかしいからである。

管の急拡大部では、細管部からの流れは急拡大面で剝離し噴流となって急拡大部の流体と激しく混合を行いながら拡散し、太い管の管壁に付着したのち、やがて流下

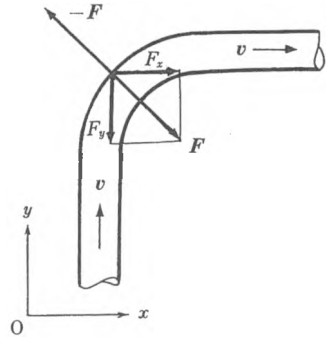


図 2.14 曲管部に働く力

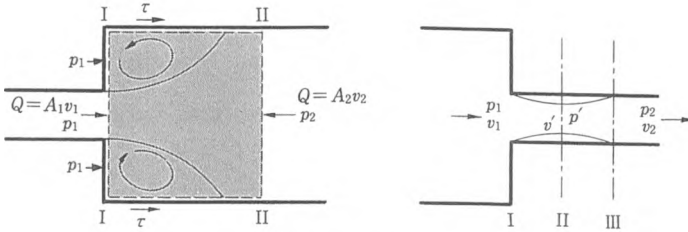


図 2.15

方向に一樣な流れとなる．そこで急拡大後の断面 I と流れが一樣流になったとみなしうる断面 II との間に図 2.15 のように検査領域を設け，運動量則を適用する．この際，次の二点を仮定する．

(i) 急拡大後の断面内の圧力  $p_1$  は全断面で一定である．なぜならば，細管からの流れは真直に噴出し，急拡大後の噴流には流線に垂直な方向の加速度を生じさせる噴流の内側と外側との圧力差による力が働いていないから．

(ii) 急拡大後の剥離領域の管壁における摩擦損失は，剥離部の激しい混合・渦運動によるエネルギー損失に比べて無視しうる．

断面 I と II の間の流れ方向の運動量束の変化が断面 I, II 間の圧力の差に等しいこと (式 (2.34))，

$$\rho Q(v_2 - v_1) = A_2(p_1 - p_2) \quad (2.51)$$

および流量の連続関係

$$Q = A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad (2.52)$$

が成立する．

一方，急拡大によるエネルギー損失は，次式で定義される．この式に式 (2.51)，(2.52) を代入して整理すれば，

$$\begin{aligned} h_e &= \left( \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} \right) - \left( \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} \right) \\ &= \frac{1}{2g} (v_1 - v_2)^2 \end{aligned}$$

$$h_e = \left( 1 - \frac{A_1}{A_2} \right)^2 \frac{v_1^2}{2g} \quad (2.53)$$

となる．

#### d. 物体に働く抗力と運動量束

二次元的な物体を囲んで矩形の検査面 (control surface)  $AA_1B_1B$  をとる (図

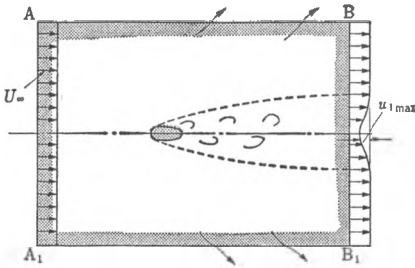


図 2.16 物体を囲む検査領域への運動量束の出入

2.16). 流軸に平行な境界面  $AB, A_1B_1$  は物体より十分離れてとり、そこでの  $x$  方向の流速は物体の影響のない領域の流速  $U_\infty$  とみなしうとする。また、検査面上では圧力は一定であり、運動量束への圧力の寄与はないとする。各検査面を通る  $x$  方向の運動量束を計算すると表 2.4 のようになる。ここで、 $AB$  および  $A_1B_1$  を通って検査領域から出る流量は零ではなく、連続の条件より  $AA_1$  より入る流量と  $BB_1$  より出る流量の差の  $1/2$ ,  $Q_{AB} = Q_{A_1B_1} = -\int_0^h (U_\infty - u) dy$  であることに注意しなければならない。ここに、 $h$  は  $AA_1$  の長さの  $1/2$ 。したがって、 $AB$  および  $A_1B_1$  面を通る  $x$  方向の運動量束は  $-\rho \int_0^h U_\infty (U_\infty - u) dy$  である。

表 2.4

断面	流量 $Q$	$x$ 方向運動量束 $M$
$AA_1$	$\int_{-h}^h U_\infty dy$	$\rho \int_{-h}^h U_\infty^2 dy$
$BB_1$	$-\int_{-h}^h u dy$	$-\rho \int_{-h}^h u^2 dy$
$AB, A_1B_1$	$-\int_{-h}^h (U_\infty - u) dy$	$-\rho \int_{-h}^h U_\infty (U_\infty - u) dy$
和	$\Sigma Q = 0$	$\Sigma M = \text{Drag}$

運動量の保存法則により、検査面を通る全運動量束は物体に働く抗力  $D$  に等しい。表 2.4 の右欄の各項の和より

$$D = \rho \int_{-\infty}^{\infty} u(U_\infty - u) dy \quad (2.54)$$

後流部分の欠損流速を

$$u_1(y) = U_\infty - u(y) \quad (2.55)$$

とする。流速分布の相似の仮定が成立する  $x$  の領域では  $u_1$  は  $U_\infty$  に比べて小さく  $u(y) = U_\infty - u_1(y) \approx U_\infty$  と考える。したがって、物体に働く抗力  $D$  は、

$$D = \rho \int_{-\infty}^{\infty} u(U_\infty - u) dy \approx \rho U_\infty \int_{-\infty}^{\infty} u_1(y) dy$$

と表せる。抵抗係数  $C_D$  を  $D = C_D d (\rho U_\infty^2 / 2)$  により定義すれば

$$C_D = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(x, y) dy / \left( \frac{U_\infty d}{2} \right) = C \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) d\eta \quad (2.56)$$

である。ここに、 $d$  : 物体の幅、 $f(\eta) = u_1(x, y)/u_{1\max}(x)$ 、 $\eta = y/b(x)$ 、 $b(x)$  : 後流幅、 $u_{1\max}(x)$ 、 $b(x)/U_\infty d = \text{一定}$ 、 $C = (U_\infty d/2)^{-1} u_{1\max} b = \text{一定}$ 。

e. 底面に低い盛り上りをもつ開水路流（ハンプ上の開水路流）

(i) エネルギー一定の流れ：水平な開水路の床の一部が緩やかに盛り上がっている。水流の流速は一つの断面内では一様で、圧力分布は静水圧分布とする。開水路の単位幅流量を  $q$ 、上流側の水位を  $h_1$  とする。また、ハンプによるエネルギー損失と水路床での摩擦損失は無視できるものとする。このような仮定の成立する流れは急変流と呼ばれる。まずハンプの上流側の断面 I と下流側の断面 II の

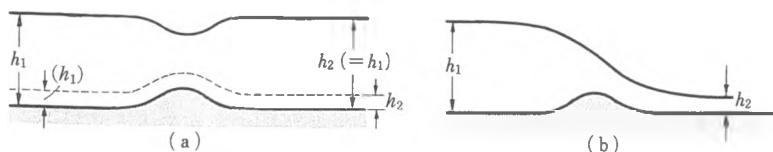


図 2.17

間に、連続の関係  $q = h_1 v_1 = h_2 v_2$  および静水圧分布の仮定  $p/\rho g + \zeta = (h - \zeta) + \zeta = h$  ( $\zeta$  : 水路床からの高さ) を考慮して、エネルギー保存則を適用する。水路床を基準とする単位重量あたりのエネルギー  $E$  (specific energy, “比エネルギー”) およびベルヌーイ和  $H$  を

$$E = \frac{1}{2g} \left( \frac{q}{h} \right)^2 + h \quad (2.57)$$

$$H = E + z = \text{const} \quad (2.58)$$

と定義する。式 (2.57) を変形すれば、

$$h^3 - E h^2 + \frac{q^2}{2g} = 0 \quad (2.59)$$

上式は水深  $h$  に関する三次方程式であり、ある流量  $q$  を通しうる水深が二つあるということを示している (図 2.17)。ただし、二根が正の実根であるためには

$$q \leq \sqrt{g} \left( \frac{2}{3} E \right)^{3/2} \quad (2.60)$$

(もう一つの根は常に負の実数で、水深は正でなければならないから意味をもたない。) この可能な二つの水深  $h_1$  と  $h_2$  を **alternative depth** (交代水深) という。ハンプの頂上でフルード数  $F_r (= v \sqrt{gh} = q / \sqrt{g} h^{3/2})$  がちょうど 1 となるのは、

$$z_c = E_1 - \frac{3}{2} \left( \frac{q^2}{g} \right)^{1/3} \quad (2.61)$$

のときである ( $E_1$  は上流側の specific energy). ハンプの高さが  $z_c$  以下ならば, 上下流の水深は等しい. ハンプの高さが  $z_c$  に等しいときには, 下流側の水深は上流側の水深と同じ値をとることも, 交代水深の異なる水深をとることもありうる. ハンプの高さ  $z_{max}$  が式 (2.61) の  $z_c$  を越すと, この  $E_1$  の値で流量  $q$  を流すことはできず, 流れはハンプ頂での比エネルギー  $E' = (E_1 - z_{max})$  の  $2/3$  の越流水深で, それに対応する流量  $q' = \sqrt{g}(2E'/3)^{3/2} (< q)$  だけ流下し, 残りの流量  $q - q'$  は段波として上流側に伝播する.

式 (2.58) 中の  $E$  に式 (2.57) を代入し, その両辺を  $x$  で微分すれば

$$\left( \frac{q^2}{gh^3(x)} - 1 \right) \frac{dh}{dx} = \frac{dz(x)}{dx} \quad (2.62)$$

上式を積分して水面形  $h(x)$  を求めることができる.

$h_2$  が求まると, ハンプに働く抗力は運動量保存則から次のようになる.

$$\frac{D}{\rho g} = \left( \frac{h_1^2}{2} + \frac{q^2}{gh_1} \right) - \left( \frac{h_2^2}{2} + \frac{q^2}{gh_2} \right) \quad (2.63)$$

$h_1 \neq h_2$  ならばたとえ流れのエネルギー損失がなくとも, ハンプに抵抗が働く.

(ii) 運動量束一定の流れ: 平坦な水路床上の流れは, 運動量束 (この場合は比力) が一定の条件のもとに, 二つの水深をとることが可能である. 式 (2.63) において  $D=0$  とおきこれを解けば,

$$h_2 = -\frac{h_1}{2} + \sqrt{\frac{h_1^2}{4} + \frac{2q^2}{gh_1}} \quad (2.64)$$

ただし, この場合には上下流の水深に対応するエネルギー損失は

$$\Delta E = E_1 - E_2 = (h_2 - h_1)^3 / (4h_1 h_2) > 0 \quad (2.65)$$

エネルギー損失  $\Delta E$  は正でなければならないから, このような流れでは  $h_1 < h_2$  である. つまり, “水は (水位) の高さより低きに流れる” のではなく, “エネルギーの高さより低きに流れる.” 対応する水深を共役水深 (conjugate depth) といい, このような現象を跳水 (チョウスイ, hydraulic jump) という. このような流れが実現するのは,  $h_1 < h_2 (\Delta E > 0)$  に対応して上流側のフルード数が 1 を超える ( $F_{r1} = v_1 / \sqrt{gh_1} > 1$ ) 射流の場合に限られる.

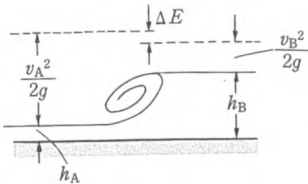


図 2.18 跳水の場合の比エネルギー, 比力の変化

## ダニエル・ベルヌーイ

(Daniel Bernoulli, 1700—1782)

ベルヌーイ家は、オランダからフランスおよびドイツとの国境に近いスイス・バーゼルに移り住んだ新教徒で、17世紀末から約1世紀の間にわたって8人に及ぶ第一級の数学者・科学者を輩出させている。水理学におけるエネルギー保存則であるベルヌーイの定理は、1738年に“Hydrodynamica”を著したダニエル・ベルヌーイにちなんでいる。なお、運動方程式からのベルヌーイの定理の完全な誘導はその後1752年にオイラーにより行われた。

彼は数学者であった父ヨハン・ベルヌーイ(1667—1748)から、友人のオイラーとともに数学の手ほどきを受けた。ダニエルはピョートル大帝の妃に招かれて、20歳代の7~8年をロシアのペテルスブルクのアカデミーにおいて数学の教授として過ごした。彼の名声を決定的にした“Hydrodynamica”は30歳代の前半、ペテルスブルク滞在中に書かれ、1738年ストラースブル(現在仏領の都市)で出版された。息子のこの成功を見て父ヨハンの自尊心はいたく傷つき、彼は直ちに同じく流体の力学に関する“Hydraulica”を書き上げたが、あたかもそれが息子の著書より先に書かれたかのごとく装うため、発行の年月を実際の年(1743)より10年以上も繰り上げ1732年としている。親子とはいえずさまじいばかりの功名心・対抗心といわなければならない。

いわゆるベルヌーイの定理にまつわるいま一つのエピソードは、彼の著作には今日の形でのベルヌーイの定理は記されていないという事実である。また、当時の本としてはめずらしく多数の図が挿入されているものの、中には誤りと思われるもの(もっとも特殊な例であるが)もあり、それが“ベルヌーイはベルヌーイの定理を完全には理解していなかった”と評されるゆえんである。

彼は生涯ついに結婚することはない。したがって彼の系統は絶えた。

