

6. 波

6.1 波の運動方程式

水の波は完全流体の力学がそのままあてはまる数少ない実在流体の流れの一つである。本章では完全流体の篇の最後の章として、これまでわざと避けてきたラプラスの方程式の正攻法による解法により、水の波の力学を展開しよう。

流体運動を非粘性・非圧縮・渦なしと仮定すれば、速度ポテンシャル Φ が存在し、基礎方程式は式 (6.1) で表される。

$$\nabla^2\Phi=0 \quad \text{あるいは} \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (6.1)$$

ここに、座標系は x, y 軸を水平面内に、 z 軸を鉛直上向きにとるものとする。座標系の原点は静止水面上におき、水深は一様で水底を $z = -h$ とする。水の波がポテンシャルをもつ理由については、第Ⅱ篇粘性流体の振動流の節 (§ 8.5) で説明する。

流速成分は

$$u = \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial\Phi}{\partial z} \quad (6.2)$$

で与えられる。

境界条件は、水底で z 方向の流速成分がないこと

$$w = \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0 \quad (z = -h) \quad (6.3)$$

および自由表面

$$z = \eta(x, y, t) \quad (6.4)$$

(ここに、 η : 自由表面の位置) で圧力の条件 (力学的条件) と運動学的な条件とを満たすことである。

自由表面での力学的条件は、圧力方程式 (2.23) で与えられる。(ただし、時間の任意関数 $F(t)$ を $\partial\Phi/\partial t$ の中に含める。)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} q^2 + \frac{p}{\rho} + gz = 0 \quad (z = \eta) \quad (6.5)$$

一方、水面 $z = \eta(x, y, t)$ の移動速度は、その実質微分により $D\eta/Dt$ である。それはとりもなおさず、水面での水粒子のオイラー速度の鉛直方向の成分 w に等しい (図 6.1)。(η は変数 z を含まないことに注意して、)

$$\frac{D\eta}{Dt} \equiv \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} = w \quad (z = \eta) \quad (6.6)$$

これが水面での運動学的条件である。

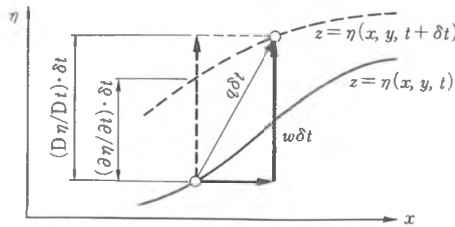


図 6.1 水面上昇速度 $\partial\eta/\partial t$ 、水面の実質移動速度 $D\eta/Dt$ と流体の速度 w

6.2 微小振幅の進行波

a. 微小振幅波の基礎方程式

いま波の波高は十分小さいと仮定する。この結果、自由表面 ($z = \eta$) での条件を静止水面 ($z = 0$) での条件におき換えることができる。また、微小量の二次オーダーの項 ($q^2 = u^2 + v^2$, $u\partial\eta/\partial x$, $v\partial\eta/\partial y$) を無視することができるので、自由表面での境界条件 (式 (6.5), (6.6)) は、次のようになる。なお、現象を鉛直面内の二次元と考え、 (x, z) 面について解く。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p_a}{\rho} + g\eta = 0 \quad (z = 0) \quad (6.7a)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (z = 0) \quad (6.7b)$$

ここに、 p_a : 自由表面での大気圧。

式 (6.7a) と式 (6.7b) より η を消去すれば、 Φ に関する自由表面の境界条件として次式を得る。

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (z = 0) \quad (6.8)$$

波長が十分短く、表面張力の影響が無視しえない場合には、自由表面の圧力 p

は $p/\rho = p_a/\rho - \gamma/R$, すなわち,

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_a}{\rho} - \gamma \frac{\partial^2 \eta / \partial x^2}{[1 + (\partial \eta / \partial x)^2]^{3/2}} \quad (6.9)$$

である。ここに, γ : 水の表面張力係数と密度との比, R : 自由表面の曲率半径。この場合には, 式 (6.5) の実質微分をとり, これと式 (6.6) から η を消去すれば, 自由表面での境界条件として, 次式が得られる。

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \gamma \nabla_h^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) = 0 \quad (6.10)$$

ここに,

$$\nabla_h^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \quad (6.10 a)$$

以上を整理すれば, 水の波の基礎方程式は

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (6.1 a)$$

であり, Φ に関する境界条件は次式となる。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (z = -h) \quad (6.3 a)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (z = 0) \quad (6.8 a)$$

b. 微小振幅波の速度ポテンシャル

時間に関して周期的な波 (角振動数 σ) を考えて $\Phi(x, z, t)$ を

$$\Phi(x, z, t) = \phi(x, z) e^{-i\sigma t} \quad (6.11)$$

とおく。さらに, 上式の未知関数 $\phi(x, z)$ を x のみの未知関数 $X(x)$ と z のみの未知関数 $Z(z)$ の積と仮定し,

$$\Phi(x, z, t) = X(x) \cdot Z(z) e^{-i\sigma t} \quad (6.12)$$

とおく。このような偏微分方程式の解法を変数分離法と呼ぶ。この操作により, 次に示すように偏微分方程式は常微分方程式に書き換えられ, 積分が可能になる。

式 (6.12) を基礎方程式 (6.1 a) に代入し, 両辺を $X(x)Z(z)$ で割れば,

$$-\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} \quad (6.13)$$

が得られる。上式の左辺は x のみの関数であり, 右辺は z のみの関数である。これらが恒等的に等しいためには両辺はある定数 (k^2 : 分離定数) であることが必要である。このとき上式は次の二式となる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 X}{dx^2} + k^2 X &= 0 \\ \frac{d^2 Z}{dz^2} - k^2 Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.14)$$

上式の一般解は、それぞれ

$$\left. \begin{aligned} X(x) &= Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \\ &= A' \cos kx + B' \sin kx \\ Z(z) &= Ce^{kz} + De^{-kz} \end{aligned} \right\} \quad (6.15)$$

である。進行波を考えるならば、式 (6.15) の X を $X(x) = Ae^{ikx}$ にとればよい。式 (6.15) の下の式が境界条件式 (6.3 a) を満足するためには、

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{z=-h} &= X(x) \left. \frac{dZ}{dz} \right|_{z=-h} \\ &= X(x) k \{ Ce^{-kh} - De^{kh} \} = 0 \end{aligned} \quad (6.16)$$

すなわち、

$$Ce^{-kh} = De^{kh}$$

でなければならない。これより、 $Z(z)$ は

$$Z(z) = Ce^{-kh} \{ e^{k(z+h)} + e^{-k(z+h)} \} = 2Ce^{-kh} \cosh k(z+h) \quad (6.17)$$

一方、自由表面での境界条件式 (6.8 a) の各項は

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= -\sigma^2 e^{-i\sigma t} X(x) \cdot Z(z) \Big|_{z=0} \\ &= -\sigma^2 e^{-i\sigma t} X(x) \cdot 2Ce^{-kh} \cosh kh \end{aligned} \quad (6.18)$$

$$\begin{aligned} g \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= g e^{-i\sigma t} X(x) k \cdot Ce^{-kh} \{ e^{k(z+h)} - e^{-k(z+h)} \} \Big|_{z=0} \\ &= g e^{-i\sigma t} X(x) \cdot 2Ce^{-kh} k \sinh kh \end{aligned} \quad (6.19)$$

となる。したがって、式 (6.8) より k (波数) と σ (振動数) との関係式

$$\sigma^2 = gk \tanh kh \quad (6.20)$$

を得る。もし、自由表面での表面張力の影響を考慮すれば、上式は

$$\sigma^2 = gk \left(1 + \frac{\gamma k^3}{g} \right) \tanh kh \quad (6.20 a)$$

式 (6.20), (6.20 a) は分散関係式と呼ばれ、波長 ($L = 2\pi/k$) により波速 ($c = L/T = \sigma/k$) が異なることを示している。なぜならば、波速 (位相速度) c と進行方向の単位長さあたりの波の数 ($1/L = k/2\pi$) との積が、単位時間あたりの波の数 ($1/T = \sigma/2\pi$) に等しいという関係

$$c = \frac{\sigma}{k} \quad (6.21)$$

を用いれば、式 (6.20 a) より

$$c = \sqrt{\frac{g}{k} \left(1 + \frac{\gamma k^2}{g}\right) \tanh kh} \quad (6.22)$$

あるいは、

$$c = \sqrt{\left(\frac{gL}{2\pi} + \frac{2\pi\gamma}{L}\right) \tanh \frac{2\pi h}{L}} \quad (6.22 a)$$

結局、波の速度ポテンシャルは式 (6.12) に上に求めた $X(x)$ と $Z(z)$ を代入し、その実数部をとって、次のようになる。

$$\Phi(x, z, t) = -\frac{ga}{\sigma} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \cos(kx - \sigma t) \quad (6.23 a)$$

$$= -\frac{a\sigma}{k} \frac{\cosh k(z+h)}{\sinh kh} \cos(kx - \sigma t) \quad (6.23 b)$$

上式は、波長 $L = 2\pi/k$ 、周期 $T = 2\pi/\sigma$ を用いて次のように表せる。

$$\Phi(x, z, t) = -\frac{gaT}{2\pi} \frac{\cosh 2\pi(z+h)/L}{\cosh 2\pi h/L} \cos\left(\frac{2\pi x}{L} - \frac{2\pi t}{T}\right) \quad (6.24)$$

一方、水位変動は式 (6.7 a) より

$$\begin{aligned} \eta &= -\frac{1}{g} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\}_{z=\eta} \approx -\frac{1}{g} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\}_{z=0} \\ &= \frac{H}{2} \sin(kx - \sigma t) \end{aligned} \quad (6.25)$$

ここに、 H は波高、 $a = H/2$ は振幅を表す。

c. 波の分類

水の波は、水深 h と波長 L との比から、次のように三つの型に分類して名称が与えられている。

(i) 深水波 ($h/L \rightarrow \infty$)

波長 L に比べて水深 h が十分深ければ ($h/L \rightarrow \infty$, $kh \gg 1$)、波は水底の影響を受けず、深水波 (deep water wave) と呼ばれる。この場合、速度ポテンシャル式 (6.23 a, b) は、

$$\Phi = -\frac{a\sigma}{k} e^{kz} \cos(kx - \sigma t) \quad (6.26)$$

となる。普通 $h/L > 1/2$ である波を深水波という。

また、波速と波長と周期の関係は

$$c = \sqrt{\frac{gL}{2\pi}} = \frac{gT}{2\pi}, \quad L = \frac{gT^2}{2\pi} \quad (h/L \rightarrow \infty) \quad (6.27)$$

式 (6.22a) を ($\tanh kh \rightarrow 1$ として) L で微分して 0 とおくことにより、深水波の波長が次式で示される L_* で、波速が最小値 c_* をとることが導かれる。

$$L_* = 2\pi \sqrt{\frac{\gamma}{g}}, \quad c_* = \sqrt[4]{4\gamma g} (= \sqrt{gL_*}/\pi) \quad (6.28)$$

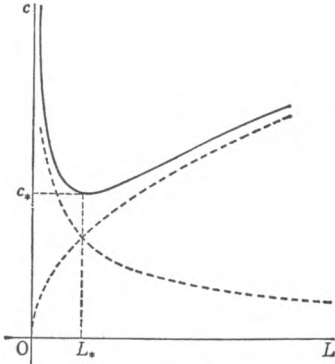


図 6.2 深水波の波速と波長の関係
(式 (6.22), $hk \rightarrow \infty$)

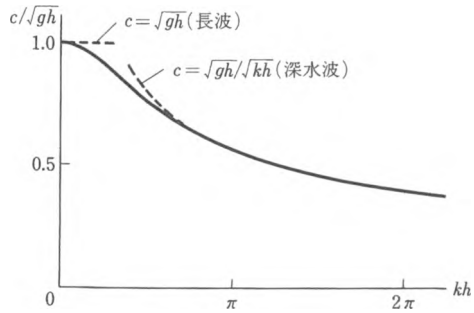


図 6.3 無次元波数 $kh (= 2\pi h/L)$ と無次元波速
(c/\sqrt{gh}) (式 (6.22), $\gamma=0$)

水の波の場合には、 $L_* = 1.73 \text{ cm}$, $c_* = 23.2 \text{ cm/sec}$ である。これを用いれば、波長と波速の関係は、式 (6.22a) より ($\tanh 2\pi h/L \rightarrow 1$ として)

$$\frac{c}{c_*} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{L}{L_*} + \frac{L_*}{L} \right)} \quad (6.29)$$

波長が L_* より長ければ、重力の影響が大きく**重力波** (gravity wave) と呼ばれ、逆に波長が L_* より短い波は表面張力の影響が強くと**表面張力波** (capillary wave) といわれる。

(ii) 浅水波

水深と波長の比 h/L が有限の場合、波は水深 h の影響を受けるので浅水波 (shallow water wave) と呼ばれる。実用上 $1/2 > h/L > 1/25$ の範囲の波をさす。

(iii) 長波 (極浅水波)

水深が波長に比べて極端に浅ければ ($h/L < 1/25$), $h/L \rightarrow 0$ とした極限として

$$\cosh \frac{2\pi(z+h)}{L} \rightarrow 1, \quad \frac{gL}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{L} = gh \frac{L}{2\pi h} \tanh \frac{2\pi h}{L} \rightarrow gh \quad \left(\frac{h}{L} \rightarrow 0 \right)$$

の関係を考慮すれば、速度ポテンシャルおよび波速・水粒子の速度は、次のようになる。

$$\Phi = -\frac{gaT}{2\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{L}x - \frac{2\pi}{T}t\right) \quad (6.30 a)$$

$$c = \sqrt{gh} \quad (6.30 b)$$

$$u = \frac{\eta}{h}c = \sqrt{\frac{g}{h}} \eta = \sqrt{\frac{g}{h}} \frac{H}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{L}x - \frac{2\pi}{T}t\right) \quad (6.30 c)$$

上式に示されるように、水粒子は鉛直方向の速度成分をもたず、底面に平行な深さ方向には無関係な一定流速で運動する。このような波を長波(long wave)あるいは極浅水波と呼ぶ。また、位相速度 c は波長 L に無関係で、分散性をもたない。

d. 水粒子の軌道

波による水粒子の軌道を求めるには、水粒子のラグランジュ速度を知らなければならぬ。時刻 $t=0$ に $\mathbf{x}_0 = \mathbf{a} = (x_0, z_0)$ に位置していた水粒子の任意時刻 t における速度をベクトル $\mathbf{u}_l(\mathbf{a}, t)$ で表す。時間 0 から t までの水粒子の移動位置 $\mathbf{x} = (\xi, \zeta)$ は \mathbf{u}_l を時間に関して積分し、

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + \int_0^t \mathbf{u}_l(\mathbf{a}, \tau) d\tau \quad (6.31)$$

と表される。

一方、時刻 t の場所 \mathbf{x} での水粒子のオイラー速度は、いままでの記号により $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ である。これは当然 $\mathbf{u}_l(\mathbf{a}, t)$ に等しい。したがって、点 \mathbf{a} からの水粒子の移動 $\int_0^t \mathbf{u}_l d\tau$ を微小量としてテイラー展開を行えば、水粒子のラグランジュ速度 \mathbf{u}_l を、任意点での水粒子のオイラー速度 \mathbf{u} に関して表すことができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_l(\mathbf{a}, t) &= \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \\ &= \mathbf{u}\left(\mathbf{a} + \int_0^t \mathbf{u}_l(\mathbf{a}, \tau) d\tau, t\right) \end{aligned} \quad (6.32)$$

$$= \mathbf{u}(\mathbf{a}, t) + \left\{ \int_0^t \mathbf{u}_l(\mathbf{a}, \tau) d\tau \right\} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial z_0} \right\} \mathbf{u}(\mathbf{a}, t) + \dots \quad (6.33)$$

上式により、水粒子の軌道速度 $\mathbf{u}_l = (d(\xi - x_0)/dt, d(\zeta - z_0)/dt)$ の第一近似として、オイラー速度 $\mathbf{u} = (\partial\Phi/\partial x, \partial\Phi/\partial z)$ を用いてよいことがわかる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(\xi - x_0)}{dt} &= \frac{a\sigma \cosh k(\zeta + h)}{\sinh kh} \sin(k\xi - \sigma t) \\ \frac{d(\zeta - z_0)}{dt} &= -\frac{a\sigma \sinh k(\zeta + h)}{\sinh kh} \cos(k\xi - \sigma t) \end{aligned} \right\} \quad (6.34)$$

さらに、上式の右辺の水粒子の位置 (ξ, ζ) を近似的に軌道中心 (x_0, z_0) に等しいとおいて、これを積分すれば波の軌道方程式として

$$\left. \begin{aligned} \xi - x_0 &= a \frac{\cosh k(z_0 + h)}{\sinh kh} \cos(kx_0 - \sigma t) \\ \zeta - z_0 &= a \frac{\sinh k(z_0 + h)}{\sinh kh} \sin(kx_0 - \sigma t) \end{aligned} \right\} \quad (6.35)$$

すなわち、

$$\left(\frac{\xi - x_0}{a_\xi} \right)^2 + \left(\frac{\zeta - z_0}{a_\zeta} \right)^2 = 1 \quad (6.36)$$

ここに、

$$a_\xi = a \frac{\cosh k(z_0 + h)}{\sinh kh}, \quad a_\zeta = a \frac{\sinh k(z_0 + h)}{\sinh kh} \quad (6.37)$$

を得る。すなわち、波の水粒子の軌道は水平・鉛直方向に、それぞれ $a \cosh k(z_0 + h)/\sinh kh$, $a \sinh k(z_0 + h)/\sinh kh$ の長半径・短半径をもつ楕円軌道を描く。波の進行方向を正とすれば波の水粒子の軌道をめぐる方向は、時計まわりであり、波の山では波の進行方向の速度をもち、波の谷では進行方向と逆方向の速度をもち、静止水面の位置では鉛直上方あるいは下方向を向いている。

式 (6.37) は、深水波 ($kh \rightarrow \infty$) では半径 ae^{kz_0} 、周期 $2\pi/\sigma$ の円軌道となる。また、長波 (極浅水波) では長半径が $\cosh k(z_0 + h)/\sinh kh \rightarrow 1/kh$ 、短半径が $\sinh k(z_0 + h)/\sinh kh \rightarrow 1 + z_0/h$ となる。すなわち、長波の軌道の水平長半径は深さ方向に一定で、鉛直半径は直線的に減少し、水底で零となる。極限では、短半径が零となって、図 6.4 の左のような往復振動となる。

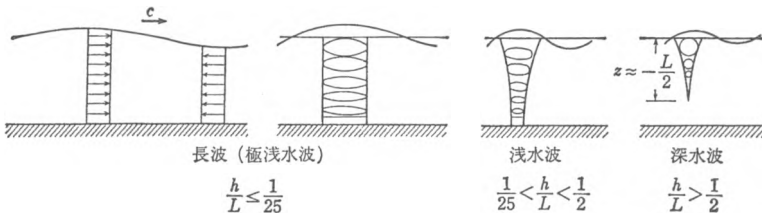


図 6.4 波の水粒子の軌道 (Ippen による)

ストークス・ドリフト

式 (6.35) で得られる軌道の解を第一近似とし、これを式 (6.34) に代入し第二近似を求めると、 x 方向の軌道速度に補正項

$$\Delta \left(\frac{d\xi}{dt} \right) = \frac{a^2 \sigma k}{2(\sinh kh)^2} \{ \cosh 2k(z+h) + \cos 2(kx - \sigma t) \} \quad (6.38)$$

がつけ加わる。その結果、 $\cosh 2k(z+h)$ に比例する定数項部分のため水粒子の軌道は閉じず、水粒子は軌道運動をしつつ、波の進行方向に平均的に \bar{u}_1 の速度で移動する。

$$\bar{u}_1 = \frac{a^2 \sigma k \cosh 2k(z+h)}{2(\sinh kh)^2} \quad (6.39)$$

これを質量輸送速度、特にストークス・ドリフト (Stokes drift) という。これは、水粒子の実質部分のラグランジュ的移動によるものであり、一点に固定した流速計によるオイラー速度の測定から検出しえないことに留意されたい。

u_1 を全水深にわたって積分し、密度 ρ を掛けると、1 周期間の質量輸送の平均値 M に関して次の関係が得られる。

$$\begin{aligned} M &= \rho \int_{-h}^0 u_1 dz \\ &= \frac{1}{2} \rho a^2 \sigma \coth kh = \frac{1}{2} \rho g a^2 \frac{k}{\sigma} \\ &= \frac{E}{c} \end{aligned}$$

このことをオイラー的に見れば、波の谷より下の部分ではオイラー速度 u の一周期の平均は零であるが、波の谷より上の部分では流速計が波面より下にある間だけの u を考えればよいから、質量輸送は零にはならない。波の谷より上にある x 断面の質量輸送は $M(x, t) = \int_{-a}^a \rho u(x, z, t) dz$ である。 $u(x, z, t)$ を $z=0$ の u_0 で近似すれば、 $M(x, t) \approx \rho(a+\eta)u_0(x, t)$ である。したがって、周期の平均は

$$M = \frac{\rho}{T} \int_0^T (a+\eta(x, t)) u_0(x, t) dt = \frac{\rho a^2 \sigma}{2} \coth kh$$

つまり、オイラー的に考えれば、波による質量輸送は波の谷より上の部分によってなされる。

6.3 微小振幅波のエネルギーと群速度

a. 波のエネルギー

微小振幅波の理論をいまま少し続けよう。

単位幅一波長あたりの波の位置エネルギーは、静止水面を基準として

$$V_e = \int_0^L dx \int_{-h}^{\eta} \rho g z dz - \rho g L \int_{-h}^0 z dz \quad (6.40)$$

$$= \frac{\rho g}{2} \int_0^L \eta^2 dx \quad (6.40a)$$

ここで、 η に式 (6.25) を代入すれば、

$$V_e = \frac{1}{16} \rho g H^2 L \quad (6.41)$$

また、一波長の間に含まれる単位幅あたりの波の運動エネルギーは、

$$T_e = \frac{1}{2} \rho \int_0^L \int_{-h}^{\eta} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right\} dz dx \quad (6.42)$$

である。これは、グリーンの定理によって次のような線積分に直すことができる。

$$T_e = \frac{1}{2} \rho \int_C \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds \quad (6.43)$$

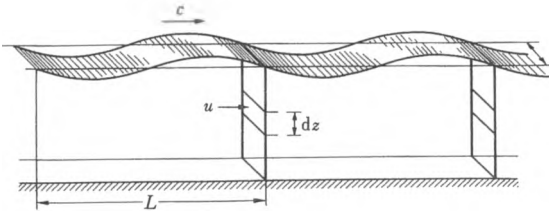


図 6.5

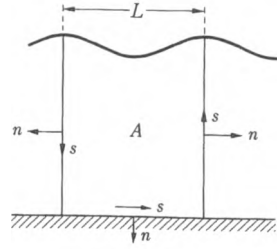


図 6.6

ここに C は面積積分の外周線を、 n は C への外向き法線方向を表す。 C の積分は左右の鉛直線に沿うものは互いに打ち消し、また水底では $\partial \Phi / \partial n = \partial \Phi / \partial z = 0$ であるから、結局、水面に沿うもののみが残り、式 (6.23) を用いて、

$$T_e = \frac{\rho}{2} \int_0^L \left(\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_{z=\eta} dx = \frac{1}{16} \rho g H^2 L \quad (6.44)$$

となる。したがって、進行波では常に V_e と T_e は等しく

$$V_e = T_e = \frac{1}{2} \rho g a^2 \frac{\pi}{k} = \frac{1}{16} \rho g H^2 L \quad (6.45)$$

である。

b. 群速度

振幅、波数および振動数のほぼ等しい二つの正弦進行波

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 &= a \sin(kx - \sigma t) \\ \eta_2 &= (a + \delta a) \sin\{(k + \delta k)x - (\sigma + \delta \sigma)t\} = a' \sin(k'x - \sigma't) \end{aligned} \right\} \quad (6.46)$$

を重ね合わせると、 $\eta = \eta_1 + \eta_2$ は

$$\eta = 2a \cos\left\{\frac{1}{2}(\delta k \cdot x - \delta\sigma \cdot t)\right\} \cdot \sin\left\{\left(k + \frac{1}{2}\delta k\right)x - \left(\sigma + \frac{1}{2}\delta\sigma\right)t\right\} + \delta a \sin\{(k + \delta k)x - (\sigma + \delta\sigma)t\} \quad (6.47)$$

となる。上式の右辺の第二項は第一項に比べて微小項であるので、これを無視することができる。それゆえ、合成波 η は波数と周波数が成分波とほぼ同じ正弦波と見ることができる。

$$\eta = \bar{\eta} \sin(kx - \sigma t) \quad (6.48)$$

ただし、その振幅 $\bar{\eta}$ は

$$\bar{\eta} = 2a \cos\left\{\frac{1}{2}(\delta k \cdot x - \delta\sigma \cdot t)\right\} \quad (6.49)$$

と表される。 $\delta k, \delta\sigma$ が微小量であるからこの合成波の波高は、時間あるいは場所的に緩やかに変化し、波長 $L_g = 4\pi/\delta k$ ($\because (1/2)\delta k L_g = 2\pi$)、周期 $T_g = 4\pi/\delta\sigma$ ($\because (1/2)\delta\sigma T_g = 2\pi$) の包絡波形が波速 $c_g = L_g/T_g$

$$c_g = \frac{\delta\sigma}{\delta k} \quad (6.50)$$

で伝播することを表している。

c_g の速度で進行する観測者の目には、図 6.7 に示すように、図中の太い線で

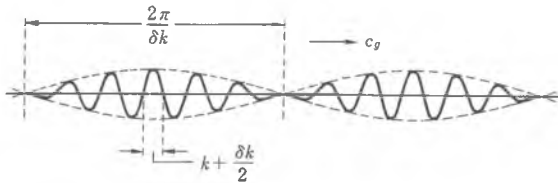


図 6.7 群速度の意味

示される成分波が相対速度 $c - c_g (> 0)$ で振幅を変えながら進行するように見える。これはいわゆるうなり現象である。しかし、その包絡線部分 (長さ $L_g/2 = 2\pi/(k - k') = 2\pi/\delta k$) に含まれる個々の波 η の様子、したがって波のエネルギーは、いつも同じである。それゆえ、合成波のエネルギーは包絡波の進行速度 c_g で進行方向に伝播していると考えられる。その意味で c_g を群速度 (group velocity) と呼ぶ。

式 (6.50) において $\delta\sigma \rightarrow 0, \delta k \rightarrow 0$ の極限をとれば、

$$c_g = \frac{d\sigma}{dk} = \frac{d(ck)}{dk} \quad (6.51)$$

は一つの進行正弦波のエネルギーの伝播速度となる。上式に、波速と波長の関係式 (6.22 a) (ただし $\gamma=0$) を代入すれば、表面波の群速度は次式のようになる。

$$c_g = \frac{c}{2} \left(1 + \frac{4\pi h}{L} \operatorname{cosech} \frac{4\pi h}{L} \right) \quad (6.52)$$

特に、 $h/L \rightarrow 0$ および $h/L \rightarrow \infty$ の二つの極限を考えれば

$$c_g = c = \sqrt{gh} \quad (h/L \rightarrow 0 : \text{長波}) \quad (6.53)$$

$$c_g = \frac{1}{2}c = \frac{1}{2} \left(\frac{gL}{2\pi} \right)^{1/2} \quad (h/L \rightarrow \infty : \text{深水波}) \quad (6.54)$$

すなわち、深水波の群速度 c_g は波の位相速度 c の 1/2 である。しかし、長波では両者は相等しい。

このことは、任意の鉛直断面を通る単位幅・単位時間あたりのエネルギー・フラックスと、圧力のなす仕事の一周分についての平均 \bar{W} を求めると、一般化されたベルヌーイの定理 (式 (2.23), ただし、 $F(t)$ は $\partial\phi/\partial t$ の項に含める) に

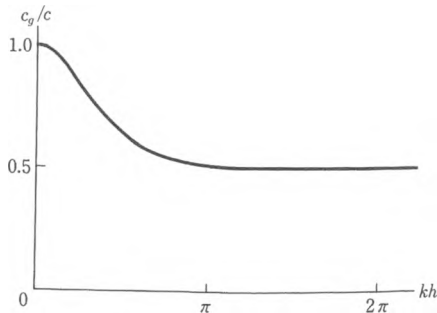


図 6.8 群速度 c_g と波速 (位相速度) c の比と無次元波数

より、 \bar{W} は圧力の変動分 $\partial\phi/\partial t$ のなす仕事に等しく、

$$\begin{aligned} \bar{W} &= \frac{1}{T} \int_0^T \int_{-h}^0 \left\{ \rho \frac{1}{2} (u^2 + w^2) + \rho g z \right\} u + p u \, dz \, dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \int_{-h}^0 \rho \left(-\frac{\partial\phi}{\partial t} \right) \frac{\partial\phi}{\partial x} \, dz \, dt \end{aligned} \quad (6.55)$$

(高次の項を省略して)

$$\begin{aligned} &\cong \frac{1}{T} \int_0^T \int_{-h}^0 \rho \left(-\frac{\partial\phi}{\partial t} \right) \frac{\partial\phi}{\partial x} \, dz \, dt \\ &= \frac{1}{2} \rho g a^2 \cdot c_g \end{aligned}$$

$$= (E_p + E_k) \cdot c_g \quad (6.56)$$

となることから理解される(注 6.1, 6.2)。ここに, E_p, E_k : 波の単位幅一周期あたりの平均の(すなわち, 単位表面積あたりの)位置エネルギーと運動エネルギー $= \frac{1}{4} \rho g a^2$ 。

(注 6.1) 簡単のため水深が無限大の深水波について考えると, $\eta = a \sin k(x-ct)$, $\Phi = ace^{kz} \cos k(x-ct)$ であるから,

$$W = \int_{-\infty}^0 -\rho \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial x} dz = \rho a^2 c^3 k^2 \sin^2 k(x-ct) \int_{-\infty}^0 e^{2kz} dz = \frac{1}{2} \rho g a^2 c \sin^2 k(x-ct)$$

したがって, $c^2 = g/k$ を考慮すると上式の平均は $\left(E = \frac{1}{2} \rho g a^2, c_g = c/2 \text{ であるから} \right)$,

$$\bar{W} = \frac{1}{4} \rho g a^2 c = E c_g$$

(注 6.2) 圧力はその勾配によって仕事をするから, 上の式(6.55)の議論は少々荒っぽいが, より厳密に取り扱えば次のようになる。微小距離 δx だけ離れた二つの鉛直断面を微小時間 δt の間に出入するエネルギーと圧力のなす仕事の和が, この断面間のエネルギーの δt 間の増加に等しい。

$$\frac{\partial E}{\partial t} \delta t = \int_0^{\delta t} \left\{ -\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\delta x} \left[\frac{\rho}{2} (u^2 + w^2) + \rho g z \right] u dz - \int_{-h}^{\delta x} \frac{\partial(pu)}{\partial x} dz \right\} dt$$

上と同様に一般化ベルヌーイの定理により

$$= \int_0^{\delta t} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\delta x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial x} dz dt$$

上式の右辺の積分を行えば(式(6.56)の関係を用いて),

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (c_g E) = 0$$

となる。これより, エネルギー E は群速度 c_g で輸送されることがわかる。

6.4 重複波

a. 重複波の波形

前節では x 方向の進行波を取り扱ったが, x に関する境界条件の式は特に必要としなかった。いま, 原点を通る鉛直面に固定壁を考えると, x の負の方向への進行波はここで反射する。この場合には, x 方向の境界条件として新たに $x=0$ で

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \quad (x=0) \quad (6.57)$$

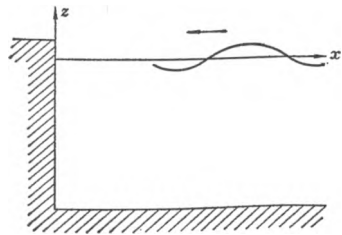


図 6.9

を考慮しなければならない。変数分離法による解(式(6.15))が上の条件を満たす

すためには,

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dx}\Big|_{x=0} &= [ikAe^{ikx} - ikBe^{-ikx}]_{x=0} \\ &= ik[A - B] = 0\end{aligned}$$

つまり, $A=B$ ($X(x) = A[e^{ikx} + e^{-ikx}] = 2A \cos kx$) でなければならない.

したがって, 速度ポテンシャルおよび水位変化は次のように与えられる.

$$\begin{aligned}\Phi(x, z, t) &= \mathcal{R}\left[2A \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \cos kx \cdot e^{-i\sigma t}\right] \\ &= 2\left(\frac{ag}{\sigma}\right) \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \cos kx \cos \sigma t\end{aligned}\quad (6.58)$$

$$\eta(x, t) = 2a \cos kx \sin \sigma t \quad (6.59)$$

ここに, 進行波の振幅を a とすれば, $A = ag/\sigma$. このことはまた, x の負の方向に向かう進行波が鉛直壁で完全に反射され, 逆位相で x の正の方向に向かうと考え, 進行波 η_p と反射波 η_r の重ね合わせの結果生じると考えてもよい. すなわち,

$$\begin{aligned}\eta &= \eta_p + \eta_r \\ &= a[\sin(kx + \sigma t) - \sin(kx - \sigma t)] \\ &= 2a \cos kx \sin \sigma t\end{aligned}\quad (6.59a)$$

いずれにしても, 鉛直壁で反射された進行波はもはや進行波としての性質をもたず, 各 x 点で決まるある振幅 ($2a \cos kx$) で同じ位相で上下振動をするにすぎない. このような波を重複波 (チョウフクハ) あるいは定在波 (standing wave) という. 振幅は

$$x = \frac{m\pi}{k} \quad (m=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (6.60a)$$

の各点で最大となり,

$$x = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{k} \quad (m=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (6.60b)$$

の各点で 0 となる. 振幅最大の点を腹 (loop), 振幅が 0 の点を節 (node) と呼ぶ.

b. 重複波の軌道

すでに述べたように進行波の水粒子の軌道は楕円軌道である. これに位相が π だけずれた, すなわち符号の逆転した反射波の軌道を加え合わせると重複波の軌道となる.

$$\left. \begin{aligned} \xi_s(x_0, z_0, t) &= +2a \frac{\cosh k(z_0+h)}{\sinh kh} \sin kx_0 \sin \sigma t \\ \zeta_s(x_0, z_0, t) &= -2a \frac{\sinh k(z_0+h)}{\sinh kh} \cos kx_0 \sin \sigma t \end{aligned} \right\} \quad (6.61)$$

$$\frac{\zeta_s}{\xi_s} = -\frac{\sinh k(z_0+h)}{\cosh k(z_0+h)} \cdot \frac{\cos kx_0}{\sin kx_0} \quad (6.62)$$

これより重複波の軌道はもはや進行波のような楕円ではなくて直線であることがわかる。重複波の腹 ($x=m\pi/k$, $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) では、水粒子は上下方向にのみ運動する。これに反して、重複波の節 ($x=(m+1/2)\pi/k$) では、水面は常に静止水面 $\eta=0$ の位置にあり、水粒子は上下方向には全く動かず水平方向に運動する。

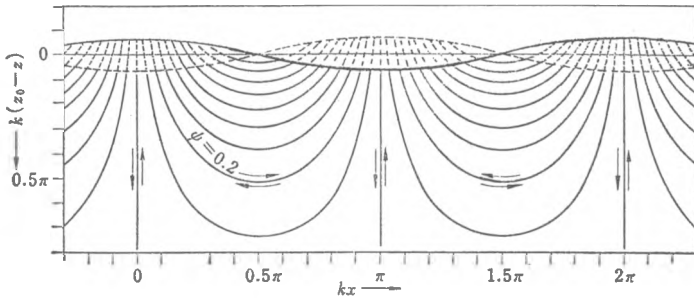


図 6.10 重複波の流線と波形

いま、 $z_0=f(x_0)$ なる曲線を考え、この曲線上の重複波の水粒子の軌道方向が曲線への接線となっているようにする。

$$\frac{dz_0}{dx_0} = \frac{\zeta_s}{\xi_s} = -\frac{\sinh k(z_0+h)}{\cosh k(z_0+h)} \cdot \frac{\cos kx_0}{\sin kx_0} \quad (6.63)$$

上式を積分すれば、 $\frac{1}{k} \log |\sinh k(z_0+h) \cdot \sin kx_0| = \text{const}$, すなわち

$$\sinh k(z_0+h) \cdot \sin kx_0 = \text{const} \quad (6.64)$$

これは上の定義からして重複波の流線である (図 6.10)。

図 6.11 の白い円や楕円や曲線は比重を 1 に調製した多数の微小なトレーサー粒子 (微小な油滴) の画く波の軌道である。最上段が進行波の水粒子の軌道で、これに不完全な反射波を順次重ね合わせるときの軌道の変化を示す。最下段は完全重複波の場合である。

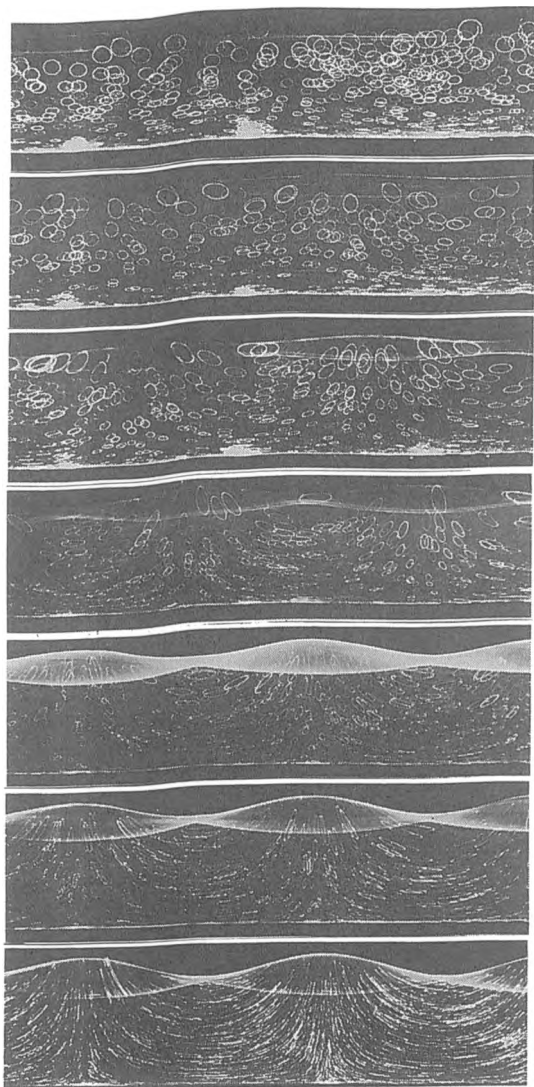


図 6.11 反射波の重ね合わせによる進行波から完全重複波への変化と水粒子の軌道 (Wallet and Ruellan, 1950)

c. 容器内の静振波

ここでは水深が一定の容器あるいは湖に起こる波を取り扱うことにする。二次元的な長さ l の水域を考える。固定壁あるいは岸を $x=0$ および l とすれば、こ

ここでは水平方向の流速は0である。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \quad (x=0, l) \tag{6.65}$$

前と同じく式 (6.15) に上の条件を課すと、

$$\left. \frac{dX}{dx} \right|_{x=0} = ik[A - B] = 0, \quad \left. \frac{dX}{dx} \right|_{x=l} = ik[Ae^{ikh} - Be^{-ikh}] = 0$$

より、 $A=B$ したがって、 $e^{ikh} - e^{-ikh} = 0$ 、すなわち次の関係が定まる。

$$\sin kh = 0 \tag{6.66}$$

したがって、この場合には波数が次式で定まるある値をとる波のみが可能となる。

$$k = \frac{2\pi m}{l} \quad \left(m = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{2}{2}, \pm \frac{3}{2}, \dots \right) \tag{6.66 a}$$

速度ポテンシャルおよび水位は

$$\Phi = \left(\frac{ag}{\sigma} \right) \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \cos \left(\frac{2\pi mx}{l} \right) \cos \sigma t \tag{6.67 a}$$

$$\eta = a \cos \left(\frac{2\pi mx}{l} \right) \sin \sigma t \quad (a = 2A\sigma/g) \tag{6.67 b}$$

となる。 $x=0$ および l は常に重複波の腹となっている。このような湖あるいは容器内に生じる波を静振波 (seiche; セイシュ) と呼んでいる。静振波の周期は、波速 c に式 (6.22) を用いて

$$T = \frac{2\pi}{\sigma} = \frac{2\pi}{ck} = \frac{2\pi}{\sqrt{gk \tanh kh}} \tag{6.68}$$

となる。もし、波の波長に比べて水深が十分浅いとすれば、 $\tanh kh \cong x$ より

$$T \cong \frac{2\pi}{\sqrt{ghk^2}} = \frac{l/m}{\sqrt{gh}} \tag{6.68 a}$$

となる。振動は $m=1/2$ の場合に最も顕著で、その周期は

$$T = \frac{2l}{\sqrt{gh}} \tag{6.69}$$

となる。これは、波速 \sqrt{gh} の長波が湖を往復する時間にほかならない。

上式の結果は実際の湖や湾内のセイ

シュの振動周期とよく一致する。たとえば、東京湾は平均水深 $h=20$ m、長さ

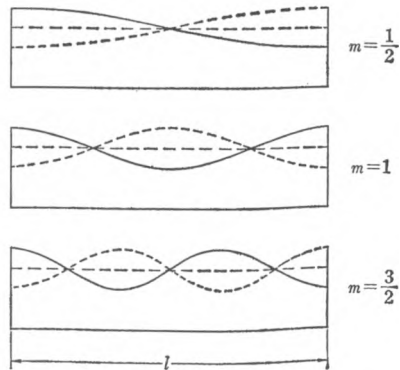


図 6.12 セイシュ

$l=40$ km で、上式より $T=8 \times 10^4 / \sqrt{9.8 \times 20} = 4.07 \times 10^3 \text{sec} = 68 \text{min}$ となる。実際、台風などの接近により水面に外乱が加えられると東京湾内には周期 60~70 min のセイシュが生じる。また、世界最深のロシアのバイカル湖の場合には $l=413 \text{mile}$, $h=2230 \text{ft}$ でセイシュの周期は理論式により $T=4.52 \text{h}$, 実際には 4.64 h のものが観測されている。

6.5 有限振幅の波

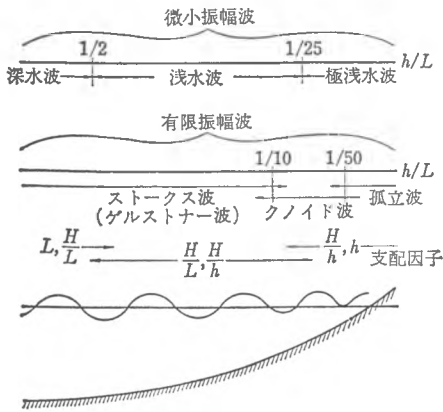


図 6.13 水深と波形 (Ippen による)

有限振幅波の解としてはストークス波、クノイド波、孤立波、ソリトンおよびゲルストナーのトロコイド波がある。

a. ストークス波

ストークス波は、自由表面での非線型の境界条件をテイラー展開し、微小振幅波の解を第一近似として摂動法により次々とラプラスの方程式の解を求めたものである。微小振幅波は静止水面に関し上下対称形である。しかし、ストークス波は静止水面に関し波形が非対称となり、山の部分が尖り谷の部分が浅く鍋底型となっている (図 6.14)。

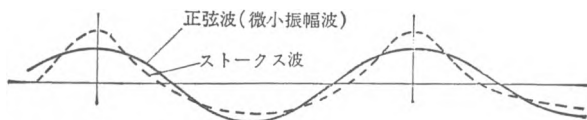


図 6.14 正弦波とストークス波

波が岸に近づくにつれて、波の波速は減少し、波高が増大してくる。こうなると、これまでの取扱いのように波を微小振幅波とみなすことはできなくなる。すなわち、波動の基礎方程式 (6.1) を解く際に、自由表面の力学および運動学的境界条件式 (6.5), (6.6) を線型化することが許されなくなる。このような波を有限振幅波 (finite amplitude wave) と呼んでいる。

第二近似までとった波形は式 (6.70) で与えられ、静止水面から山 (crest) までの高さ a_c の方が谷 (trough, トラフ) までの深さ a_t より大きい。

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \frac{H}{2} \cos(kx - \sigma t) \\ &+ \frac{H^2}{16} k \frac{\cosh kh(2 + \cosh 2kh)}{(\sinh kh)^3} \cos 2(kx - \sigma t) \\ \frac{a_c}{H} &= \frac{1}{2} + \frac{\pi H}{8 L} \frac{\cosh kh(2 + \cosh 2kh)}{(\sinh kh)^3} \\ \frac{a_t}{H} &= \frac{1}{2} - \frac{\pi H}{8 L} \frac{\cosh kh(2 + \cosh 2kh)}{(\sinh kh)^3} \end{aligned} \right\} (6.70)$$

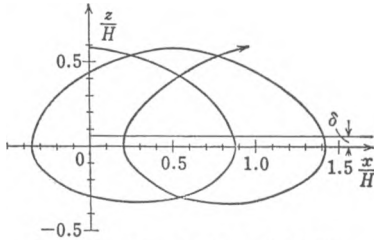


図 6.15 ストークス波の水粒子軌道 (岸力による)

有限振幅波の水粒子の軌道は楕円ではなく栗の実形で閉じた曲線とならず、軌道の上部で波の進行方向にずれている (図 6.15)。

b. ゲルストナーのトロコイド波

有限振幅波の理論として最初に発表されたのがチェコのプラハ大学のゲルストナー (Gerstner, 1802) の理論で、表

面波形がトロコイド曲線であることよりトロコイド波 (trochoidal wave) と呼ばれる。ストークス波が摂動法による級数解の形をとるのに反し、ゲルストナーのトロコイド波理論はなんらの近似も含まない厳密解である。しかし、この解の奇妙な点は流れの場が“渦あり流れ”となることである。理論的にはこのような渦度のある波が保存力場の完全流体中で静止状態から起こることはない。なぜならば、静止状態から始まる完全流体の流れは渦なしでなければならぬから。ところが、その波形はわれわれのしばしば見るいわゆる三角波の形を与える。しかし、実際問題として水の波が渦度をもつことは起こりうるから、このような波が現実中存在することは十分ありうることである。

トロコイド波の水粒子の位置は

$$\left. \begin{aligned} x &= a + \frac{1}{k} e^{kb} \sin k(a - ct) \\ z &= b - \frac{1}{k} e^{kb} \cos k(a - ct) \end{aligned} \right\} (6.71)$$

となる。ここに、 $a, b(b \leq 0)$ は x, y の位置に関するパラメーター、 $c = \sqrt{g/k}$

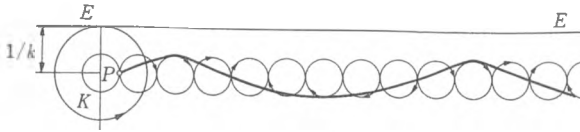


図 6.16 トロコイド曲線

は波速, k は波数である. $\theta = ak, t=0$ とおけばわかるように, これは, $z = b + 1/k$ の直線に接してその下側を転がる半径 $1/k$ の円の中心から $(1/k)e^{kb}$ の距離にある点の画くトロコイド曲線の方程式である. 特に, $b=0$ の場合にはサイクロイド曲線 (cycloid) になる (図 6.16, 6.17).

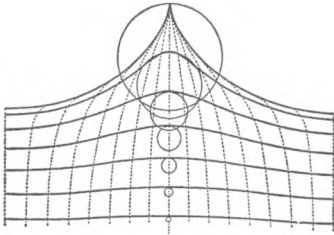


図 6.17 トロコイド波

c. KdV 方程式

波長が水深に比べて十分長い ($kh \ll 1$) として波の基礎方程式を变形すると, その第一近似として波高 η に関する次の非線型偏微分方程式が得られる.

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} + \frac{3}{2} \frac{C_0}{h} \eta \frac{\partial \eta}{\partial \xi} = -\frac{C_0 h^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi^3} \quad (6.72)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \varepsilon^{1/2}(x - ct), & \tau &= \varepsilon^{3/2}t, \\ \varepsilon &= (hk)^2 (\ll 1), & C_0 &= gh \end{aligned} \right\} \quad (6.73)$$

この方程式の右辺の項は波の形を崩そうとする分散項, 左辺第二項はそれと反対に波を突っ立たせる作用をする非線型項である. この方程式はコールトウェーグ (Korteweg) とド・フリス (de Vries) により 1895 年に導かれ, コールトウェーグ・フリス (Korteweg-de Vries) 方程式 (略して **KdV 方程式**) と呼ばれる. この方程式の安定した (定常に達した) 解として次の二つの波形 (クノイド波と孤立波) が求められている.

(1) クノイド波

水深がさらに浅くなった $1/50 < h/L < 1/10$ の範囲では, ヤコビ (Jacobi) の楕円関数 (elliptic cosine) で表される解がブシネスク (Boussinesq, 1891) により発見され, コールトウェーグ・フリス (1895) によりクノイド波 (cnoidal wave) と名づけられた. この波はヤコビの楕円関数が cn と表示されることからその名前が出ている.

(2) 孤立波

クノイド波の極限的な形が孤立波である。1844年、スコット・ラッセル (Scott Russell) が運河を馬に引かれて航行する舳 (ハシケ) が停止したときに、船の舳先 (ヘサキ) から離れて波形・波高を変えることなく、どこまでも進行する波として実験的に発見し、孤立波 (solitary wave) の名を与えた。その後ブシネスク (1871) とレイリー (Rayleigh, 1876) により独立に理論が導かれた。この波は、静止水面より盛り上った一つの山の部分のみで静止水面下の谷の部分に欠いている。これを逆にした静止水面より下の部分に凹んだ形の安定な波 (permanent form) は存在しない。

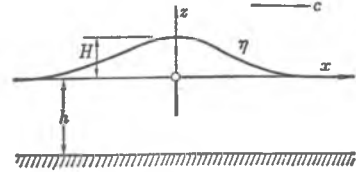


図 6.18

ストークス波は尖った山と鍋底のような谷部をもっているが、これを極限にもっていくと山はますます幅狭く尖り、鍋底はますます浅く幅広くなって遂に静止水面に一致してしまったと考えればよい。その波形と波速は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \eta &= H \left[\operatorname{sech} \sqrt{\frac{3H}{4h^3}} (x-ct) \right]^2 \\ c &= \sqrt{g(H+h)} \end{aligned} \right\} \quad (6.74)$$

(3) ソリトン

有限振幅長波の基礎方程式 (KdV 方程式) の定常状態に達した安定した波動解としてクノイド波 (波列) と孤立波が求められた。これに対して、任意の初期条件から出発する非定常問題では、波は分離した孤立波の連なりとして現れ、個々の孤立波はあたかも互いに独立した粒子のように振舞うことが、最近になって (1965年) 発見された。この波は粒子という意味の接尾語 (-on) をつけてソリトン (soliton) と呼ばれる。このような波の挙動は、基礎方程式中の波の形を崩そうとする分散項と波のエネルギーを集中させ波を突っ立たせようとする非線型項とが釣りあうことによるものである。

図 6.19 は初期条件として与えた正弦波形の波 (A: $t=0$) が、非線型項の作用により突っ立った状態となり (B: $t=t_b=1/\pi$)、やがて多数の孤立波ソリトンに分裂する様子 (C: $t=3.6t_b$) を示している。

また、図 6.20 は波高の高い (エネルギーの大きい) 速度の速いソリトンが、波高

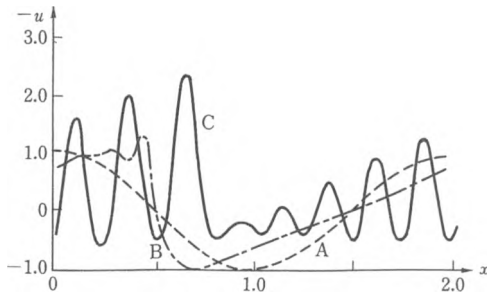


図 6.19 ザブスキーとクルスカル (Zabusky and Kruskal, 1965) が発見した計算機実験によるソリトン
 A: 初期条件, ($t=0$), B: break down $t_b=1/\pi$, C: $t=3.6 t_b$, ソリトンが 8 個見られる。

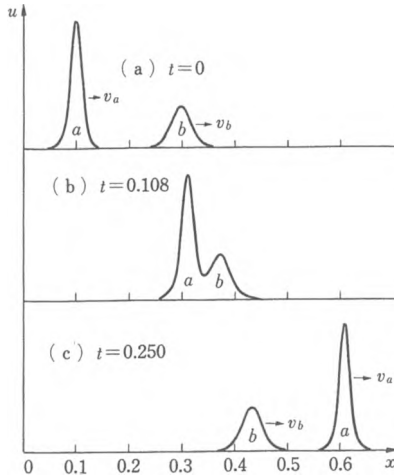


図 6.20 ソリトンの衝突 (Zabusky, 1967)
 (a) 衝突前, (b) 衝突中, (c) 衝突後。
 $v_a=2.00$, $v_b=0.63$, $\delta^2=1.0 \times 10^{-4}$ 。

の低い速度の遅いソリトンに追いつき衝突し、離れていく様を示したものである。

水の波にはこのほか、屈折、反射、回折、風波の発生、津波の発生、波の非線型干渉、ラジエーション・ストレスと海浜流系等々の実際的にも重要で面白い現象が種々あるが、ここでは立入らないことにする。

問 題

1.1 二次元の流れ場で渦度 $\omega_z=0$ の流れの剪断変形速度 γ はどうなるか。逆に、 $\gamma=0$ の流れの渦度はいくらか。

1.2 $\partial u/\partial x=a$ の二次元の流れ場を求めよ。

1.3 上の問題で、 $c_1(y)=0$ 、 $c_2(x)=0$ の流れの流関数 ψ を求めよ。

1.4 (1) 流関数 $\psi(x, y)=axy$ で表される流れはどんな流れか。

(i) 流線を描け。

(ii) u, v を求めよ。

(iii) 渦度 ω_z を求めよ。

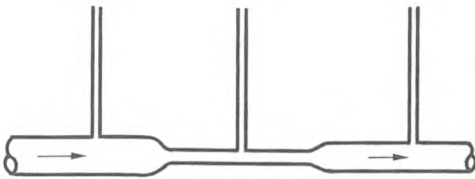
(2) この流れの速度ポテンシャル ϕ があるか。あれば ϕ を求めよ。

(3) この流れの複素速度ポテンシャルを簡単な形で示せ。

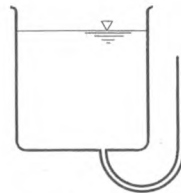
1.5 深さ h cm、断面積 A cm² の水槽の底に面積 a cm² の小孔があいている。水槽に水をいっぱい満たしたとき水底からの水の噴出速度はどれだけか。水深変化と時間の関係を導け。また、水槽の水位が半分となる時間はどうか。ただし、水脈の縮脈係数を k とする。

1.6 断面積 A cm² の水槽の底部に断面積 a cm²、長さ l cm のパイプが水平に接続している。パイプ下流端のバルブを急に開放した場合のパイプ内の流速の時間変化はどうなるか。ただし、水槽水位 h cm は一定に保たれるとし、また、パイプの摩擦抵抗その他の損失は考えなくてよい。

1.7 図のように太いパイプの中間がくびれて細くなっている。太い部分と細い部分の半径の比が $3:1:2$ のとき、流速の比はいくらか。また、パイプの側面にマンノメーターを取りつけるとき、それぞれのマンノメーターの水位はどうなるか。



問 1.7 図



問 1.8 図

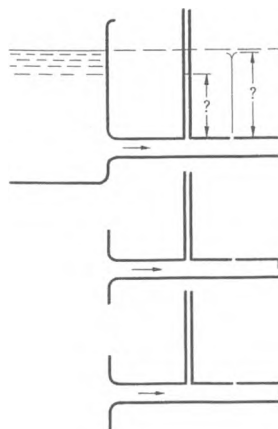
1.8 十分大きい水位を一定に保った水槽の底から J 字型にパイプが引かれている。

(1) パイプの立ち上がり部分の高さが水槽表面より高いとき、水はどこまで上がるか。

(2) パイプの立ち上がり部分が短いと流出する水は噴水となる。噴水はどの高さまで上がるか。

(3) パイプの出口を搾った場合の噴水の高さはどうなるか。ただし、水の粘性は無視するものとする。

1.9 左手の大きな水槽から水平にパイプが延びており、パイプの壁面には静圧管が取り付けられ、また小孔が開けてある。パイプの下流端が図のような場合のそれぞれについて、静圧管の水位と小孔からの噴水の高さを求めよ。ただし、流入損失、管壁の摩擦損失はないものとする。



問 1.9 図

1.10 上の問題において、パイプの出口が (1) 大気に開放している場合と、(2) 左手の水槽より水位の低い水槽に接続している場合ではどうなるか。

1.11 容器に浅く水を張り、水面にアルミ箔を浮かべる。この容器の中ほどに細いビニール管を二本並べて立て、一方の管から水をゆっくり吸い上げ他方の管から等量の水を戻す。このようにしてできる流れを水面のアルミ箔で可視化し、二重湧出しの理論と比較せよ。一般的にポテンシャル流れは $\nu \rightarrow 0$, すなわち $Re \rightarrow \infty$ の極限の流れであるが、このような二次元のゆっくりとした流れでポテンシャル流れをシミュレートすることができる。このような流れを Hele-Shaw (ヒール・ショウ) 流れという。

1.12 円柱まわりの一様流の速度ポテンシャルと流関数を直交座標系に関して導き、図を画け。

1.13 円柱が x 軸の正の方向に、(i) $U(t) = U_0$, (ii) $U(t) = U_0 t$ あるいは (iii) $U(t) = U_0 \sin 2\pi ft$ で運動しているとき、円柱まわりの各点の速度と加速度の分布図を求めよ。

1.14 円柱が静止流体中を $U(t)$ (上の (i), (ii), (iii) の各ケース) の速度で運動し、 $z = -\infty$ から $z \rightarrow \infty$ に到るまでの間に流体の各点の流体粒子が辿る軌道を描け。また円柱の中心が原点に来たときの各流体粒子のその軌道上の位置を示せ。

1.15 加速流中を運動する円柱：流速が時間とともに一方向に $U_1(t)$ で変化している完全流体の中におかれた円柱が、流れの方向に速度 $U_2(t)$ で運動するとき、(1) 流れ場の複素速度ポテンシャルおよび、(2) 円柱に働く力を求めよ。

1.16 流れに垂直に運動する円柱：完全流体の x 軸方向の流れに対して垂直に $V(t)$ の速度で運動する円柱に働く力を求めよ。

1.17 循環をもつ円柱の自由振動：まわりに循環 Γ をもつ円柱の完全流体中での自由振動 (外力が働かない場合の振動) を求めよ。ただし、円柱の運動は直線運動でないので、揚力の公式は

$$L = \rho U \Gamma - \pi a^2 \rho U \dot{\chi}$$

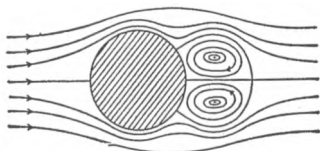
となる。ここに、 $\dot{\chi}$ は円柱の速度ベクトルと x 軸のなす角である。円柱は流れに対して垂直に $U \dot{\chi}$ の速度で運動しているから、この流れによる力 (揚力) が働く。

1.18 半径 a cm の円柱の前に強さ Q の吹出しがある。この円柱まわりの流れはどうなるか。

1.19 一様流中に正負一對の渦糸を流れに垂直におくとき、渦糸の運動を求めよ。この

流れにさらに円柱を配置するときの流れ場を求めよ。

1.20 図のように一様流の中に円柱がおかれており、この円柱の背後に一对の渦が生じている。この渦が同じ位置に定置していることは可能か、それはどんな位置か。



問 1.20 図

1.21 ジューコフスキー変換における ζ -面と z -面の対応：ジューコフスキー変換において、 ζ -面上の原点を中心とする同心円および原点を通る（貫く）直線群は、写像面 z 上ではどんな曲線群となるか。

1.22 x 軸に対して β の角度で傾いている長さ $4a$ の平板が静止流体中を x 軸の正の方向に速度 $U(t)$ で運動するときの流線、流跡線を描け。

1.23 ボルダの流出口：ボルダの流出口からの噴流の縮脈係数を自由流線の理論を応用して求めよ。（ボルダの流出口の縮脈係数は、先に示したようにもっと簡単に求まる。）

1.24 一輪差しの口の細い花瓶にウチワの柄を差し入れ、これに扇風機で風を当てると、ウチワはどんな姿勢をとるか。実際に実験をし、その結果を流体力学的に説明せよ。

1.25 一枚の紙を床に落とすとき、紙はどんな挙動をするか。紙を水平にして落とす場合と鉛直にして落とす場合とどう違うか、その結果を流体力学的に論ぜよ。

1.26 直径 d cm のボールが立ててある。このボールは強風の日に振動数 f Hz の音を発して鳴っている。その日の風速を求めよ。

1.27 長さ L km の細長い湖がある。湖岸では周期 T min の水面振動が見られる。この湖の平均の深さはどれだけか。