3. 流関数と速度ポテンシャル

3.1 流線と流関数

流れの様子は下の写真（図 3.1）に示すように，流れの中に放出された微粒子や色素の動きによって知ることができる．こうした技法を流れの可視化法という．流れの中に多くのトレーサー粒子を浮遊させて，適当なシャッター・スピードで写真を撮り，トレーサー粒子の画く短い線を連ねたものが，**流線**（stream line）である．

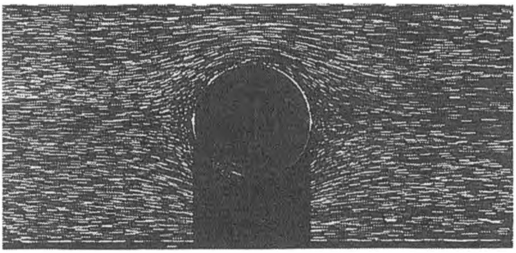


図 3.1　トレーサー粒子の作る流線（Coutanceau, 1968）

流れの可視化法によって得られる（写真）情報は，トレーサーの放出法や撮影法によって，**流線**(stream line)，**流跡線**（pathline），**流脈線**†（または流条線）(streak line) および**タイム・ライン**（time line）の 4 通りの線になる（後二者は原理的には同一であるので，通常は 3 通りに数える）（図 3.2）．これらの流れを表す線は，流れが定常な場合を除けば，一般には同一ではない．

a. 流線の定義

このようにして画かれた流線は次のように定義できる．“一本の連続した曲線上のすべての点における接線の方向が，その点の速度ベクトルの方向と一致しているような曲線を**流線**という”（図 3.2(a)）．流れが定常でなければ，流線は時間とともに変化し，各瞬間瞬間で異なる．

† 脈は派（派生，派閥）と同じく，一つのものがいくつもに分かれるという意味であるから，流脈線は適訳とはいえない．

このことを式で表すと，次のようになる．流線の微小要素ベクトル $d\boldsymbol{s}$

$$d\boldsymbol{s}=(dx, dy, dz) \qquad (3.1)$$

とその点での速度ベクトル

$$\boldsymbol{v}=(u, v, w) \qquad (3.2)$$

とが平行であることから，

$$\frac{dx}{u(x,y,z\,;t)}=\frac{dy}{v(x,y,z\,;t)}=\frac{dz}{w(x,y,z\,;t)}=\frac{ds}{q(x,y,z\,;t)} \qquad (3.3)$$

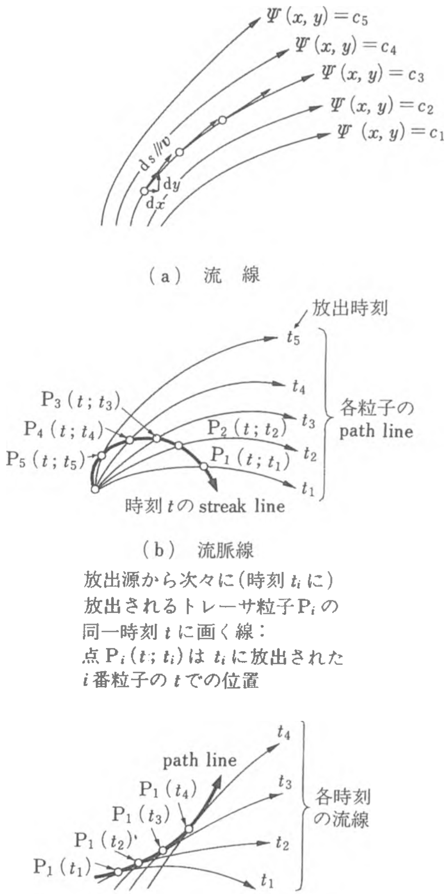
ここに，ds は微小要素の長さ，$q(=|\boldsymbol{v}|)$ は流速の大きさ $ds=q\,dt$．

したがって，流線の微分方程式を流線に沿う変数 s に関して

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{dx}{ds}&=u(x,y,z\,;t)/q \qquad (3.4\,\mathrm{a})\\ \frac{dy}{ds}&=v(x,y,z\,;t)/q \qquad (3.4\,\mathrm{b})\\ \frac{dz}{ds}&=w(x,y,z\,;t)/q \qquad (3.4\,\mathrm{c})\end{aligned}}$$

と表すことができる．u, v, w が $x, y, z\,;t$ の関数として与えられるとき，上式の積分より s をパラメータとする流線が求まる．

$$\left.\begin{aligned}x&=f_1(s)\\ y&=f_2(s)\\ z&=f_3(s)\end{aligned}\right\} \qquad (3.5)$$



（a） 流　線

（b） 流脈線

放出源から次々に（時刻 t_i に）放出されるトレーサ粒子 P_i の同一時刻 t に画く線：点 $P_i(t\,;t_i)$ は t_i に放出された i 番粒子の t での位置

（c） 流跡線

一つの粒子の辿る軌跡：$P_1(t_i)$ は一つの粒子 P_1 の時刻 t_i での位置

図 3.2

あるいは，式 (3.3) を書き分けて，

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}, \qquad \frac{dx}{u}=\frac{dz}{w} \qquad (3.3\,\mathrm{a})$$

すなわち，

$$-v\,dx+u\,dy=0, \qquad -w\,dx+u\,dz=0$$

とすれば，それぞれの方程式の解として二つの曲面

$$\Psi_1(x, y, z)=0, \qquad \Psi_2(x, y, z)=0$$

が得られる．この二曲面の交線が流線を表す．

b. 流関数（二次元非圧縮性流体）

(1) 流関数の定義

さてしばらくの間，議論を**二次元の非圧縮性流体**の流れ場に限定しよう．二次元の場合，流線の方程式は

$$\frac{\mathrm{d}x}{u}=\frac{\mathrm{d}y}{v} \tag{3.6}$$

すなわち，

$$-v\,\mathrm{d}x+u\,\mathrm{d}y=0 \tag{3.7}$$

ところで，非圧縮性流体の連続の方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{3.8}$$

すなわち，

$$\frac{\partial(-v)}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x} \tag{3.8 a}$$

である．これはとりもなおさず，式 (3.7) の左辺があるスカラー関数 $\Psi(x, y)$ の全微分 $\mathrm{d}\Psi$ であること

$$\mathrm{d}\Psi=\frac{\partial \Psi}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial \Psi}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y=-v\,\mathrm{d}x+u\,\mathrm{d}y \quad (=0) \tag{3.9}$$

の必要十分条件にほかならない．すなわち，速度成分 (u, v) はスカラー関数 Ψ から次のように導かれ，

$$\boxed{u=\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \qquad v=-\frac{\partial \Psi}{\partial x}} \tag{3.10}$$

したがって，流線の微分方程式 (3.7) の解は

$$\Psi(x, y)=\mathrm{const} \tag{3.11}$$

と表される．流関数より導かれる流速 u, v は自ずと非圧縮性流体の連続の方程式を満たす．非圧縮性流体の二次元流れ場には流関数が必ず存在し，式 (3.11) の右辺の const は流線ごとに異なる値をとる．この関数 $\Psi(x, y)$ を**流関数** (stream function) あるいは**流れ関数**，**流線関数**と呼ぶ．流関数 Ψ はラグランジュにより1781年に導入され，その運動学的な解釈はランキン (Rankine, 1867) によって

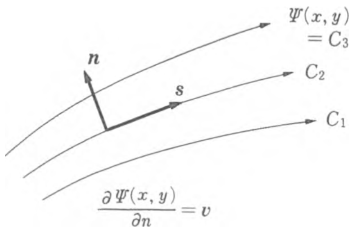


図 3.3　流関数と流速

行われた．

非圧縮性流体の二次元場の流線の方程式 (3.11) の全微分（式 (3.9)）は，数学的には二つのベクトル $(\partial\Psi/\partial x, \partial\Psi/\partial y)=(-v, u)$ と $\mathbf{ds}=(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$ が直交していることを表している．実際に $\mathbf{ds}$ は速度ベクトル $\boldsymbol{v}=(u, v)$ と平行であるから $(-v, u)\cdot(u, v)=-uv+uv=0$ となり，これらは直交している．

（注 3.1）　**流関数か流線関数か？**

英語名称 stream function の直訳は流関数（あるいは，流れ関数）であるが，その表す意味から地球物理学系など日本の一部の分野では流線関数と訳されている．この方が意味がわかりやすいようにも思われる．しかし，流線関数という名称も下手をすると誤解を生じさせる．というのは流関数は式 (3.10) からも明らかなように，二次元の非圧縮性流体の流れ場で定義されている．三次元場では軸対称流の場合に定義され，ストークスの流関数と呼ばれる．一方，流線は二次元場でも三次元場でも定義されるから，Ψ を流線関数と呼ぶと三次元場でもこのような関数が存在すると勘違いしはしないだろうか．

（2）　流関数と流量

いま，図 3.4 のように隣り合う二つの流線 Ψ_1 と Ψ_2 を考える．Ψ_1 上の点 A と Ψ_2 上の点 B を結ぶ任意の曲線 C をとると，その線要素 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 上の Ψ の変化は

$$\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}l}=\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}l}+\frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}l} \qquad (3.12)$$

である．

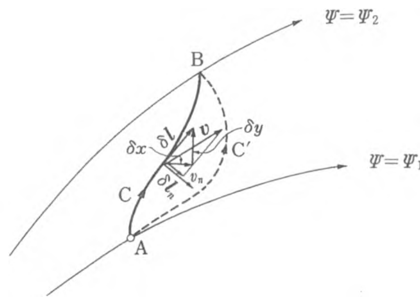


図 3.4　流関数と流量

上式に式 (3.10) の関係を代入すれば

$$\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}l}=u\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}l}+v\left(-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}l}\right) \qquad (3.13)$$

となる．ところで，任意方向の線要素 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}=(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$ と直交する法線方向の単位ベクトルは $\boldsymbol{l}_n=(\mathrm{d}y/\mathrm{d}l,\ -\mathrm{d}x/\mathrm{d}l)$ である（$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ と $\boldsymbol{l}_n$ の内積が 0 となることを確かめよ）．したがって，上式の $\mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}l$ は速度成分 $\boldsymbol{v}=(u, v)$ と $\boldsymbol{l}_n$ との内積，すなわち，速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ の曲線 C への法線成分 v_n にほかならない．

$$\frac{d\Psi}{dl}=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{l}_n=v_n \tag{3.14}$$

それゆえ，微小線素 dl を横切る微小流量は $dQ=v_n dl$ であるから，曲線Cに沿っての $\Psi=\Psi_1$ から Ψ_2 までの上式の積分は，二つの流線の間の流量 Q を与える．

$$\int_C \frac{d\Psi}{dl}dl=\Psi_2-\Psi_1$$

$$=\int_C v_n dl=Q$$

すなわち，

$$\boxed{Q=\Psi_2-\Psi_1} \tag{3.15}$$

この積分値は曲線 C のとり方に関係しない．なぜならば，点 A より点 B までを C とは異なる曲線 C′ で結んで A-B-A と積分すれば，この間の流量は 0 でなければならないから

$$\int_C \frac{d\Psi}{dl}dl+\int_{-C'}\frac{d\Psi}{dl}dl=0$$

したがって，

$$\int_C \frac{d\Psi}{dl}dl=\int_{C'}\frac{d\Psi}{dl}dl \tag{3.16}$$

なお，流線への法線の方向を $\boldsymbol{n}$ とするとき，（上の説明の任意の方向 $d\boldsymbol{l}$ を $d\boldsymbol{n}$ にとれば）式（3.14）より流速 $q=|\boldsymbol{v}|$ は流関数より

$$\frac{\partial\Psi}{\partial n}=q \tag{3.14 a}$$

と表される．

（3） 流関数 Ψ の満たすべき微分方程式——流関数と渦度——

流関数と流速の関係を渦度の定義式（1.32）の第 3 式 $\omega_z=\partial v/\partial x-\partial u/\partial y$ に代入すれば次の関係が得られる．

$$\boxed{\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}=-\omega_z} \tag{3.17}$$

この関係式は，たとえば二次元流の数値解析における「流関数—渦度法」や渦点法における“vortex-in-cell”法などにしばしば利用される．

渦なし流れ場のラプラスの方程式

もし，流れが“渦なし”（$\omega_z=\zeta=0$）ならば，式（3.17）より，流関数 Ψ はラプラスの方程式

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}=0 \tag{3.18}$$

を満たすことが導かれる．

例 3.1 いま，次の関数を考える．

$$\Psi(x, y)=axy=\text{const} \tag{3.19}$$

この関数の表す流線は (x, y) 平面上の双曲線である（図 3.5）．この流関数 Ψ は方程式 (3.18) を満たすのでその流れ場は渦なしである．速度成分 (u, v) は，式 (3.19) を式 (3.10) に代入すれば，

$$u=\partial\Psi/\partial y=ax \tag{3.20 a}$$

$$v=-\partial\Psi/\partial x=-ay \tag{3.20 b}$$

である．速度の絶対値は

$$(u^2+v^2)^{1/2}=a(x^2+y^2)^{1/2} \tag{3.21}$$

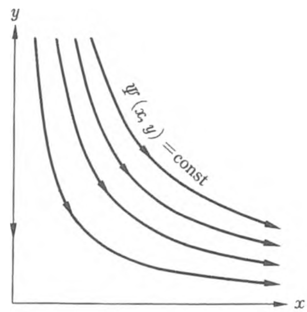


図 3.5

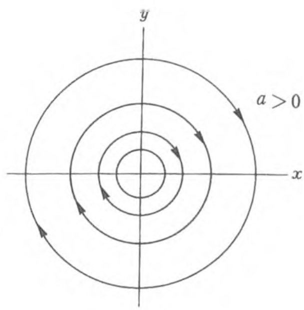


図 3.6

例 3.2 次の関数

$$\Psi(x, y)=a(x^2+y^2)=\text{const} \tag{3.22}$$

は式 (3.18) を満たさない渦あり流れ場の流関数である．これが表す流れは，原点を中心とする同心円の流れ（半径 $r=(x^2+y^2)^{1/2}$）で，各点の速度成分，流速および渦度はそれぞれ

$$u=\partial\Psi/\partial y=2ay, \qquad v=-\partial\Psi/\partial x=-2ax \tag{3.23}$$

$$(u^2+v^2)^{1/2}=2a(x^2+y^2)^{1/2}=2ar \tag{3.23 a}$$

$$\omega_z=\partial v/\partial x-\partial u/\partial y=-4a \tag{3.24}$$

である．流速は中心からの半径に比例して大きくなっており，流れの場全体が一体となって（剛体的に時計回りに）回転している流れ――“渦”――を表してい

る（図 3.6）．流体力学では，ただ単に中心のまわりに流れが回転していても必ずしも“流体力学的な渦”とはいわないが，式 (3.22) の表す流れは，“流体力学的な渦”である．流体力学で定義されている“渦”については，渦度の定義や速度ポテンシャルの存在に関連して §1.6 に述べた．さらにすすんだ“渦”についての議論は第 5 章で行う．

3.2 速度ポテンシャル

流れの数学的取扱いを容易にし，かつ流れの物理的イメージを明確にするものに，速度ポテンシャルがある．

a. 速度ポテンシャルの定義

ポテンシャルという言葉がある．“彼はポテンシャルが高い”などという．ポテンシャル (potential) を辞書で引くと，その第一義に“潜在(能)力のある”とある．一般力学，流体力学，電磁気学など物理学で用いるポテンシャルも，正にこの意味である．では，どんな潜在能力かといえば，“スカラー関数ながらベクトルを導く能力”を秘めているのである．

あるスカラー関数 $\Phi(x, y, z\,;\,t)$ があり，これを各座標軸の方向 (x, y, z) あるいはある任意の方向 l に微分すれば，その方向の流れの速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ の成分 (u, v, w) あるいは l 方向の速度成分 v_l が導かれるとき，このスカラー関数 Φ を（速度ベクトルを導く，あるいは生み出す能力を有するスカラー関数という意味で）**速度ポテンシャル** (velocity potential) という．

$$\boxed{\frac{\partial \Phi}{\partial x}=u, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y}=v, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial z}=w} \tag{3.25}$$

あるいは，

$$\frac{\partial \Phi}{\partial l}=v_l \tag{3.26}$$

b. 速度ポテンシャルの満たすべき式――ラプラスの方程式――

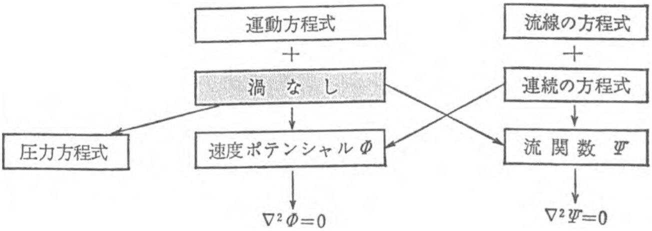
流れが非圧縮性流体の場合には，連続の方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

に速度ポテンシャルの定義式 (3.25) を代入すれば，速度ポテンシャル Φ がラプラスの方程式を満たすことが示される．

$$\boxed{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}=0} \tag{3.27}$$

表 3.1　速度ポテンシャル・流関数・圧力方程式および
ラプラスの方程式が導入される過程



あるいは，微分演算子ラプラシアン

$$\nabla^2(\equiv\Delta)\equiv\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \tag{3.28}$$

を用いて

$$\nabla^2\Phi=0 \tag{3.29}$$

式 (3.27) あるいは式 (3.29) を**ラプラスの方程式**という．

ここで注意すべきは，Φ の満たすべきラプラスの方程式 (3.27) は非圧縮性流体の連続の方程式と式 (3.25)――これは"渦なし"という運動学的条件と等価――から導かれ，運動方程式は直接的には用いられていないことである．

ラプラスの方程式は，速度ポテンシャルのほかに，静電場や引力場のポテンシャル，平衡状態にある温度分布，膜のたわみなど広範な物理現象を記述する基礎方程式である．この方程式は，与えられる境界条件に対して各瞬間に解が定まる数学的には楕円型と呼ばれる方程式である．いい換えると，境界に与えられた変化は瞬時にして場全体に波及するということである．

(注 3.2)　速度ポテンシャルについての記述とその存在の証明は，ラグランジュ (1781) によってなされたが，それは不完全なものであった．最初の厳密な記述は 1827 年（メモの日づけは 1815 年）コーシーによって行われ，さらにストークス (1845) により，歴史的展開についての優れた評論とともに，別の証明がなされた．

(注 3.3)　速度ポテンシャルの定義式の符号を式 (3.25) とは逆にして

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\partial\Phi/\partial x \\ -\partial\Phi/\partial y \\ -\partial\Phi/\partial z \end{pmatrix}$$

と与えている本もある．ラム (Lamb) の有名な古典流体力学の本（第 6 版最終版）では速度ポテンシャルの定義を上式としている．この場合には，圧力の作用と同様に，流れは速度ポテンシャルの高い方から低い方に起きる．しかし，現今の流体力学の慣用では，負符号をつけるわずらわしさを避けて速度ポテンシャルを式 (3.25) のように定義するのが普通

である．地下水流（一般的にいえば，多孔質媒体の中の流れ）の場合には，ピエゾ水頭（圧力水頭＋位置水頭）を速度ポテンシャルと定義する方が実感的であるので，上式の定義にしたがい負符号をつけるのが普通である．

例 3.3　流速分布からの速度ポテンシャルの求め方

例をあげよう．すでに前節で例にあげた流関数

$$\Psi(x, y)=axy=\mathrm{const} \tag{3.30}$$

で表される流れの場を考えよう．この流れ場の速度成分は流関数から，

$$u=\partial\Psi/\partial y=ax \tag{3.31 a}$$

$$v=-\partial\Psi/\partial x=-ay \tag{3.31 b}$$

である．まず，u と速度ポテンシャル Φ との関係

$$u=\partial\Phi/\partial x=ax \tag{3.32}$$

を x について積分すれば，

$$\begin{aligned}\Phi(x, y)&=\int(\partial\Phi/\partial x)\mathrm{d}x\\&=\frac{a}{2}x^2+c_1(y)\end{aligned} \tag{3.33}$$

である．ここに，$c_1(y)$ は積分定数で，積分は x について行われたからこれは y の関数である．

同様に，y 方向の速度成分 v と速度ポテンシャル Φ の関係

$$v=\frac{\partial\Phi}{\partial y}=-ay \tag{3.34}$$

を用いて積分すれば，

$$\begin{aligned}\Phi(x, y)&=\int v\,\mathrm{d}y=-\int ay\,\mathrm{d}y\\&=-\frac{a}{2}y^2+c_2(x)\end{aligned} \tag{3.35}$$

となる．したがって，(3.33)，(3.35) 両式から $\Psi(x, y)$ は，

$$\Phi(x, y)=\frac{a}{2}(x^2-y^2)+c \tag{3.36}$$

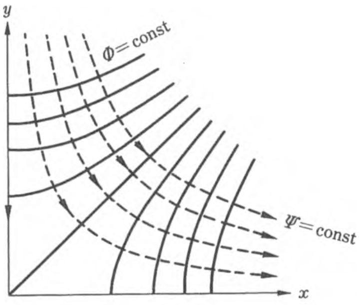


図 3.7

前に画いた流線 $\Psi(x, y)=\mathrm{const}$ の上に等ポテンシャル線 $\Phi=\mathrm{const}$ を重ねて画けば，等ポテンシャル線は流関数に直交する別の双曲線群であることがわかる（図 3.7）．

例 3.4 速度ポテンシャルが求まらない例

前節の例3.2で求めた流関数 $\Psi(x, y)=a(x^2+y^2)=\text{const}$ に対する速度ポテンシャルは，どうなるであろうか？ 上の例と同じように $u=\partial\Psi/\partial y=2ay$, $v=-\partial\Psi/\partial x=-2ax$ を積分して Φ を求めようとしてもうまくいかない．

実は，この流れ（渦）に対する速度ポテンシャルは存在しないのである．というのは，非圧縮性流体の二次元場では流関数は常に存在するが，速度ポテンシャルは常に存在するのではなく，次に示すように流れの場が“渦なし”であることが必要である．ところが，$\Psi=a(x^2+y^2)=\text{const}$ で表される流れは，“ランキンの渦モデル”（§1.6, §4.3.c）の等角速度回転の中心核の流れを表し，この部分は**“渦あり”**だからである．

$$\begin{aligned}\omega_z&=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)\\&=-4a\neq 0\end{aligned} \tag{3.37}$$

例 3.5 「渦なしうず」の Φ と Ψ を求める

上にある点（原点）を中心とする同心円運動の流れが速度ポテンシャルをもたない例を示した．しかし，同心円運動が常に速度ポテンシャルをもたない，つまり“渦あり”の流れというわけではない．渦度が零の“うず”，つまり**“渦なし”の“うず”**も存在する．むしろ，日常的に“うず”とみえる流体運動が，流体力学的には“渦ではない”ことが多い．本書ではこれを流体力学的な渦と区別するために“渦巻き”とでもいっておこう．

$$\left.\begin{array}{lll}\text{流体力学的渦} & \equiv\text{渦ありの渦} & \omega\neq 0\\ \text{流体力学的には非渦} & \equiv\text{渦なしの“うず”} & \omega=0\end{array}\right\} \tag{3.38}$$

速度成分 u, v が

$$u=Ky/(x^2+y^2) \tag{3.39 a}$$

$$v=-Kx/(x^2+y^2) \tag{3.39 b}$$

で表される流れの流速の大きさは，両式の二乗和の平方根から次のようになる．

$$\begin{aligned}q&=(u^2+v^2)^{1/2}\\&=K/(x^2+y^2)^{1/2}\end{aligned} \tag{3.40}$$

また，原点から点 (x, y) に向かうベクトル (x, y) とその点での速度ベクトル (u, v) の内積は，式(3.39 a, b)より零である．

$$(x, y)\cdot(u, v)=0$$

したがって，これら二つのベクトルは直交している．つまり，原点を中心とする同心円が流線である（図 3.8）．

この流れの渦度 $\omega_z=\partial v/\partial x-\partial u/\partial y$ は零，つまり“渦なし”の流れである．

$$\omega_z=K\left(-\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2}-\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

$$=K\left(-\frac{2}{x^2+y^2}+\frac{2}{(x^2+y^2)}\right)=0 \tag{3.41}$$

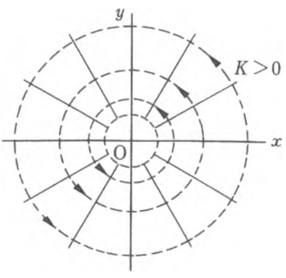


図 3.8

したがって，式（3.39 a, b）の流れは原点を中心とする同心円上では流速が一定で，その大きさは中心からの距離 r に逆比例する流れである．そして，先にあげた例とは異なり，渦度 $\omega_z=0$ の“渦なし流れ”である．この流れは，ランキンの渦モデルの中心核外の流れを表す．

この流れの速度ポテンシャル Φ および流関数 Ψ は，先に示した方法により（$u=\partial\Phi/\partial x=\partial\Psi/\partial y$ と $v=\partial\Phi/\partial y=-\partial\Psi/\partial x$ の積分から）次のように求まる．

$$\Phi(x,y)=\int u\,\mathrm{d}x=K\tan^{-1}\frac{x}{y}+c_1(y)$$

$$=K\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{y}{x}\right)+c_2(y) \tag{3.42}$$

$$=\int v\,\mathrm{d}y=-K\tan^{-1}\frac{y}{x}+c_3(x) \tag{3.43}$$

したがって，

$$\Phi(x,y)=-K\tan^{-1}y/x=-K\theta \tag{3.44}$$

ここに，

$$\theta=\tan^{-1}y/x \tag{3.45}$$

また，この流れの流関数は

$$\Psi(x,y)=\int\partial\Psi/\partial y\,\mathrm{d}y=\int u\,\mathrm{d}y=K\ln(x^2+y^2)^{1/2}+c_1(x)$$

$$=\int\partial\Psi/\partial x\,\mathrm{d}x=-\int v\,\mathrm{d}x=K\ln(x^2+y^2)^{1/2}+c^2(y)$$

したがって，

$$\Psi(x,y)=K\ln(x^2+y^2)^{1/2}=K\ln r \tag{3.46}$$

ここに,

$$r=(x^2+y^2)^{1/2}$$

c. 速度ポテンシャルの存在条件

（1） **運動学的存在条件――渦なし流れ**　以下のことは，三次元の場合にも成立するが，簡単のためにまず二次元で考えよう．もし，流れ場を表す速度ポテンシャル $\Phi(x,y)$ が存在すれば，

$$u=\partial\Phi/\partial x,\qquad v=\partial\Phi/\partial y \tag{3.47}$$

であるから，次式で表される量――渦度の z 成分 ω_z――は常に零である．

$$\begin{aligned}\omega_z&=\partial v/\partial x-\partial u/\partial y\\&=\partial^2\Phi/\partial x\partial y-\partial^2\Phi/\partial y\partial x\equiv 0\end{aligned} \tag{3.48}$$

三次元の流れでも，ポテンシャルが存在すれば，次式で定義される $\boldsymbol{\omega}=(\omega_x,\omega_y,\omega_z)$ は常に零となることが，式（3.25）の関係を代入すれば直ちに導かれる．

$$\left.\begin{aligned}\omega_x&=\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\equiv 0\\\omega_y&=\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\equiv 0\\\omega_z&=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\equiv 0\end{aligned}\right\} \tag{3.49}$$

先に述べたようにベクトル $\boldsymbol{\omega}$ を**渦度**といい，$\boldsymbol{\omega}$ が零の流れを**渦なし流れ**（**非回転流れ**，irrotational flow）という．よって，「速度ポテンシャルが存在」(A) することが“渦なし”(B) の十分条件（A→B）である．

逆に，流れが式（3.49）の条件を満たして“渦なし”であれば，速度ポテンシャル $\Phi(x,y,z)$ が必ず存在すること（B→A)，すなわち「速度ポテンシャルの存在」は“渦なし”の必要条件であることがいえる．なぜならば，流れが渦なしであれば，式（3.49）より，u,v,w の間には

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x},\qquad\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial y},\qquad\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial z}$$

の関係がある．これは微分方程式論で知られているように，

$$u\,\mathrm{d}x+v\,\mathrm{d}y+w\,\mathrm{d}z \tag{3.50}$$

がある関数（$\Phi(x,y,z)=\mathrm{const}$）の全微分

$$\mathrm{d}\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\mathrm{d}z=u\,\mathrm{d}x+v\,\mathrm{d}y+w\,\mathrm{d}z \tag{3.51}$$

であるための必要かつ十分な条件である．

上式より

$$u=\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad v=\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \qquad w=\frac{\partial \Phi}{\partial z} \tag{3.52}$$

すなわち，速度成分 u, v, w はスカラー関数 Φ より導かれる．このスカラー関数を速度ポテンシャルと呼ぶ．重要な点であるので，繰り返して述べると，

「“速度ポテンシャルが存在”すれば流れは“渦なし”であり」，また逆に，

「流れが**“渦なし”**ならば**“速度ポテンシャルが常に存在”**する．」

結局，**“渦なし”**ということは，“速度ポテンシャルが存在”するための必要十分条件であり，“渦なし”ということと“速度ポテンシャルが存在する”ということは等価である．逆に，流れ場が“渦あり”ならば，速度ポテンシャルは存在しない．

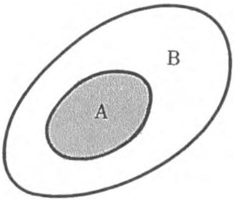


図 3.9　AはBの十分条件：A → B

（2） 力学的存在条件　流れが渦なしであれば，速度ポテンシャル Φ が存在し，完全流体の流れは Φ に関するラプラス (Laplace) の式を解くことに帰着し，問題は簡単化される．しかし，渦なしの条件は運動学的な条件であって，力学的な条件ではない．

それでは，どんな場合に速度ポテンシャルが存在し，流れが渦なしとなりうるのであろうか．すでに述べたように，オイラーの運動方程式の第一積分は

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v})=\boldsymbol{F}-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p-\operatorname{grad}\left(\frac{1}{2}q^2\right) \tag{3.53}$$

と書かれる．

流れが渦なし（$\boldsymbol{\omega}=0$）で，速度ポテンシャル Φ をもてば，上式は

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\Phi=\boldsymbol{F}-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p-\operatorname{grad}\left(\frac{1}{2}q^2\right) \tag{3.54}$$

となる．上式の右辺も grad の形になるためには次の要件が必要である．

（i） 外力がポテンシャルをもつこと

$$\boldsymbol{F}=-\operatorname{grad}\Pi \tag{3.55}$$

（ii） 流体がバルトロピー流体であること．したがって

$$\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p=\operatorname{grad} P=\operatorname{grad}\int\frac{dp}{\rho} \tag{3.56}$$

このとき，上式は

$$\mathrm{grad}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)=-\mathrm{grad}\left(P+\frac{1}{2}q^2+\Pi\right) \tag{3.57}$$

と書かれる．

したがって，力学的条件である運動方程式において渦なし流れが可能となる条件（速度ポテンシャルの存在条件）として，（i），（ii）が必要である．しかし，もちろん条件（i），（ii）が満たされれば流れの場が渦なしであるとは限らない．条件（i），（ii）は必要条件であるが十分条件ではない．

d. 非圧縮性流れの速度ポテンシャルについての考察

表 3.2

$\boxed{\omega=0\ （渦なし）}$

$\uparrow\ \downarrow$

$\boxed{\Phi\ （速度ポテンシャル）}$

流れが渦なしで，かつ非圧縮性であれば，$\boldsymbol{v}=\mathrm{grad}\,\Phi$ の関係と非圧縮性流体の連続の方程式とから，速度ポテンシャル Φ に関するラプラスの方程式が得られる．ここで注意すべきことがいくつかある．

（i） **線型化変数変換**：まず，基礎方程式であるオイラーの方程式は線型のラプラスの方程式となり，数学的には解を求めることが非常に容易になる．しかし，もとのオイラーの方程式中の $u\partial u/\partial x$ などの非線型項が消えたわけではなく，現象は非線型のままである．したがって，ポテンシャルの定義式 $\boldsymbol{v}=\mathrm{grad}\,\Phi$ は，オイラーの方程式を線型化する変数変換とみなすことができる．

（ii） **非線型性は圧力方程式に**：では，現象の非線型性は式の上から全く消えたのであろうか．否である．それは，ラプラスの式を解く場合の境界条件として残っている．後に水の波の場合について具体的に示されるが，この場合には自由表面における力学的境界条件（圧力方程式）と運動学的境界条件が非線型となっている．したがって，これらの境界条件を線型化して解を求めることになる．

（iii） **運動方程式はどこへ行ったか（Φ と p の方程式の分離）**：ラプラスの方程式は，渦なし条件による速度ポテンシャルの定義式と連続の方程式から導かれ，運動方程式は関与しなかった．では，ポテンシャル流れの記述には運動方程式は関係がないのだろうか．これも否である．実は，すでに§3.2.c.(2) において述べたように，渦なし条件つまり速度ポテンシャルの存在条件は，運動方程式を介して保証される．では運動方程式はどうなったであろうか．運動方程式の第一積分（圧力方程式，一般化されたベルヌーイの定理）が運動方程式を速度ポテンシ

ャル Φ に関して表したものである．したがって，非圧縮性流体の渦なし流れでは，基礎方程式系が速度を求めるためのラプラスの方程式と圧力を求めるための圧力方程式に分離されたことになる．

$$\nabla^2\Phi=0$$

$$\frac{p}{\rho}=-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{q^2}{2}+\Pi\right)+F(t)$$

（iv） **流速場は瞬時に決まる**：ポテンシャル流れの基礎方程式は Φ に関するラプラスの方程式であり，この方程式は時間 t に関する Φ の微分項 $\partial\Phi/\partial t$ を含まない．ラプラスの式は，楕円型の偏微分方程式に分類され，これを解くための境界条件は領域の全周で与えられる．したがって，ポテンシャル流れでは，流れの境界で与えられた Φ に関する条件の影響が一瞬にして流れの全域に伝わり，過去の歴史には無関係に各瞬間瞬間で境界条件に対応した流れ場が決まる．したがって，境界条件が同じならば，定常流でも非定常流でも流れのパターンは同じである．ただし，完全流体の渦なし流れに対するベルヌーイの定理（圧力方程式）が $\partial\Phi/\partial t$ の項を含むから，同じ流線パターンの流れであっても圧力 p は流れが定常か非定常かで異なる．

3.3 流線と等ポテンシャル線

a. 流線と等ポテンシャル線の直交性

流れの場を“渦なし”と仮定しよう．したがって，速度ポテンシャル $\Phi(x, y, z)$ が存在する．等ポテンシャル面の式

$$\Phi(x, y, z)=\text{const} \tag{3.58}$$

の全微分をとれば，

$$\mathrm{d}\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\cdot\mathrm{d}x+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\cdot\mathrm{d}y+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\cdot\mathrm{d}z=0 \tag{3.59}$$

ここで，

$$\mathrm{d}\boldsymbol{t}=(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z) \tag{3.60}$$

また，

$$\boldsymbol{v}=(\partial\Phi/\partial x,\ \partial\Phi/\partial y,\ \partial\Phi/\partial z) \tag{3.61}$$

と書くと，式（3.59）は二つのベクトル $\mathrm{d}\boldsymbol{t}$ と $\boldsymbol{v}$（速度ベクトル）が直交している

ことを表している．dt は等速度ポテンシャル面（Φ=const）上の微小線要素，すなわち等速度ポテンシャル線（面）上の接線ベクトルであるから，上式は等ポテンシャル線（面）と流線（および速度ベクトル）が直交していることを表している（図 3.10）．

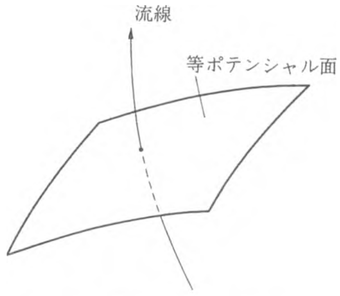


図 3.10 等ポテンシャル面と流線の直交（三次元）

流関数と等ポテンシャル線：非圧縮性流体の二次元流れには流関数が常に存在し，流れが“渦なし”ならば，流関数 $\Psi(x, y, t)$=const の線と等ポテンシャル線 $\Phi(x, y\,; t)$=const は直交する．図 3.11 に現実に起こる流れの流線と等ポテンシャル線の例を示す．

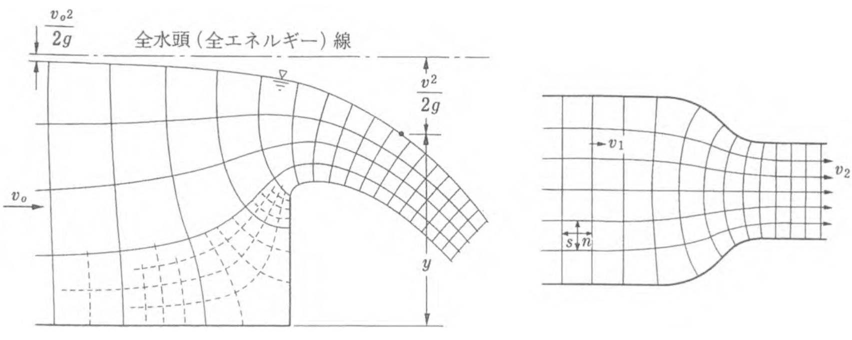


図 3.11 等ポテンシャル線と流線の直交

b. 速度成分の積分と Φ および Ψ

渦なし流れ場では，任意の点 A から B への曲線 l に沿う流速成分 $v_l = q\cos\theta$ の積分 Γ_{AB} は，§ 1.7.b に示したように曲線の径路には無関係である（ここに，θ は曲線の線要素 dl と流線のなす角）（図 3.12）．この値を $\Phi - \Phi_A$ とおくと，図 3.12 を参照して曲線 AB の線要素 dl の流速方向の成分が $ds = dl\cos\theta$ であることから，

$$\Phi - \Phi_A = \int v_l \, dl \tag{3.62}$$

$$= \int (q\cos\theta)\, dl$$

$$= \int q \, ds$$

したがって，

$$q=\frac{\partial \Phi}{\partial s}, \qquad v_l=\frac{\partial \Phi}{\partial l} \tag{3.63}$$

すなわち，v_l の曲線 AB に沿う積分 Γ_{AB} は速度ポテンシャルとなっている．

$$\Gamma_{AB}=\Phi_B-\Phi_A \tag{3.64}$$

また，速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ の曲線 AB への法線方向の成分を $v_n(=q\sin\theta,\ q=|\boldsymbol{v}|)$ とすると，曲線 AB に沿う v_n の積分 Ψ は，

$dn=ds\cdot\sin\theta$ より

$$\Psi=\int v_n dl \tag{3.65}$$

$$=\int (q\sin\theta)dl$$

$$=\int q\,dn$$

となる．したがって，

$$q=\frac{\partial \Psi}{\partial n} \tag{3.66}$$

ここに，n は流線への法線方向を表す．

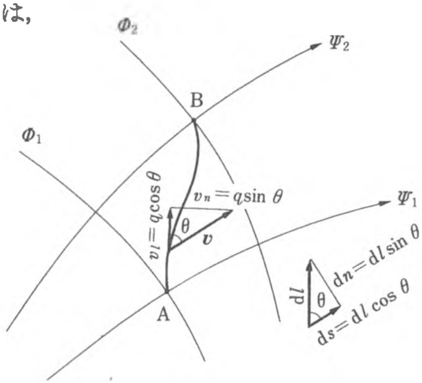


図 3.12

コーシー——病弱のため数学者に転向した若者

(Augustin-Louis de Cauchy, 1789—1857)

コーシーは土木技術者になろうとしてなれなかった病弱青年である．話はこうである．1789 年に始まるフランス大革命の成功後，列国のフランス共和制政府に対する干渉圧力はすさまじかったが，新生の意気に燃える国民国家フランスは戦術の天才ナポレオンのもと近隣のヨーロッパ諸国に対して次々と勝利をおさめていった．勝に乗るナポレオンはドーバー海峡を一気に押し渡ってイギリスをも征服しようともくろんでいた．このためには大量の兵員物資を海を渡って輸送しなければならず，港湾整備が急務であった．若いコーシーはこの戦いに工兵隊として参加すべく，École Polytechnique (1807)，École des Ponts et

Chaussées (1810) に入学した．しかし，生来の病弱のため軍人になることはとても無理であった．彼の教師であったラグランジュやラプラスはいち早くコーシーの数学の才を認め，数学への転向を勧めたのであった．

コーシーの名は流体力学ではポテンシャル流れの理論における等角写像に関連してコーシー－リーマンの定理として現れる．コーシーは多才で解析学を本領とし微分積分の基礎，複素関数論の主定理の証明，微分方程式の解の存在証明などのほか，代数学の行列式論，群論での先駆的業績，理論物理学の分野では光学や弾性学の研究もある．Académie des Science 会員 (1816)，École Polytechnique 教授，Sorbonne 教授を務めた．

ナポレオンの時代，ナポレオンの学問好き学者好きもあってフランスには数々の学者特に数学者が輩出した．ラプラス，ラグランジュ，フーリエなどは直接ナポレオンに引き立てられて爵位を授けられている．コーシーもそうした時代を背景に活躍した一人である．