

20. 非等方性乱流

§ 19.2 に述べた等方均一乱流場は、いわば一つの理想乱流である。しかし、ここで導入された乱流構造についての種々の概念は、実際の流れの乱れの間を理解する上にも有用である。乱れは、粘性の作用による剪断作用のほか、熱的効果(対流)によっても生じる。前者を機械的作用による乱れ (mechanical turbulence)、後者を熱的作用による乱れ (thermal turbulence) と呼んでいる。機械的乱れの間は、壁面の有無によりその性質を異にする。

20.1 円管流の乱れ (壁面乱流 1)

管路では流れが壁で囲まれており、壁面での粘性の影響は管路流の全断面に及んでいる。開水路でも流れは壁面と自由表面に囲まれており事情は同じである。壁面での粘性の作用による乱流を、壁面乱流 (wall turbulence) という。

a. 軸対称流れのレイノルズ方程式

流軸に沿い x 軸、半径方向に r 軸、円周方向の位置を θ で表す。それぞれの方向の速度成分を $u = \bar{u} + u'$, $v = \bar{v} + v'$, $w = \bar{w} + w'$ とする。ここに、 $\bar{}$ はアンサンブル平均値[†], $'$ は乱れ成分を意味する。ナビエ-ストークスの方程式に上の関係式を代入し統計的 (定常流ならば時間的) に平均して得られるレイノルズ方程式 (平均速度成分と乱れの非線型作用であるレイノルズ応力に関して書かれたもの) は次のようになる。

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \frac{\bar{w}}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta} \right) &= \rho F_x - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \\ &+ \mu \nabla^2 \bar{u} - \rho \left(\frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \overline{ru'v'}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial \theta} \right) \\ \rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} + \frac{\bar{w}}{r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} - \frac{\bar{w}^2}{r} \right) & \end{aligned}$$

[†] 一般には、 n ($n \rightarrow \infty$) 回の同一条件のもとでの観測値 $u_n(t)$ の平均値をさすが、流れが統計的定常状態にあれば、 \bar{u} は時間的平均 $\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^{t+T} u(t) dt$ ($T \rightarrow \infty$) に等しい。

$$\begin{aligned}
 &= \rho F_r - \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} + \mu \left(\nabla^2 \bar{v} - \frac{\bar{v}}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \theta} \right) \\
 &\quad - \rho \left(\frac{\partial \bar{u}'v'}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \bar{v}'^2}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v'w'}{\partial \theta} - \frac{w'^2}{r} \right) \\
 &\rho \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial r} + \frac{\bar{w}}{r} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \theta} + \frac{\bar{v}w}{r} \right) \\
 &= \rho F_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} + \mu \left(\nabla^2 \bar{w} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} - \frac{\bar{w}}{r^2} \right) \\
 &\quad - \rho \left(\frac{\partial w'u'}{\partial x} + \frac{\partial v'w'}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w'^2}{\partial \theta} - \frac{2v'w'}{r} \right)
 \end{aligned} \tag{20.1}$$

ここに、

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

定常な十分に発達した円管流の場合には、 $\bar{v} = \bar{w} = 0$ であり、速度の平均値および乱れの二次モーメントの $\partial/\partial \theta$, $\partial/\partial x$ もまた零である。ゆえに、上式は

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho \bar{u}'v') + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right) \tag{20.2}$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho \bar{v}'^2) + \rho \frac{\bar{w}'^2}{r} \tag{20.3}$$

となる。ここに、重力項は省略した。上式の第二式を x に関して偏微分すれば、

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial x \partial r} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right) = 0 \tag{20.4}$$

すなわち、圧力勾配 $\partial \bar{p}/\partial x$ は断面内で一様である。

次に、式 (20.2) に r を掛けたのち、 r について積分すれば次の関係が得られる。

$$\frac{r^2}{2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = -r \left(\rho \bar{u}'v' - \mu \frac{d\bar{u}}{dr} \right) + A(x) \tag{20.5}$$

ここで、 $r=0$ において上式を適用すれば、 $A(x)=0$ でなければならないことはすぐわかる。上式の右辺の第一項で、 $\rho \bar{u}'v' = -\rho \bar{u}'v_1'$ (v_1' は $y=a-r$ と座標変換をし、壁面から管中心に向かって r 軸のかわりにこれと逆方向に y 軸をとった場合の速度成分) はレイノルズ応力、 $-\mu d\bar{u}/dr = \mu d\bar{u}/dy$ は粘性による剪断応力である。

つまり、式 (20.5) の右辺はこの二項の和として表される剪断応力 τ である。

$$\begin{aligned}
 \tau &= -\mu \frac{d\bar{u}}{dr} + \rho \bar{u}'v' \\
 &= \mu \frac{d\bar{u}}{dy} - \rho \bar{u}'v_1'
 \end{aligned} \tag{20.6}$$

式 (20.5) は管中心より半径 r , x 方向に単位長さの円柱部分に働く圧力と剪断応力とのつりあいを表している。

$$\tau = -\frac{r}{2} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right) \tag{20.7}$$

一方、式 (20.7) において、 $r=a$ (壁面) を考えると、圧力勾配と壁面剪断応力 τ_0 との関係が得られる。

$$\left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}\right) = -\frac{2\tau_0}{a} \quad (20.8)$$

式 (20.7) と式 (20.8) より、剪断応力が断面内で直線分布をなしていることが導かれる。

$$\tau = \frac{r}{a}\tau_0 = \left(1 - \frac{y}{a}\right)\tau_0 \quad (20.9)$$

ここに、壁面剪断応力 τ_0 は、次のように表される。

$$\tau_0 = -\mu\left(\frac{d\bar{u}}{dr}\right)_{r=a} = \mu\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)_{y=0} \quad (20.10)$$

式 (20.6), (20.9) よりレイノルズ応力 $-\overline{\rho u'v_1'}$ の分布は次のようになる。

$$-\overline{\rho u'v_1'} = \left(1 - \frac{y}{a}\right)\tau_0 - \mu\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right) \quad (20.11)$$

式 (20.3) を r について積分すれば、管内の平均圧力について

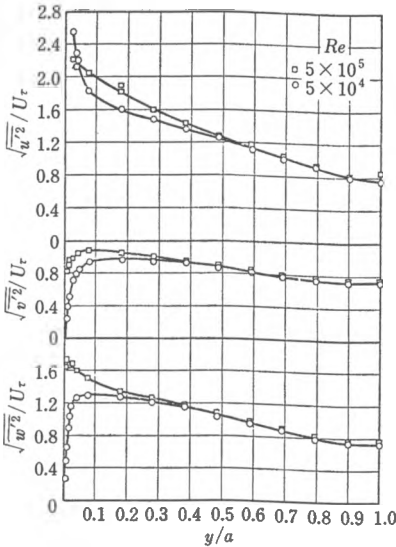
$$\bar{p}(x, r) = \bar{p}_0(x) + \overline{\rho v'^2} + \rho \int_r^a \frac{\overline{v'^2} - \overline{w'^2}}{r} dr \quad (20.12)$$

を得る。ここに、 $\bar{p}_0(x)$ は管壁の圧力。上式は、管内の局所圧力と壁面圧力とは、乱れの作用分だけわずかに異なることを表している。 x 軸に垂直な乱れの成分 $\overline{v'^2}$ と $\overline{w'^2}$ が圧力と同一の式 (20.12) に含まれ、乱れによる剪断応力 $\overline{\rho u'v'}$ が平均流速と同じ式 (20.11) に含まれるのは興味ある点である。

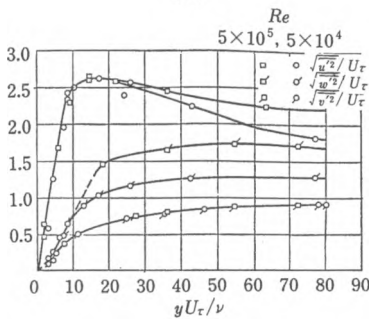
b. 円管乱流の乱れの分布

円管内の乱流構造の詳細な実測はラウファ (Laufer, 1953) により初めて行われた。図 20.1 に乱れの r.m.s. (標準偏差; 二乗平方根) と摩擦速度 U_τ 比の分布を示す。流体塊の運動は半径方向には壁面により束縛されているが、円周方向には束縛はやや少なく、流れの方向にはより自由である。したがって、各点での乱れの強さは $\overline{v'^2} < \overline{w'^2} < \overline{u'^2}$ であることが予想されるが、図はそれが正しいことを示している。壁面上では乱れは零であるが、これよりわずかに離れた所で乱れの強さは最大となり、管軸に向かって減少する。しかし、管中心でも乱れの r.m.s. は零ではなく、 u', v', w' の三成分ともほぼ同一の大きさとなっている。

式 (20.11) に示したように、剪断応力の分布は直線的に変化し、レイノルズ応力はこれより粘性の影響 $\mu(d\bar{u}/dy)$ を差し引いたものである。流速分布はすでに



(a)



(b)

図 20.1 円管乱流の乱れの分布 (Laufer)

$\mu(\partial \bar{u}/\partial y)^2$, direct viscous dissipation), 残る部分はレイノルズ応力の作用により乱れのエネルギーに変換され ($P_r = -\rho \overline{u'v_1'}(\partial \bar{u}/\partial y)$, turbulent energy production rate), 次項に述べる過程を経て消散されることを表す。

このことを示すために、管中心より半径 r 、流下方向に単位長さをもつ円筒部分を考える。この流体部分に平均流より働く力は、円筒部分の前後の面の圧力差と円筒側面の剪断応力 τ である。これらの力のなす単位時間あたりの仕事は

$$W(r) = \int_0^r 2\pi r \left(-\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right) \bar{u} dr - 2\pi r \tau \bar{u} \quad (20.14)$$

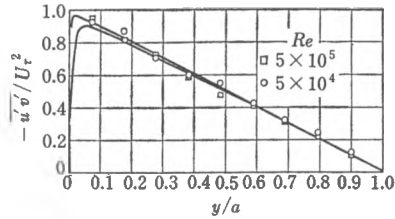


図 20.2 円管乱流のレイノルズ応力の分布 (Laufer)

15章で求めたように、対数分布則にしたがうから、レイノルズ応力分布を計算で求めることができる。式 (20.11) の右辺第二項より計算される粘性応力は壁面近傍でのみ重要であり、直線分布をなす剪断応力はほとんどレイノルズ応力によるものであることがわかる。

c. 乱れエネルギーの生産

式 (20.6) の両辺に $du/dy (= -d\bar{u}/dr)$ を乗ずれば、次のようになる。

$$\tau \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right) = \mu \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2 - \rho \overline{u'v_1'} \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right) \quad (20.13)$$

この式は流体塊が単位体積単位時間あたりに失う平均流のエネルギー (左辺 $\tau(d\bar{u}/dy)$) が、一部分は直接粘性の作用により熱エネルギーに変換され ($W_\mu =$

である。したがって、

$$dW = \frac{dW}{dr} dr = \left\{ 2\pi r \bar{u} \left(-\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right) - 2\pi \bar{u} \left(\frac{d}{dr} r \tau \right) - 2\pi r \tau \frac{d\bar{u}}{dr} \right\} dr \quad (20.15)$$

式 (20.8) および式 (20.9) の関係を dW の右辺に代入すれば、

$$dW = -2\pi r \tau \frac{d\bar{u}}{dr} \cdot dr = \left(\tau \frac{d\bar{u}}{dy} \right) \cdot 2\pi r dr \quad (20.16)$$

となり、 $\tau(d\bar{u}/dy)$ が平均流のなす仕事率であることが示される。

図 20.3 は、式 (20.13) の右辺の各項を $\rho U_\tau^4/\nu$ で割り、無次元化したものの計算値と実験値の比較である。直接的粘性消散 (W_μ) は、ほとんど粘性底層内の狭い領域 $y^+ = yU_\tau/\nu < 15$ で生じており、また乱れのエネルギー生産 (P_r) は粘性底層の外縁 $\delta_s = 11.6$ で最大で、かつ、この値は直接的粘性消散と等しい。

d. 乱れのエネルギー方程式

運動方程式の各式にそれぞれ u, v, w

を掛け、さらに速度成分と圧力とを平均値と変動成分の和に書き改めたのち平均をとり、三式を加え合わせると“乱れのエネルギー方程式”が得られる (von Karman, 1937; Laufer, 1953).

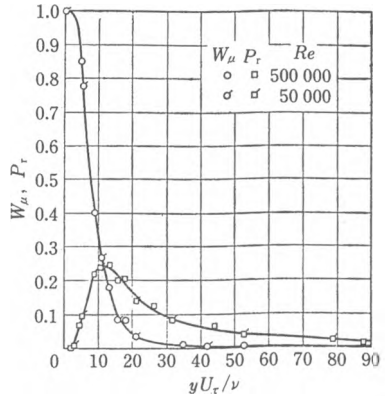


図 20.3 円管乱流におけるエネルギー消散—直接的粘性消散 W_μ と乱れのエネルギー生産 P_r (Laufer)

$$\begin{array}{c}
 \underbrace{-\overline{u'v'} \frac{d\bar{u}}{dr}}_{P_r \text{ (乱れ生産率)}} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \overline{v' \left(\frac{u'^2 + v'^2 + w'^2}{2} + \frac{p'}{\rho} \right)} \\
 \underbrace{-\frac{\nu}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} \left(\frac{u'^2 + v'^2 + w'^2}{2} \right)}_{GD \text{ (勾配拡散項)}} + \underbrace{\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)}_{W_\mu \text{ (消散項)}} \quad (20.17)
 \end{array}$$

ここに、上式右辺の最後の項の $x_j, u_i (i, j = 1, 2, 3)$ は極座標 (x, r, θ) およびその方向の速度成分を表し、また $(\partial u_i / \partial x_j)$ $(\partial u_i / \partial x_j)$ は添字 i, j の可能なすべての組合せについての項の和をとること (これをアインシュタイン和という) を意味

する。

式 (20.17) の左辺は、すでに述べたようにレイノルズ応力による乱れのエネルギーの生産率 (turbulent energy production rate: P_T) を表し、右辺の各項はそれがどのように変化するかを表している。右辺の第一項は運動および圧力のエネルギーが壁面に垂直な乱れの成分 v' により輸送されることによる変化率を表し、拡散項 (diffusion term: D) と呼ばれる。右辺の第二項は乱れエネルギーの勾配による拡散 (gradient type diffusion: GD) で、壁面近くにおいてのみ重要である。第三項は、粘性の作用により乱れのエネルギーが熱エネルギーに変換する割合 (turbulent energy dissipation: W_T) を表している。

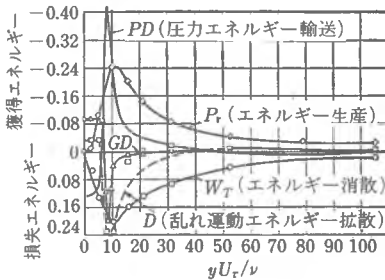


図 20.4 円管乱流の壁面近傍の乱れのエネルギー過程 (Laufer)

したがって、平均流の失うエネルギーは、一部は壁のごく近傍で直接的粘性消散により熱に、他の一部はやはり壁面の近くで一度乱れのエネルギーに変換されたのち、管中心へと乱れの作用により輸送されつつ、乱れによる粘性消散のために熱エネルギーに変わる。図 20.4 は、壁面近くの乱れエネルギーの平衡関係についての実験結果である。これによれば、

ば、

(i) 管の中心部を除いて、管断面のほとんどすべての点において、乱れのエネルギーの生産 (P_T) と乱れによるエネルギー消散 (W_T) とはほぼつりあっている。

(ii) 乱れのエネルギーの変化率の項は、すべて粘性底層の外縁 $y^+ (=yU_\tau/\nu) \approx 10$ 付近で鋭い極値をとる。

(iii) この領域から管中心および管壁に向かって乱れの運動エネルギーが輸送され、またこの領域へ圧力変動エネルギーが運ばれている。

こうした壁面近くの乱れの特性は、円管以外の管路や開水路、次に述べる平板の境界層のような壁面乱流に共通するものである。

20.2 壁に沿う乱流境界層 (壁面乱流 2)

平板や壁面に沿う乱流境界層は、一方では壁面近くで強い速度勾配をもち、こ

ここで乱れのエネルギーが生産される点で前節の管路の壁面乱流に近い。しかし、境界層の外側はポテンシャル流であり、運動の束縛がなく次項に述べる噴流や後流のような自由乱流に近い性質をもつ (図 20.5)。

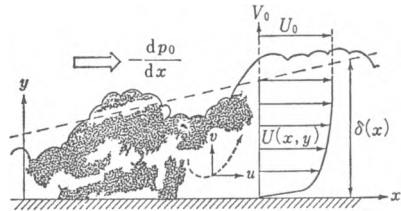
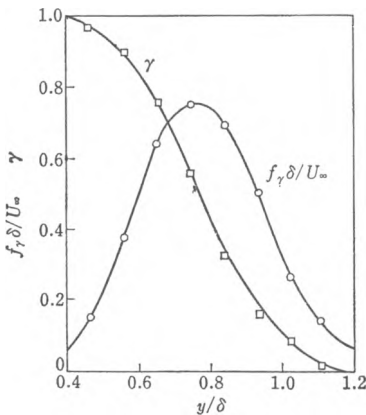


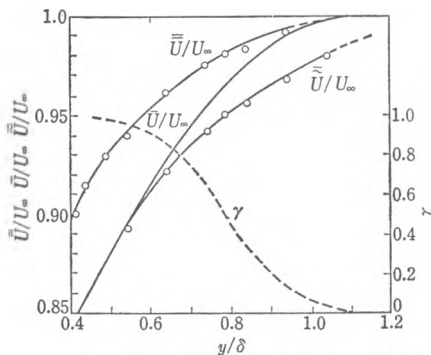
図 20.5 平板に沿う乱流境界層 (Tennekes-Lumley, MIT Press)

乱流境界層内の流速変動のシグナルを

見ると、壁面近くでは管内乱流と同様に激しい速度変動が記録されるが、境界層外縁に近づくと流速度変動が小さくなるだけでなく、激しい乱流運動を示す区間と層流のようにほぼ一定の速度が持続する区間とが交互に出現し、壁から離れるにつれて一定時間の間に層流部分の占める割合が多くなることが観測される (図 20.9)。この一定時間内に占める乱流変動の時間の割合を間欠率 (intermittency factor) γ と呼んでいる。図 20.6(a) 中の f_r は単位時間あたりの間欠性の出現度数である。このような測定から、乱流境界層は図 20.5 に示すように、乱流部分と非乱流部分との間にかなりはっきりした境界があり、これが大きな渦により境界層内に入り込んだり、逆にポテンシャル流部へ侵入したりしていることがわかる。この境界面は平均位置が 0.78δ (δ : 境界層厚さ) であり、



(a) 乱流境界層の間欠率 γ と間欠周波数 f_r の分布



(b) 乱流境界層内の平均流速 (\bar{U}/U_∞), 乱流期の平均流速 ($\bar{\tilde{U}}/U_\infty$) および非乱流期の平均流速 (\bar{U}/U_∞) の分布

図 20.6 (Kovaszny ほか, 1970)

そこを中心にして内側には 0.4δ 、外側には 1.2δ の範囲で変動している。

図 20.7 は、乱流境界層内の乱れのエネルギーおよび乱れ成分の二乗平均と摩擦速度の二乗との比の断面内の分布である。 $\overline{u'^2}/U_\tau^2$ 、 $\overline{v'^2}/U_\tau^2$ 、 $\overline{w'^2}/U_\tau^2$ の値は壁面近くでは、管内乱流の場合の値とほぼ等しいが、境界層の外縁近くではこの値

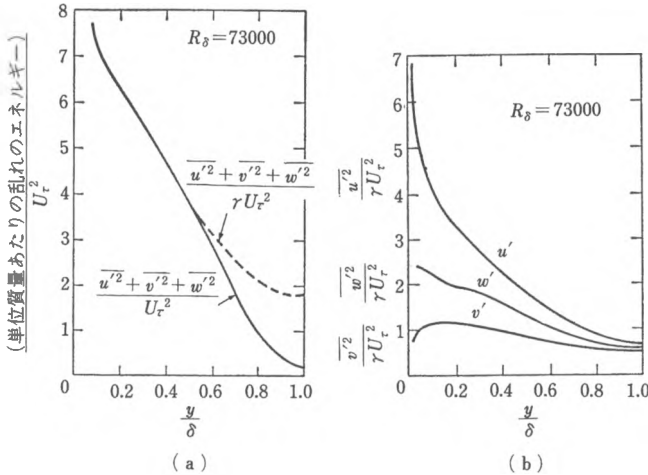


図 20.7 乱流境界層内の乱れのエネルギー (a) と乱れの強さ (b) の分布

は急激に小さくなっている。しかし、乱流境界層の外縁では乱流運動をしているのは観測時間のうち γ (間欠率) の割合であることを考えて、乱流運動区間のみの値として $\overline{u'^2}/\gamma U_\tau^2$ などの値をとると前節に述べた管内乱流の乱れエネルギーの分布とほぼ同一になる。

ここで壁面より離れた乱流境界層外縁領域での平均流速分布が、壁面近くの対数分布則からずれていたことを思い出されたい。図 20.6(b) は乱流状態にある時間の平均流速 (\overline{U}) と非乱流状態の区間の流速の平均値 (\bar{U}) および全平均流速 (\bar{U}) の分布である。明らかに非乱流の状態では流速が大きくなっていることが示されている。

20.3 噴流および後流 (自由剪断乱流)

噴流や後流あるいは速度の異なる二つの流れによる混合層などの剪断流では乱流運動を束縛する壁面は存在しない。こうした乱流を自由剪断乱流 (free shear

turbulence) と呼んでいる。前節の乱流境界層の外縁領域と同じように、自由剪断乱流は図20.8, 20.9に示すような乱流運動領域とポテンシャル流領域とを明確に分ける境界面（これを壁面乱流の sublayer に対して、superlayer と呼ぶことがある）がランダムに入りこんでいる。

図 20.10(a) は後流の乱れの分布を示すものである。乱れの強さの極大値は流軸上にはなく、これを少しはずれた位置にあり双頭峰（double peak）を形作っ

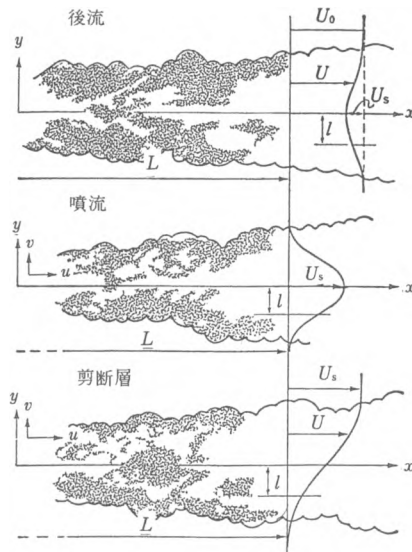


図 20.8 自由乱流 (Tennekes-Lumley, MIT Press)

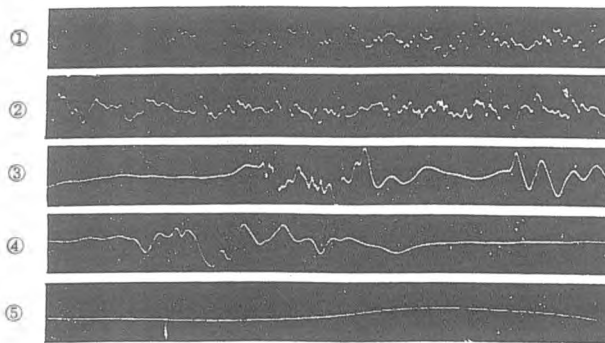


図 20.9 自由乱流（軸対称噴流）の乱れの間欠性 (Corrsin, 1943)

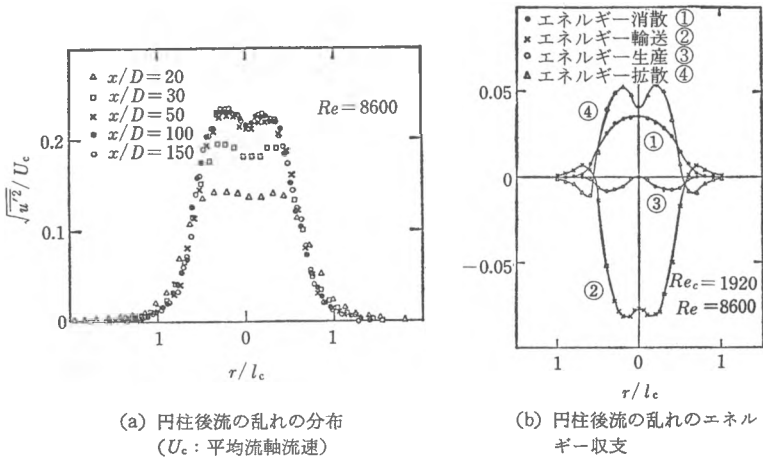


図 20.10

ている。図 20.10(b) は後流のエネルギー収支過程を示すもので、円管流の場合の図 20.4 と対比される。