

7

不等速運動機構

non-uniform speed mechanisms

7・1

不等速運動機構の活用

usage of non-uniform speed mechanisms

不等速運動機構¹⁾とは、等速回転入力運動を変換して、不等速な出力運動を得る動力伝達要素である。6章の歯車伝動、送りねじなどでは出力運動は入力運動に比例しているが、不等速運動機構では、等速回転入力に対して往復直動出力などを得る。次章で詳しく説明するアクチュエータの中で最も多用される回転型の電磁モータは等速運転を行う制御は比較的容易であり、高効率でもある。したがって、特に周期性のある不等速運動を創成する場合には、等速回転する電磁モータにより不等速運動機構を駆動することにより、コンピュータ制御などの複雑な制御を行うことなく、安価でかつ信頼性の高い機械システムを設計できる。

さらに重要なことは、高い駆動速度を得られることである。電磁モータを正逆転させる場合は高い応答性は得られないが、一方向に等速に高速回転させるのは容易であり、不等速運動機構を用いることによって、高速の不等速運動を創成することが可能である。ただしこのとき、不等速運動機構の各要素に作用する慣性力により、モータには大きなトルク変動を生じるとともに、各要素を結合する軸受にも大きな動的力が生じるため、モータの動力不足や軸受の破壊を呼ぶ恐れもある。そこでそれらを考慮した設計が重要となる。

本章では、不等速運動機構の代表的な例として、平面リンク機構と板カム機構を取り上げ、それらの運動学解析と動力学解析を踏まえた機構設計手法を解説する。

本章で扱う内容のサンプルプログラムは、オーム社ホームページの書籍紹介ページよりダウンロードすることができます。

7・2

平面リンク機構
planar link mechanisms

7・2・1

平面リンク機構の運動解析
kinematic analysis of planar link mechanisms

例として図7・1に示す4本のリンク（節ともいう）が回転対偶（2本のリンク間の相対回転のみを許容する機械要素，いわゆる回転軸受である） $J_0 \sim J_3$ で連結された平面4節リンク機構（planar 4-bar link mechanism）を取り上げる。この機構は，回転モータを対偶 J_0 に配置して，等速回転させることにより，節 J_3J_2 が揺動運動を行い，中間節 J_1J_2P 上の点 P が軌跡曲線（中間節軌跡という）を描く。これらのいずれかを出力運動とすることを考える。

原動節 J_0J_1 の角変位（入力角変位） θ に対する，節 J_3J_2 の揺動角 ϕ ，点 P の位置 (X_P, Y_P) を求めるために，機構の各部を分割して計算する，汎用的かつ系統的な運動学解析²⁾を行う。

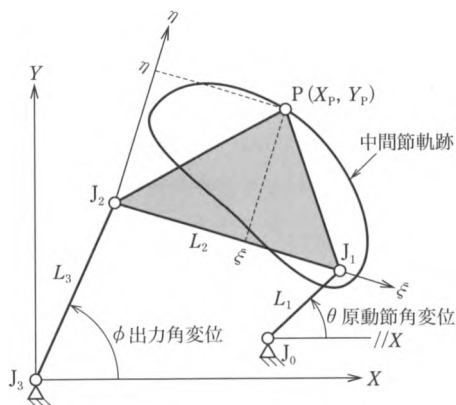


図7・1 平面4節リンク機構

(1) 回転原動節の運動

図7・2の姿勢角 ψ の節に対して，長さ L の節 AB に，能動回転対偶 $A(X_A, Y_A)$ により相対角変位 θ を与えよときの対偶 B の変位 (X_B, Y_B) は次式で計算できる。

$$\begin{bmatrix} X_B \\ Y_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L \cos(\theta + \psi) + X_A \\ L \sin(\theta + \psi) + Y_A \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

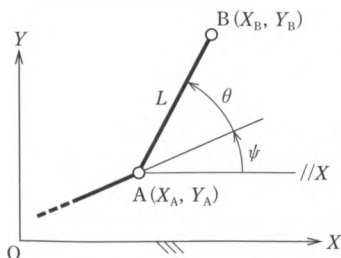


図7・2 回転原動節

さらに，速度，加速度は式(7・1)を時間微分して，次式となる。

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_B \\ \dot{Y}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L(\dot{\theta} + \dot{\psi})\sin(\theta + \psi) + \dot{X}_A \\ L(\dot{\theta} + \dot{\psi})\cos(\theta + \psi) + \dot{Y}_A \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{X}_B \\ \ddot{Y}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L[(\ddot{\theta} + \ddot{\psi})\sin(\theta + \psi) + (\dot{\theta} + \dot{\psi})^2 \cos(\theta + \psi)] + \ddot{X}_A \\ L[(\ddot{\theta} + \ddot{\psi})\cos(\theta + \psi) - (\dot{\theta} + \dot{\psi})^2 \sin(\theta + \psi)] + \ddot{Y}_A \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

つまり節 AB が接続されている節の姿勢角と対偶 A の変位とそれらの時間微分値と、節 AB の長さと同動節角変位とその時間微分値を与えれば、対偶 B の変位とその時間微分値が求められる。

ここで、図 7.1 の機構に対応させると、対偶 J_0, J_1 がそれぞれ対偶 A, B に、節長 L_1 が L に対応し、原動節 J_0J_1 が接続される節の姿勢角は $\psi = 0$ である。

この計算過程を以下の記号で表し、

$$(X_A, Y_A), \psi \xrightarrow[\theta]{L} (X_B, Y_B)$$

サブプログラム `crank_input` としてプログラム記述しておく。上記の記号表現では、 X_A, Y_A, ψ, θ などの変数については、それらの時間微分値も考慮していることに注意する。

(2) 回転対偶で連結された 2 節の運動

図 7.3 の実線で表される回転対偶 C で連結された長さ L_A, L_B の 2 節の両端の対偶 A, B の運動が与えられた場合に、対偶 C の運動を求める。対偶 A, B を結ぶ線分の姿勢角を α とし、 $\angle BAC$ を β とすれば、対偶 C の変位、速度、加速度は、それぞれ次式で計算できる。

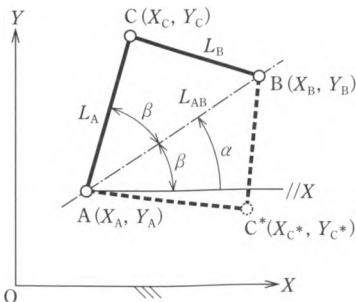


図 7.3 回転対偶で連結される 2 節の運動

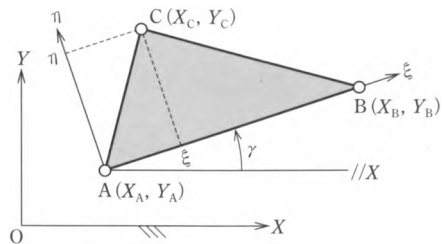


図 7.4 節上の点の運動

$$\begin{bmatrix} X_C \\ Y_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_A \cos(\alpha \pm \beta) + X_A \\ L_A \sin(\alpha \pm \beta) + Y_A \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_C \\ \dot{Y}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_A(\dot{\alpha} \pm \dot{\beta}) \sin(\alpha \pm \beta) + \dot{X}_A \\ L_A(\dot{\alpha} \pm \dot{\beta}) \cos(\alpha \pm \beta) + \dot{Y}_A \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{X}_C \\ \ddot{Y}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_A[(\ddot{\alpha} \pm \ddot{\beta}) \sin(\alpha \pm \beta) + (\dot{\alpha} \pm \dot{\beta})^2 \cos(\alpha \pm \beta)] + \ddot{X}_A \\ L_A[(\ddot{\alpha} \pm \ddot{\beta}) \cos(\alpha \pm \beta) - (\dot{\alpha} \pm \dot{\beta})^2 \sin(\alpha \pm \beta)] + \ddot{Y}_A \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

式(7.4)～(7.6)中の複合同順は、正号が図7.2の対偶Cのもの、負号が図中の破線の節で表せる線分ABについて線対称位置にある対偶C*のものである。対偶A、Bの運動に対して、2節を連結する対偶位置は2種類存在することに注意する。

さらに、式中の角 α 、 β とそれらの時間微分値を求める。

$$\Delta X = X_B - X_A, \quad \Delta \dot{X} = \dot{X}_B - \dot{X}_A, \quad \Delta \ddot{X} = \ddot{X}_B - \ddot{X}_A$$

$$\Delta Y = Y_B - Y_A, \quad \Delta \dot{Y} = \dot{Y}_B - \dot{Y}_A, \quad \Delta \ddot{Y} = \ddot{Y}_B - \ddot{Y}_A$$

とすれば、 α については次式で計算できる。

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{\Delta Y}{\Delta X} \quad (7.7)$$

$$\dot{\alpha} = \frac{\Delta \dot{Y} \Delta X - \Delta Y \Delta \dot{X}}{\Delta X^2} \cos^2 \alpha \quad (7.8)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} = \frac{\cos \alpha}{\Delta X^3} \{ & [\Delta X(\Delta \ddot{Y} \Delta X - \Delta Y \Delta \ddot{X}) - 2\Delta \dot{X}(\Delta \dot{Y} \Delta X - \Delta Y \Delta \dot{X})] \cos \alpha \\ & - 2\dot{\alpha} \Delta X(\Delta \dot{Y} \Delta X - \Delta Y \Delta \dot{X}) \sin \alpha \} \end{aligned} \quad (7.9)$$

β については、 $\triangle BAC$ について余弦定理を適用すると次式で計算できる。

$$\beta = \cos^{-1} \frac{L_A^2 + L_{AB}^2 - L_B^2}{2L_A L_{AB}} \quad (7.10)$$

$$\dot{\beta} = \frac{\dot{L}_{AB}(L_A^2 - L_B^2 - L_{AB}^2)}{2L_A L_{AB}^2 \sin \beta} \quad (7.11)$$

$$\ddot{\beta} = \frac{[\ddot{L}_{AB}(L_A^2 - L_B^2 - L_{AB}^2) - 2\dot{L}_{AB}^2 L_{AB}] \sin \beta - \dot{L}_{AB}(L_A^2 - L_B^2 - L_{AB}^2)(2\dot{L}_{AB} \sin \beta + L_{AB} \dot{\beta} \cos \beta)}{2L_A L_{AB}^3 \sin^2 \beta} \quad (7.12)$$

ここに

$$L_{AB} = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2} \quad (7.13)$$

$$\dot{L}_{AB} = \frac{\Delta \dot{X} \Delta X + \Delta \dot{Y} \Delta Y}{L_{AB}} \quad (7.14)$$

$$\ddot{L}_{AB} = \frac{(\Delta \ddot{X} \Delta X + \Delta \dot{X}^2 + \Delta \ddot{Y} \Delta Y + \Delta \dot{Y}^2) L_{AB} - (\Delta \dot{X} \Delta X + \Delta \dot{Y} \Delta Y) \dot{L}_{AB}}{L_{AB}^2} \quad (7.15)$$

である。

ここで、図 7.1 の機構に対応させると、対偶 J_3 , J_1 , J_2 がそれぞれ対偶 A, B, C に、節長 L_3 , L_2 が L_A , L_B に対応する。

以上の計算過程を以下の記号で表し、

$$(X_A, Y_A), (X_B, Y_B) \xrightarrow{L_A, L_B} (X_C, Y_C)$$

サブプログラム `RRR_links` としてプログラム記述しておく。

(3) 節上の点の運動

図 7.4 の節 ABC の対偶 A, B の運動が与えられた場合に点 C の運動を求める。このとき、点 C を対偶 A を原点として線分 AB 方向を ξ 軸として節 ABC に固定した直交座標系 $A-\xi\eta$ 上で定義しておき、線分 AB の姿勢角を γ とすれば、点 C の運動は下記のように計算できる。

$$\begin{bmatrix} X_C \\ Y_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi \cos \gamma - \eta \sin \gamma + X_A \\ \xi \sin \gamma + \eta \cos \gamma + Y_A \end{bmatrix} \quad (7.16)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_C \\ \dot{Y}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\gamma}(\xi \sin \gamma + \eta \cos \gamma) + \dot{X}_A \\ \dot{\gamma}(\xi \cos \gamma - \eta \sin \gamma) + \dot{Y}_A \end{bmatrix} \quad (7.17)$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{X}_C \\ \ddot{Y}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\ddot{\gamma}(\xi \sin \gamma + \eta \cos \gamma) - \dot{\gamma}^2(\xi \cos \gamma - \eta \sin \gamma) + \ddot{X}_A \\ \ddot{\gamma}(\xi \cos \gamma - \eta \sin \gamma) - \dot{\gamma}^2(\xi \sin \gamma + \eta \cos \gamma) + \ddot{Y}_A \end{bmatrix} \quad (7.18)$$

ここに γ は

$$\begin{aligned} \Delta X &= X_B - X_A, \quad \Delta \dot{X} = \dot{X}_B - \dot{X}_A, \quad \Delta \ddot{X} = \ddot{X}_B - \ddot{X}_A, \\ \Delta Y &= Y_B - Y_A, \quad \Delta \dot{Y} = \dot{Y}_B - \dot{Y}_A, \quad \Delta \ddot{Y} = \ddot{Y}_B - \ddot{Y}_A, \\ L_{AB} &= \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2} \end{aligned}$$

として、次式で計算できる。

$$\gamma = \tan^{-1} \frac{\Delta Y}{\Delta X} \quad (7.19)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{\Delta \dot{Y} \Delta X - \Delta Y \Delta \dot{X}}{L_{AB}^2} \quad (7.20)$$

$$\ddot{\gamma} = \frac{\Delta \ddot{Y} \Delta X - \Delta Y \Delta \ddot{X}}{L_{AB}^2} \quad (7.21)$$

ここで、図7.1の機構に対応させると、対偶 J_2 , J_1 , P がそれぞれ対偶 A , B , C に対応する。

以上の計算過程を以下の記号で表し、

$$(X_A, Y_A), (X_B, Y_B) \xrightarrow{(\xi, \eta)} (X_C, Y_C)$$

サブプログラム **coupler_point** としてプログラム記述しておく。

(4) 節の角運動

図7.4の節上の2点 A , B の運動を与えて節の姿勢角 γ とその時間微分値を求める式(7.19)~(7.21)の計算過程も以下の記号で表し、

$$(X_A, Y_A), (X_B, Y_B) \implies \gamma$$

サブプログラム **link_angle** としてプログラム記述しておくと便利である。例えば、図7.1の機構に適用すると、対偶 J_3 , J_2 をそれぞれ対偶 A , B に対応させて、出力角変位 ϕ が γ として求められる。

以上の記号を表現し、プログラミングされた解析を図7.1の機構に適用すると下記の手順となる。ここで対偶 J_i の座標を (X_i, Y_i) とする。

① 静止対偶の指定 $(X_0, Y_0), (X_3, Y_3)$

② 回転原動節の運動 **crank_input** : $(X_0, Y_0), 0 \xrightarrow[\theta]{L_1} (X_1, Y_1)$

③ 回転対偶で連結された2節の運動 **RRR_links** :

$$(X_3, Y_3), (X_1, Y_1) \xrightarrow{L_3, L_2} (X_2, Y_2)$$

④ 節上の点の運動 **coupler_point** :

$$(X_2, Y_2), (X_1, Y_1) \xrightarrow{(\xi, \eta)} (X_P, Y_P)$$

⑤ 節の角運動 **link_angle** : $(X_3, Y_3), (X_2, Y_2) \implies \phi$

表 7・1 試算に用いた平面 4 節リンク機構の諸元

(X_0, Y_0) [m]	(1.2, 0.2)	L_3 [m]	1.0
(X_3, Y_3) [m]	(0.0, 0.0)	(ξ, η) [m]	(0.7, 0.7)
L_1 [m]	0.5	$\dot{\theta}$ [rpm]	20
L_2 [m]	1.2		

静止対偶から順に対偶の運動を追跡していく、機構のすべての節の運動が加速度まで求められる。

表 7・1 の諸元を持つ機構について、原動節等速回転の場合に計算した出力角変位、角速度、角加速度の原動節角変位に対する変化を図 7・5 に、中間節軌跡を図 7・1 中の閉曲線に示す。

この運動学解析は、他の平面リンク機構にも適用でき、系統的な解析が可能である。例えば図 7・6 の平面 6 節リンク機構も、原動節 J_0J_1 を等速回転させれば、節 $J_1J_3J_5$ が揺動するとともに、点 P が軌跡曲線を描く。この機構の運動学解析手順も前述の記法で示すと下記のようなになる。

① 静止対偶の指定 $(X_0, Y_0), (X_1, Y_1)$

② 回転原動節の運動 **crank_input** : $(X_0, Y_0), 0 \xrightarrow[L_0]{\dot{\theta}}$ (X_2, Y_2)

③ 回転対偶で連結された 2 節の運動 **RRR_links** :

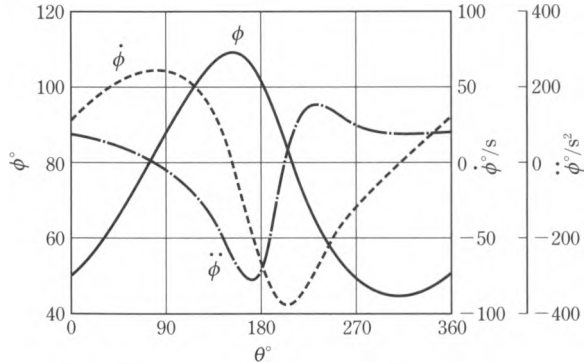


図 7・5 平面 4 節リンク機構の出力角変位の計算結果

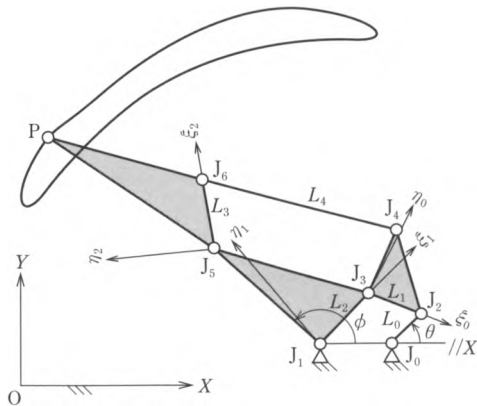


図 7・6 平面 6 節リンク機構

$$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2) \xrightarrow{L_2, L_1} (X_3, Y_3)$$

④ 節上の点の運動 **coupler_point** :

$$(X_3, Y_3), (X_2, Y_2) \xrightarrow{(\xi_0, \eta_0)} (X_4, Y_4)$$

⑤ 節上の点の運動 **coupler_point** :

$$(X_1, Y_1), (X_3, Y_3) \xrightarrow{(\xi_1, \eta_1)} (X_5, Y_5)$$

⑥ 回転対偶で連結された2節の運動 **RRR_links** :

$$(X_5, Y_5), (X_4, Y_4) \xrightarrow{L_3, L_4} (X_6, Y_6)$$

⑦ 節上の点の運動 **coupler_point** :

$$(X_5, Y_5), (X_6, Y_6) \xrightarrow{(\xi_2, \eta_2)} (X_P, Y_P)$$

⑧ 節の角運動 **link_angle** : $(X_1, Y_1), (X_5, Y_5) \implies \phi$

7・2・2

平面リンク機構の総合

synthesis of planar link mechanisms

前項に述べたように、平面リンク機構の寸法諸元が与えられれば、その運動は加速度レベルまで容易に求められる。逆に、機構の所望の運動を与えて、その運動を実現する寸法諸元を求めることを総合 (synthesis) という。平面リンク機構の寸法諸元の数はけっして多くないため、任意の所望の運動を完全に実現することは不可能である。そこで、所望の運動のうちいくつかの機構姿勢、例えば入出力角関係についてのみ実現させることを考える。この手法を**厳正点法** (precision point method)¹⁾ という。ここでは、図7・7に示す、関数創成平面4節リンク機構において、所望の入出力角関数関係 $\theta \sim \phi$ をできるだけ満足させるべく、その3つの厳正点 (θ_i, ϕ_i) 、 $(i=0, 1, 2)$ を指定して、それ

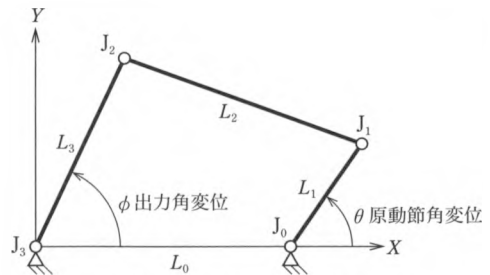


図7・7 関数創成平面4節リンク機構

らの関係を満足する機構諸元を求める手法について説明する。

図7・7の機構において，入出力角関係のみ考えると節長比のみ考えればいいので， $L_0=1$ とおけば， (θ_i, ϕ_i) ， $(i=0, 1, 2)$ に対応する対偶点 J_1, J_2 の位置は次式で書ける。

$$\begin{bmatrix} X_{1,i} \\ Y_{1,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \cos \theta_i + 1 \\ L_1 \sin \theta_i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} X_{2,i} \\ Y_{2,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_3 \cos \phi_i \\ L_3 \sin \phi_i \end{bmatrix} \quad (7\cdot22)$$

$\overline{J_1 J_2} = L_2$ であるから次式が成立する。

$$(1 + L_1 \cos \theta_i - L_3 \cos \phi_i)^2 + (L_1 \sin \theta_i + L_3 \sin \phi_i)^2 = L_2^2 \quad (7\cdot23)$$

展開して整理すれば

$$1 + L_1^2 - L_2^2 + L_3^2 - 2L_1 L_3 \cos(\theta_i - \phi_i) + 2L_1 \cos \theta_i - 2L_3 \cos \phi_i = 0 \quad (7\cdot24)$$

$i=0, 1, 2$ の L_1, L_2, L_3 に関する3元連立方程式を解けば次式が得られる。

$$L_1 = \frac{(\cos \phi_1 - \cos \phi_2)(\cos \theta_3 - \cos \theta_1) - (\cos \phi_1 - \cos \phi_3)(\cos \theta_2 - \cos \theta_1)}{[\cos(\theta_1 - \phi_1) - \cos(\theta_3 - \phi_3)](\cos \theta_2 - \cos \theta_1) - [\cos(\theta_1 - \phi_1) - \cos(\theta_2 - \phi_2)](\cos \theta_3 - \cos \theta_1)}$$

$$L_3 = \frac{(\cos \theta_2 - \cos \theta_1)(\cos \phi_1 - \cos \phi_3) - (\cos \theta_3 - \cos \theta_1)(\cos \phi_1 - \cos \phi_2)}{[\cos(\theta_1 - \phi_1) - \cos(\theta_3 - \phi_3)](\cos \phi_1 - \cos \phi_2) - [\cos(\theta_1 - \phi_1) - \cos(\theta_2 - \phi_2)](\cos \phi_1 - \cos \phi_3)}$$

$$L_2 = \sqrt{(1 + L_1 \cos \theta_1 - L_3 \cos \phi_1)^2 + (L_1 \sin \theta_1 - L_3 \sin \phi_1)^2} \quad (7\cdot25)$$

例として， $(\theta_i, \phi_i) = (0^\circ, 45^\circ), (90^\circ, 90^\circ), (240^\circ, 60^\circ)$ を与えて計算すると，節長比 $(L_1, L_2, L_3) = (0.3977, 1.0373, 0.6733)$ が得られ，図7・8に示す入出力角関係が得られる。

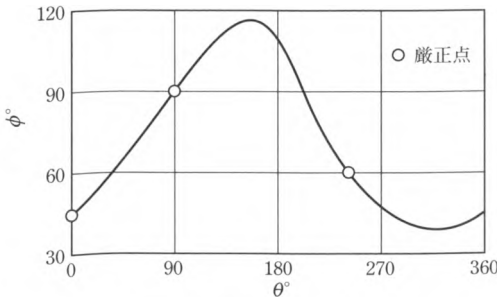


図7・8 総合された関数創成平面4節リンク機構の入出力角関係

7・2・3

平面リンク機構の動力学解析

dynamics analysis of planar link mechanisms

不等速運動機構を構成する各節に作用する慣性力、重力を考慮した動力学解析を行う。機構が実現すべき所望の運動を与えて、そのために必要な駆動力と対偶に作用する対偶作用力を求める。このような解析を**逆動力学解析** (Inverse dynamics analysis) と呼び、後述するように比較的容易に実行できる。対して**順動力学解析** (Forward dynamics analysis) は、駆動力を与えて、それによって生じる運動を求めるものであり、その計算は容易ではない。

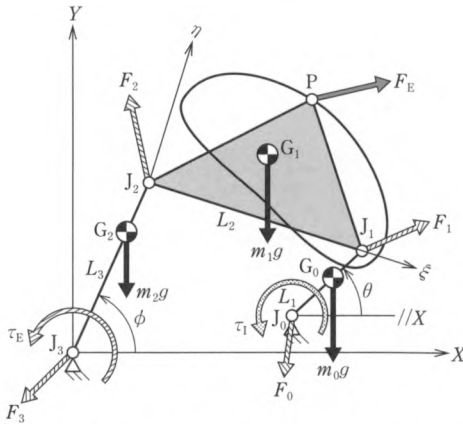


図 7・9 平面 4 節リンク機構に作用する力とモーメント

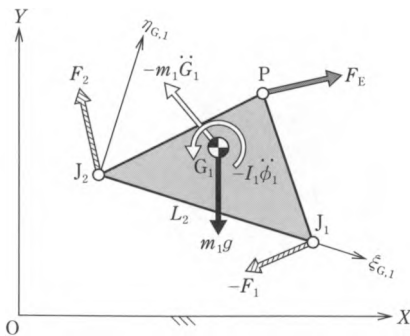


図 7・11 平面 4 節リンク機構の中間節に作用する力とモーメント

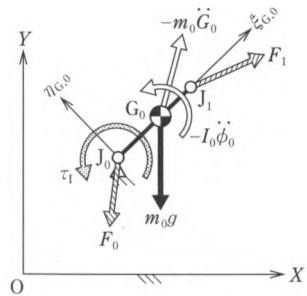


図 7・10 平面 4 節リンク機構の原動節に作用する力とモーメント

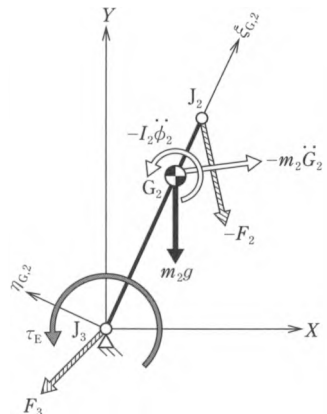


図 7・12 平面 4 節リンク機構の従動節に作用する力とモーメント

さて、図7.9に示す平面4節リンク機構の中間節上の点Pに外力 F_E が作用し、出力従動節に外部トルク τ_E が作用する中で、原動節を等速回転駆動した場合の駆動トルク τ_1 と対偶に作用する対偶作用力 F_i ($i=0\sim 3$)を求める。なお、機構中の動節の質量を m_i 、重心回りの慣性モーメントを I_i 、重心を G_i 、姿勢角を ϕ_i ($i=0\sim 2$)とし、重力加速度を g とする。

まず、それぞれの動節の運動方程式を求める。図7.10～図7.12に各動節に作用する力とモーメントを示す。ここでは慣性力 $-m_i\ddot{G}_i$ と慣性によるモーメント $-i_i\ddot{\phi}_i$ も表示している。図7.10を参照して、原動節の並進の運動方程式は次式で書ける。

$$m_0\ddot{G}_0 = F_0 + F_1 + m_0g \quad (7.26)$$

また、原動節の重心回りの回転の運動方程式は次式となる。

$$I_0\ddot{\phi}_0 = \tau_1 + (J_0 - G_0) \times F_0 + (J_1 - G_0) \times F_1 \quad (7.27)$$

式(7.27)の \times 記号はベクトルの外積を表すが演算結果はXY平面に垂直な軸回りのモーメントであるスカラー量である。また、重心回りのモーメントを考慮しているので重力によるモーメントは0となる。

式(7.26)、式(7.27)のベクトルを成分表示すると、 $G_i = [X_{G,i} \ Y_{G,i}]^T$ 、 $J_i = [X_i \ Y_i]^T$ 、 $F_i = [F_{X,i} \ F_{Y,i}]^T$ 、 $g = [0 \ g]^T$ であるから、成分を使って書き下すと以下の3式が得られる。ここに添え字Tは転置を表す。

$$m_0\ddot{X}_{G,0} = F_{X,0} + F_{X,1} \quad (7.28)$$

$$m_0\ddot{Y}_{G,0} = F_{Y,0} + F_{Y,1} + m_0g \quad (7.29)$$

$$I_0\ddot{\phi}_0 = \tau_1 - (Y_0 - Y_{G,0})F_{X,0} + (X_0 - X_{G,0})F_{Y,0} \\ - (Y_1 - Y_{G,0})F_{X,1} + (X_1 - X_{G,0})F_{Y,1} \quad (7.30)$$

図7.11を参照して、中間節の並進ならびに重心回りの回転のベクトル運動方程式は次式で書ける。

$$m_1\ddot{G}_1 = -F_1 + F_2 + F_E + m_1g \quad (7.31)$$

$$I_1\ddot{\phi}_1 = -(J_1 - G_1) \times F_1 + (J_2 - G_1) \times F_2 + (P - G_1) \times F_E \quad (7.32)$$

対偶 J_1 における対偶作用力において作用・反作用を考慮しているため、 $-F_1$ としているところに注意する。式(7.31)、式(7.32)を成分を使って書き下すと以下の3式が得られる。

$$m_1\ddot{X}_{G,1} = -F_{X,1} + F_{X,2} + F_{X,E} \quad (7.33)$$

$$m_1\ddot{Y}_{G,1} = -F_{Y,1} + F_{Y,2} + F_{Y,E} + m_1g \quad (7.34)$$

$$I_1 \ddot{\phi}_1 = (Y_1 - Y_{G,1})F_{X,1} - (X_1 - X_{G,1})F_{Y,1} - (Y_2 - Y_{G,1})F_{X,2} \\ + (X_2 - X_{G,1})F_{Y,2} - (Y_P - Y_{G,1})F_{X,E} + (X_P - X_{G,1})F_{Y,E} \quad (7.35)$$

図7.12を参照して、従動節の並進ならびに重心回りの回転のベクトル運動方程式は次式で書ける。

$$m_2 \ddot{G}_2 = -F_2 + F_3 + m_2 g \quad (7.36)$$

$$I_2 \ddot{\phi}_2 = -(J_2 - G_2) \times F_2 + (J_3 - G_2) \times F_3 + \tau_E \quad (7.37)$$

式(7.35), 式(7.36)を成分を使って書き下すと以下の3式が得られる。

$$m_2 \ddot{X}_{G,2} = -F_{X,2} + F_{X,3} \quad (7.38)$$

$$m_2 \ddot{Y}_{G,2} = -F_{Y,2} + F_{Y,3} + m_2 g \quad (7.39)$$

$$I_2 \ddot{\phi}_2 = (Y_2 - Y_{G,2})F_{X,2} - (X_2 - X_{G,2})F_{Y,2} \\ - (Y_3 - Y_{G,2})F_{X,3} + (X_3 - X_{G,2})F_{Y,3} + \tau_E \quad (7.40)$$

式(7.28)～式(7.30), 式(7.33)～式(7.35), 式(7.38)～式(7.40)をまとめて整理し、行列・ベクトル表現すると次式が得られる

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Y_{G,0} - Y_0 & X_0 - X_{G,0} & Y_{G,0} - Y_1 & X_1 - X_{G,0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_1 - Y_{G,1} & X_{G,1} - X_1 & Y_{G,1} - Y_2 & X_2 - X_{G,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Y_2 - Y_{G,2} & X_{G,2} - X_2 & Y_{G,2} - Y_3 & X_3 - X_{G,2} & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} F_{X,0} \\ F_{Y,0} \\ F_{X,1} \\ F_{Y,1} \\ F_{X,2} \\ F_{Y,2} \\ F_{X,3} \\ F_{Y,3} \\ \tau_1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} m_0 \ddot{X}_{G,0} \\ m_0 (\ddot{Y}_{G,0} - g) \\ I_0 \ddot{\phi}_0 \\ m_1 \ddot{X}_{G,1} - F_{X,E} \\ m_1 (\ddot{Y}_{G,1} - g) - F_{Y,E} \\ I_1 \ddot{\phi}_1 + (Y_P - Y_{G,1})F_{X,E} - (X_P - X_{G,1})F_{Y,E} \\ m_2 \ddot{X}_{G,2} \\ m_2 (\ddot{Y}_{G,2} - g) \\ I_2 \ddot{\phi}_2 - \tau_E \end{vmatrix} \quad (7.41)$$

式(7・41)を次式のように表現する.

$$[A] \begin{bmatrix} F_j \\ \tau_1 \end{bmatrix} = b \tag{7・42}$$

ここに, $[A]$, b はそれぞれ式(7・42)の右辺の係数行列と左辺の列ベクトルであり, $F_j = [F_0^T \ F_1^T \ F_2^T \ F_3^T]^T$ である. $[A]$, b の各成分は, 機構の運動が実現できているとすれば, それらの時々刻々の値は7・2・1項に示した運動学解析ですべて計算することができる. このとき, 各動節の重心 $G_i(X_{G,i}, Y_{G,i})$ とそれらの

表 7・2 動節の諸元

i	$\xi_{G,i}$ [m]	$\eta_{G,i}$ [m]	m_i [kg]	I_i [kgm ²]
0	0.20	0.00	7.86	0.1048
1	0.80	0.00	28.44	6.7072
2	0.55	0.00	18.62	2.1800

* 重心を記述する節上の動座標 ($\xi_{G,i}, \eta_{G,i}$) の座標系は図7・10～図7・12に記載.

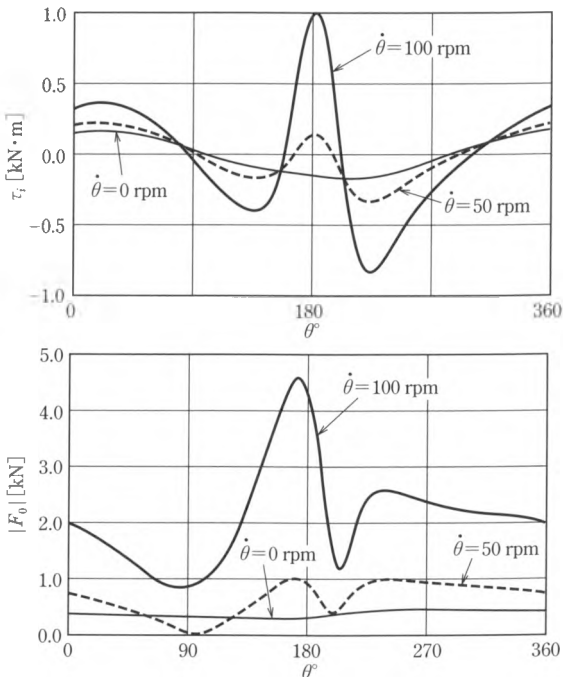


図 7・13 平面4節リンク機構の逆動力学解析結果

加速度についても、重心も節上の点にすぎないから、`coupler_point` で計算できる。このように機構中の動節の加速度，角加速度まで計算できることが7・2・1項の運動学解析で重要なところである。

したがって、式(7・42)は対偶作用力 F_J と駆動トルク τ_1 に関する9元連立1次方程式である。よって、次式で容易に求めることができる。

$$\begin{bmatrix} F_J \\ \tau_1 \end{bmatrix} = [A]^{-1} b \quad (7\cdot43)$$

具体的には、Gaussの消去法などの数値計算を用いるとよい。

表7・1の寸法諸元をもつ図7・1の平面4節リンク機構の動節の諸元が表7・2で、外力および外部モーメント $(F_{X,E}, F_{Y,E}, \tau_E) = (100.0, 0.0, 10.0)$ [N, Nm] が作用するときに、原動節回転数を $\dot{\theta} = 0, 50, 100$ [rpm] で駆動した場合の駆動トルクと対偶 J_0 に作用する対偶作用力を計算すると図7・13となる。

$\dot{\theta} = 0$ は、重力，外力に対する静的なつりあいを表す。原動節の回転速度 $\dot{\theta}$ が増すにつれ、慣性力の影響で、駆動トルクや対偶作用力に大きなピークが現れる。前者はこれを発生可能な駆動モータや軸径の選定に、後者はモータ軸を支持する回転軸受の選定に重要な情報となる。

最後に、**順動力学解析手法**について述べておこう。これは式(7・42)において、未知の対偶作用力 F_J を消去したうえで、 $[A]$ 、 b 中の対偶や節重心の変位ならびにそれらの速度，加速度を原動節角変位，角速度，角加速度 $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$ を用いて表し、 θ に関する非線形の2階微分方程式を導出する。この微分方程式の数値解析を行い、 θ を求め、それを用いて運動学解析を行う。この計算過程は逆動力学解析に比較して極めて煩雑である。

7・3

板カム機構

Plate cam mechanisms

7・3・1

ローラ端揺動従節板カム機構とカム曲線

plate cam mechanism with oscillating follower with roller and cam curves

7・2・2項で述べたようにリンク機構は寸法諸元の数が少ないため、所望の運動を完全に実現する機構を得ることはできない。しかし、カム機構では曲面あるいは曲線の間の接触で運動伝達を行うために、曲面・曲線を構成するパラメータは無限度

あるから、所望の運動を完全に実現する機構を得ることができる。カム機構の歴史は古く、多くの種類があるが、ここでは最もよく用いられる、図7・14に示すローラ端揺動従節板カムの設計³⁾について説明しよう。

輪郭曲線を直角座標系で (x, y) 、極座標系で $(r(\psi), \psi)$ で表す板カムを静止系原点 O を回転軸とし

て、入力回転角 θ で回転させ、先端に半径 R のローラを取り付けた長さ L の従節 (follower) の一端 P を回転対偶で静止系に固定して、ばねなどを介して板カムに押し付ける。従節はカム軸の回転に伴い揺動運動を行うことがわかる。このとき、従節の所望の揺動角 ϕ を θ の関数として与え、それを実現する輪郭曲線 $(r(\psi), \psi)$ を設計する。

まず、所望の揺動角 $\phi(\theta)$ を指定しよう。板カムは無限に回転するから、 $\phi(\theta)$ は周期を 360° とした周期関数であればよいが、機構に不要な振動を生じさせないためには、 θ に関する2階導関数まで連続であることが望ましい。そこで、例として、図7・15に示す従節が静止する停留区間が2箇所ある出力角の理想関数を考

える。図中の停留区間は、 $\phi = \phi_A$ または $\phi = \phi_B$ であり、 $\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0$ である

が、両者の間の $\phi(\theta)$ が変化する区間においても、停留区間と微係数連続で接続させる必要がある。このときよく用いられるのが両停留カム曲線³⁾である。入力角 θ をその変位幅 $\Delta\theta$ で無次元化した無次元変位 $T = \theta/\Delta\theta$ ($0 \leq T \leq 1$) を変数とした、以下の条件を満足する無次元関

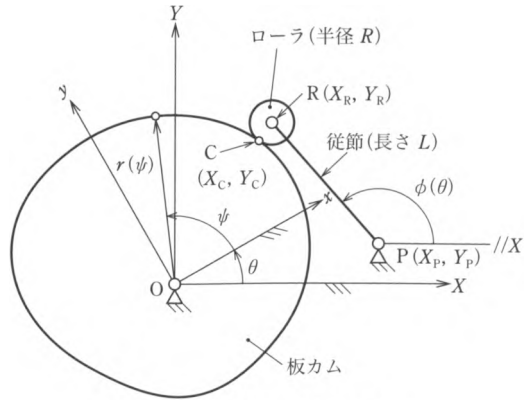


図7・14 ローラ端揺動従節板カム

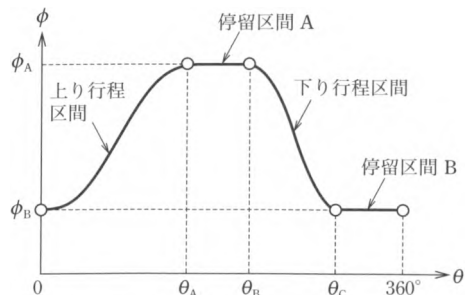


図7・15 カムの理想関数

数 $S(T)$ とその偏導関数 $V(T) = \frac{\partial S(T)}{\partial T}$, $A(T) = \frac{\partial^2 S(T)}{\partial T^2}$ を考える.

$$S(0) = 0, S(1) = 1, V(0) = V(1) = 0, A(0) = A(1) = 0 \quad (7.44)$$

両停留カム曲線を用いれば, 入力角 $\theta_S \leq \theta \leq \theta_F$ の区間で, ϕ が ϕ_S から ϕ_F に変化する出力角の理想関数は次式で計算できる.

$$\phi(\theta) = (\phi_F - \phi_S) S\left(\frac{\theta - \theta_S}{\theta_F - \theta_S}\right) + \phi_S \quad (7.45)$$

$$\frac{\partial \phi(\theta)}{\partial \theta} = \frac{\phi_F - \phi_S}{\theta_F - \theta_S} V\left(\frac{\theta - \theta_S}{\theta_F - \theta_S}\right) \quad (7.46)$$

$$\frac{\partial^2 \phi(\theta)}{\partial \theta^2} = \frac{\phi_F - \phi_S}{(\theta_F - \theta_S)^2} A\left(\frac{\theta - \theta_S}{\theta_F - \theta_S}\right) \quad (7.47)$$

図7.15の上り行程区間 $0 \leq \theta \leq \theta_A$, 下り行程区間 $\theta_B \leq \theta \leq \theta_C$ のいずれにも上式が適用できる. 両停留カム曲線も種々提案されているが, ここでは以下の2つを示しておこう. いずれも両停留条件を満足していることを確認されたい.

両停留5次関数:

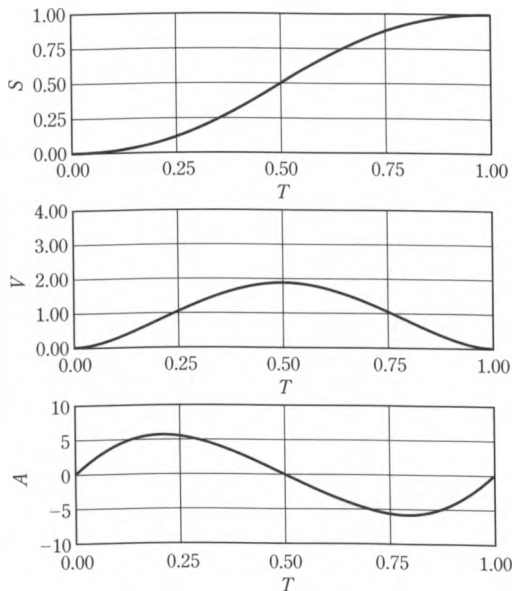


図 7.16 両停留5次関数

$$\left. \begin{aligned} S(T) &= 6T^5 - 15T^4 + 10T^3 \\ V(T) &= 30T^4 - 60T^3 + 30T^2 \\ A(T) &= 120T^3 - 180T^2 + 60T \end{aligned} \right\} \quad (7.48)$$

サイクロイド関数：

$$\left. \begin{aligned} S(T) &= T - \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi T \\ V(T) &= 1 - \cos 2\pi T \\ A(T) &= 2\pi \sin 2\pi T \end{aligned} \right\} \quad (7.49)$$

両停留条件を満足していることを確認されたい。例えば、式(7.48)の両停留5次関数を計算すると図7.16となる。

7.3.2 ローラ端揺動従節板カム機構の輪郭曲線の計算

calculation of cam profile of plate cam mechanism with oscillating follower with roller

前項で設定した出力角の理想関数 $\phi(\theta)$ を創成するローラ端揺動従節板カム機構の輪郭曲線を求める。

入力角 θ に対応する静止系 $O-XY$ における従節先端のローラ中心 R の座標は次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} X_R \\ Y_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L \cos \phi(\theta) + X_P \\ L \sin \phi(\theta) + Y_P \end{bmatrix} \quad (7.50)$$

さらに、ローラとカムの接触点 C を求めたいが、輪郭形状が未知のカムが回転しているため、求めることが難しい。そこでカムを静止させて考えることにする。このとき、カムに固定した動座標系 $O-xy$ 上でローラの描く軌道を求める。すなわち、図7.17のように従節をその回転中心 P とともにカムに対して相対的に $-\theta$ 回転させて考える。

図7.17において、動座標系 $O-xy$ におけるローラ中心 R の座標は次式で計算できる。

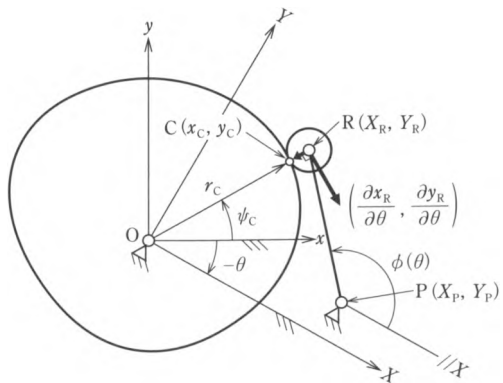


図7.17 カム座標系での記述

$$\begin{bmatrix} x_R \\ y_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_R \\ Y_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L \cos[\phi(\theta) - \theta] + X_P \cos \theta + Y_P \sin \theta \\ L \sin[\phi(\theta) - \theta] - X_P \sin \theta + Y_P \cos \theta \end{bmatrix} \quad (7.51)$$

動座標系 $O-xy$ におけるローラとカムの接触点 C は、ローラ中心の速度：

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x_R}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y_R}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L \left[\frac{\partial \phi(\theta)}{\partial \theta} - 1 \right] \sin[\phi(\theta) - \theta] - X_P \sin \theta + Y_P \cos \theta \\ L \left[\frac{\partial \phi(\theta)}{\partial \theta} - 1 \right] \cos[\phi(\theta) - \theta] - X_P \cos \theta - Y_P \sin \theta \end{bmatrix} \quad (7.52)$$

に直交する方向に位置するので、次式で表せる。

$$\begin{bmatrix} x_C \\ y_C \end{bmatrix} = \frac{R}{\sqrt{\left(\frac{\partial x_R}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_R}{\partial \theta}\right)^2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_R}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y_R}{\partial \theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_R \\ y_R \end{bmatrix} \quad (7.53)$$

極座標表示を求めると次式となる。

$$\begin{bmatrix} r_C \\ \psi_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{x_C^2 + y_C^2} \\ \tan^{-1} \frac{y_C}{x_C} \end{bmatrix} \quad (7.54)$$

すなわち、従節の長さ L 、回転中心位置 (X_P, Y_P) 、ローラ半径 R を与えたうえで、設定した入力出力角関係 $\phi(\theta)$ を与えて式(7.50)～式(7.53)に従って計算すれば、板カムの輪郭曲線がカムとローラの接触点 C の軌跡として求められる。この計算過程では、式(7.51)からわかるように、出力角の1階偏微分値 $\partial\phi/\partial\theta$ が必要であることを注意する。

7.3.3 ローラ端揺動従節板カム機構の設計例

design example of plate cam mechanism with oscillating follower with roller

設計例として、表7.3に示す諸元のローラ端揺動従節板カム機構の板カムの輪郭曲線を求めた。ただしカム曲線は両停留5次関数とした。

図7.18は設定した入出力角関係であり、図7.19は設計された

表7.3 カム機構設計例の諸元

ϕ_A	150°	θ_C	300°
ϕ_B	130°	(X_P, Y_P)	(100, 20) mm
θ_A	150°	L	110 mm
θ_B	200°	R	11 mm

板カムの形状である。図7・19には板カムに固定した動座標系での従節の動きも示しており、従節とカムの干渉についても評価できる。

最後に、得られたカム機構の運動伝達性を評価する。図7・20に示すように、板カムから従節のローラへの伝達力とローラ中心の速度の成す角 α を圧力角 (pressure angle) と呼ぶ。圧力角 $\alpha=90^\circ$ のとき、カムとローラの接触力は従節を揺動させるトルクに変換されず、従節を駆動することはできない。運動伝達性の観点から、圧力角はなるべく小さい方が望ましい。

図7・21は設計された機構の圧力角の変化である。入力角の全域にわたって圧力角は小さく、高い運動伝達性をもつことがわかる。

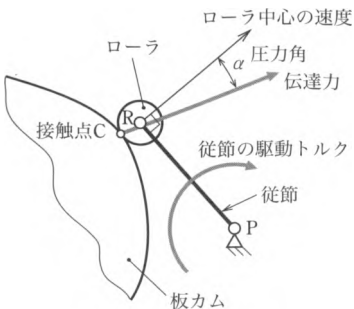


図7・20 圧力角の定義

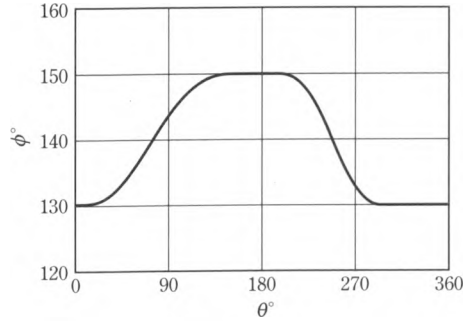


図7・18 ローラ端揺動従節板カムの設計例の理想入出力関係

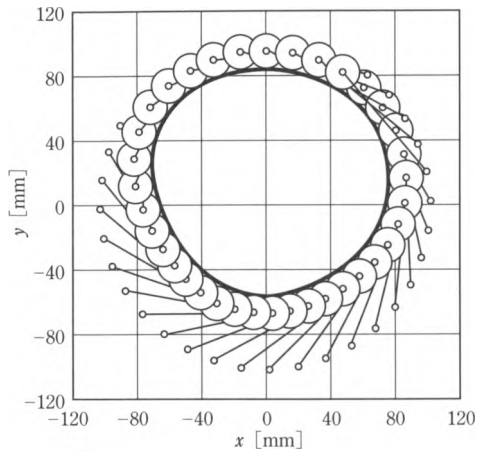


図7・19 ローラ端揺動従節板カムの設計結果

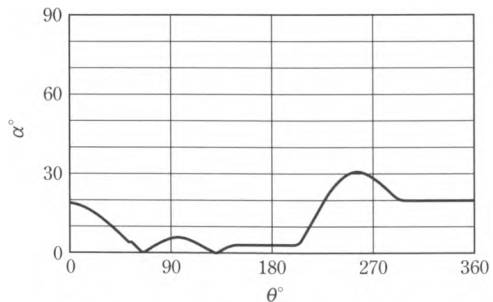


図7・21 設計例のカム機構の圧力角

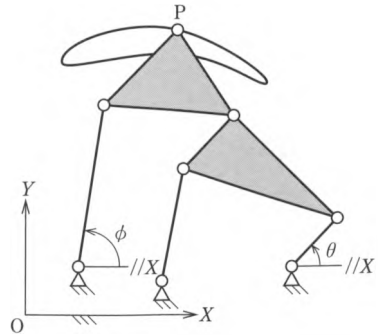
7章 練習問題

問題 7・1 右図に示す平面 6 節リンク機構の運動学解析手順を示せ。ただし対偶の番号、節の寸法諸元のパラメータは自由に設定してよい。

問題 7・2 図 7・6 の平面 6 節リンク機構の逆動力学解析のための、式(7・40)に相当する行列・ベクトル表現された運動方程式を導け

問題 7・3 カム曲線の両停留 5 次関数とサイクロイド関数の無次元速度 V 、無次元加速度 A の最大値を求め比較せよ。

問題 7・4 下表の条件の 2 停留区間をもつローラ端揺動従節板カムを設計せよ。ただし、カム曲線はサイクロイド関数を用い、その他必要な諸元は適宜定めてよい。



問題 7・1 の図 平面 6 節リンク機構

問題 7・4 の表 ローラ端揺動従節板カムの設計条件

ϕ_A	130°	θ_B	150°
ϕ_B	100°	θ_C	300°
θ_A	90°		