

22. 乱流拡散

近年環境問題がクローズ・アップされるにつれて、大気や海洋あるいは河川や湖沼での物質の乱流拡散が多くの人々の関心を引くようになってきた。乱流拡散の理論は、1921年イギリスの流体力学者テイラーがロンドン数学学会誌に発表した“連続運動による拡散”の研究に始まる。この理論は、数学的には特にむずかしいところはないが、不規則現象についての斬新な考え方が展開されており、今日なおテイラーの理論を出る乱流拡散の理論はないと極言する人さえいる。不規則運動による拡散の取扱いは、あるいは1905年に発表されたアインシュタインのブラウン運動にまでさかのぼることができよう（この年アインシュタインは、特殊相対性理論と光電子説も発表している。）なお、テイラーの理論は第一次世界大戦中の煙幕作戦の研究が動機になっているといわれる。テイラー理論以後の乱流拡散理論ではリチャードソン (Richardson) に始まる相対拡散の理論が環境問題との関連で重要である。

22.1 フィックの拡散方程式

a. 拡散におけるフィックの法則

単位面積の面を通しての単位時間あたりの物質の輸送量 (flux) F は、熱伝導の場合と同じように、その点における物質の濃度 (C) の勾配に比例すると考えることができる。一次元の場合にはこの関係は

$$F = -K_x \frac{dC}{dx} \quad (22.1)$$

と書ける。ここに、 K_x は拡散係数である。式 (22.1) の関係を一般化すれば、

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{zy} & K_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\partial C}{\partial x} \\ -\frac{\partial C}{\partial y} \\ -\frac{\partial C}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (22.2)$$

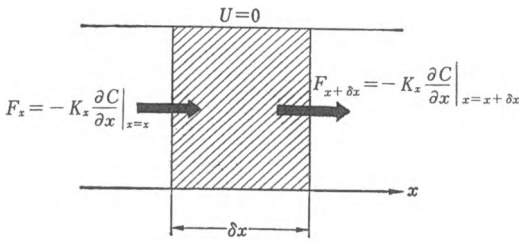


図 22.1

と書ける。ここに、 F_α ($\alpha: x, y, z$) は α 軸に直角な単位面を通しての濃度束、 $K_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta: x, y, z$ のいずれかを代表する) は拡散係数テンソルの成分である。ここで、拡散係数はテンソル量であることに

注意されたい。

まず、流れのない一次元の場合について、幅 δx の区間 $(x, x+\delta x)$ の物質の保存則を立てる。 δt 時間の間のこの区間の濃度 C の増加は、この区間への両面からの物質輸送量の差に等しいから、

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} \delta x \delta t &= \{-F(x+\delta x) + F(x)\} \delta t \\ &= -\frac{\partial F}{\partial x} \delta x \delta t \end{aligned}$$

すなわち

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) \quad (22.3)$$

もし、拡散係数が定数ならば

$$\frac{\partial C}{\partial t} = K_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (22.3a)$$

の関係を得る。この方程式は、 C を温度、 K_x を熱伝導率と読み換えればわかるように、熱伝導の方程式と同じである。この型の偏微分方程式は数学的には放物型の偏微分方程式といわれる。

この関係を三次元の場合に一般化すれば、 $\partial C/\partial t$ を実質微分 (流体とともに運動する際の時間変化率) DC/Dt でおき換えて

$$\frac{DC}{Dt} = -\text{div } \mathbf{F} \quad (22.4)$$

となる。ここに、

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ \text{div} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

もし、座標軸が主軸方向をとり、拡散係数テンソルが対角成分のみの場合には上式は次のようになる。

$$\frac{DC}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_{xx} \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_{yy} \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_{zz} \frac{\partial C}{\partial z} \right) \quad (22.5)$$

これらの式 ((22.3)~(22.5)) は、拡散における物質の保存を表すもので、**フィックの方程式** (Fickian equation) と呼ばれる。この方程式は、もともと分子拡散による物質輸送を記述するために導かれたものであるが、次のように乱流拡散の場合にも拡張することができる。

b. 乱流拡散の方程式

いま、二次元の流れを考えると、フィックの拡散方程式 (22.5) は

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D_m \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_m \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \quad (22.6)$$

となる。ここに、式 (22.5) の K の代わりに用いた D_m は分子拡散係数を表す。流れが乱流状態であれば、速度および濃度は図 22.2 のように統計的平均値 (―をつけて表す) と乱れによる変動分 (′をつけて表す) との和として表せる。

$$u = \bar{u} + u', \quad v = \bar{v} + v', \quad C = \bar{C} + C' \quad (22.7)$$

これを式 (22.6) に代入し連続の方程式 $\text{div } \mathbf{v} = 0$ を用いて変形したのち、アンサンブル平均をとればフィックの方程式は次のように書き直される。

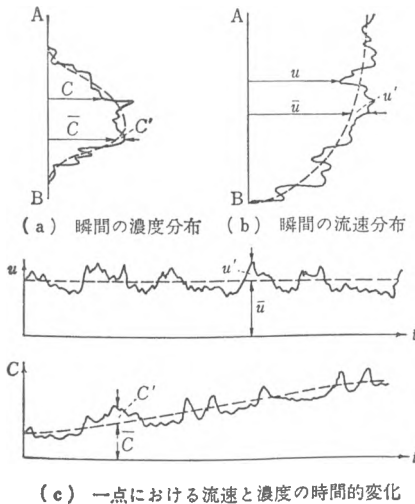


図 22.2 濃度と流速の空間的・時間的分布 (Holley, ASCE)

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} = D_m \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial x^2} + D_m \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial y^2} + \frac{\partial(-\overline{u' C'})}{\partial x} + \frac{\partial(-\overline{v' C'})}{\partial y} \quad (22.8)$$

乱流運動による輸送フラックス $(-\overline{u' C'}, -\overline{v' C'})$ は、分子運動による拡散 (式 (22.1)) とのアナロジーにより

$$\overline{u' C'} = -K_x \frac{\partial \bar{C}}{\partial x}, \quad \overline{v' C'} = -K_y \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} \quad (22.9)$$

と書くことができる。ここに、 K_x, K_y は乱流拡散係数または渦拡散係数 (turbulent or eddy diffusion coefficient) と名づけられる。ここで乱流拡散項は、乱流の運動方程式におけるレイノルズ応力と同じように、本来フィックの拡散式の左辺の移流項 ($u \partial C / \partial x$ など) の一部であり、移流項をアンサンブル平均値あるいは時間平均値 ($\bar{u} (\partial \bar{C} / \partial x)$ など) でおき換えたために真の移流を表さなくなってしまうものである。

かくして、乱流におけるフィックの拡散方程式は

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (D_m + K_x) \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (D_m + K_y) \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} \right\} \quad (22.10)$$

となる。普通、分子拡散に比べ乱流拡散ははるかに大きいので、 D_m は K_x, K_y に対して省略してよい。拡散係数 K_x, K_y, K_z 等は分子拡散の場合とは異なり、定数ではなく、一般に x, y, z の関数とみなされる。

c. ロバートの解

フィックの拡散方程式 (22.5) の最も簡単な場合 (三次元、一様流速 $\bar{u} = U, \bar{v} = \bar{w} = 0$) の解はロバート (Robert) により与えられた。

まず、瞬間的に点源から放出された煙の濃度は

$$\bar{C}(x, y, z, t) = \frac{Q}{(4\pi t)^{3/2} (K_x K_y K_z)^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{4t} \left(\frac{(x - Ut)^2}{K_x} + \frac{y^2}{K_y} + \frac{z^2}{K_z} \right) \right] \quad (22.11)$$

となる。ここに、 Q : 煙の放出量 ($Q = \iiint C dx dy dz$)、 t : 放出後の経過時間、 K_x, K_y, K_z : x, y, z 方向の拡散係数。

連続的に点源から煙が放出される場合の濃度は、上式の t を放出の瞬間 t' からの経過時間 $(t - t')$ に変え、右辺の放出量 Q をその瞬間の値 $q dt'$ とし、これによる左辺の濃度を dC とし、 $t' = -\infty$ から $t' = t$ まで積分すれば、

$$\bar{C}(x, y, z) = \frac{q}{4\pi K} \frac{1}{r} \exp\left[-\frac{U}{2K}(r-x)\right] \quad (22.12)$$

となる。これは

$$r-x = x \left(1 + \frac{y^2+z^2}{x^2}\right)^{1/2} - x \cong \frac{y^2+z^2}{2x}$$

の関係より、近似的に次のように表せる。

$$\bar{C}(x, y, z) \cong \frac{q}{4\pi K} \frac{1}{x} \exp\left[-\frac{U(y^2+z^2)}{4Kx}\right] \quad (22.12a)$$

ただし、 $K=K_x=K_y=K_z$ ：拡散係数、 q ：単位時間あたりの放出量、 $r=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$ 。

d. 勾配型表示の限界

乱流変動による輸送量のフラックスを式 (22.9) のように輸送量の平均勾配に比例するとする表示を、勾配型表示 (gradient type expression) という。すでに §14.2 において述べた乱流の速度分布の理論において、乱れによる運動量の輸送の結果であるレイノルズ応力について勾配型の表示が利用された。ブシネスクの渦動粘性係数の考えがそうであり、プラントルの混合距離の理論における式 (14.8) もまた勾配型の表示である。

このような勾配型の表示は、一般に分子粘性や分子拡散の場合のように、流体の特性の輸送を担う流体粒子の運動のスケールが、特性量の分布場のスケールに比べて十分小さい場合に成立するものである。乱流拡散の場合に勾配型表示が成立するためには、混合の距離 l について次のような制約条件

$$l^2 \ll 24 |C_y / C_{yy}|$$

が必要である (Corrsin, 1974)。

特性量の輸送に関与する流体粒子の運動のスケールが、流れの場のスケールに比較しうるほど大きい場合には、勾配型表示による比例係数 (拡散係数、渦粘性係数、混合係数、交換係数) はもはや物質定数ではなく、また一定値とはならず、流れ場の場所の関数として多くの場合実験的に求めなければならない。乱流の流速分布に関するプラントルの混合距離理論は、勾配型表示の比例係数が普遍的に決まる数少ない例である。

22.2 テイラーの拡散理論

a. 乱流拡散とラグランジュ相関

いま一様な流れの方向を x 軸とし、それと直角に y 軸をとる。 x 方向の平均流

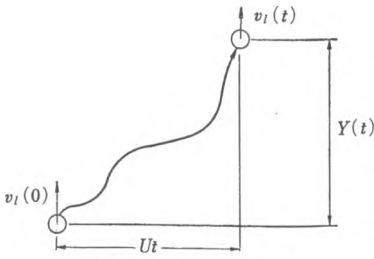


図 22.3 流体粒子の移動

速は U 、流速の乱れの x, y 成分を u', v' とする。 x 方向の乱れの成分は平均流速に比べて十分小さく、 x 方向には物質は平均流で運ばれるだけと考える。

さて、 $t=0$ に y 方向に乱れ速度成分 v_i で運動を始めた流体粒子あるいはトレーサは、周囲の流体と混合しつつ徐々に最初の

乱れの性質を失っていく。この乱れ成分 $v_i(t)$ は一つの流体粒子のもつラグランジュ的流速成分であり、一点でのオイラー的流速成分ではない。

時間 $t=T$ までにこの流体粒子が y 方向に移動した距離 $Y(T)$ は、 $v_i(t)$ を積分して

$$Y(T) = \int_0^T v_i(t) dt \quad (22.13)$$

である。ここで、積分変数 t を

$$t = T - \xi$$

により ξ におき換えると、 $Y(T)$ は次のように表される。

$$Y(T) = \int_0^T v_i(T - \xi) d\xi \quad (22.14)$$

また、式 (22.13) を T について微分すれば

$$v_i(T) = \frac{dY}{dT} \quad (22.15)$$

濃度 C の流体粒子塊が v_i の流速をもち Y だけ進んで濃度 $C + Y(\partial C / \partial y)$ の周囲の流体と混合したとすれば、これによる単位時間あたりの物質輸送は差し引き $-v_i Y(\partial C / \partial y)$ である。このアンサンブル平均が乱流混合による輸送フラックス F である。

$$F = -(\overline{v_i Y}) \frac{\partial C}{\partial y} \quad (22.16)$$

すなわち、上式を式 (22.1) と比較すれば、乱流拡散係数 K は次のように表される。

速は U 、流速の乱れの x, y 成分を u', v' とする。 x 方向の乱れの成分は平均流速に比べて十分小さく、 x 方向には物質は平均流で運ばれるだけと考える。

さて、 $t=0$ に y 方向に乱れ速度成分 v_i で運動を始めた流体粒子あるいはトレーサは、周囲の流体と混合しつつ徐々に最初の

乱れの性質を失っていく。この乱れ成分 $v_i(t)$ は一つの流体粒子のもつラグランジュ的流速成分であり、一点でのオイラー的流速成分ではない。

時間 $t=T$ までにこの流体粒子が y 方向に移動した距離 $Y(T)$ は、 $v_i(t)$ を積分して

$$Y(T) = \int_0^T v_i(t) dt \quad (22.13)$$

である。ここで、積分変数 t を

$$t = T - \xi$$

により ξ におき換えると、 $Y(T)$ は次のように表される。

$$Y(T) = \int_0^T v_i(T - \xi) d\xi \quad (22.14)$$

また、式 (22.13) を T について微分すれば

$$v_i(T) = \frac{dY}{dT} \quad (22.15)$$

濃度 C の流体粒子塊が v_i の流速をもち Y だけ進んで濃度 $C + Y(\partial C / \partial y)$ の周囲の流体と混合したとすれば、これによる単位時間あたりの物質輸送は差し引き $-v_i Y(\partial C / \partial y)$ である。このアンサンブル平均が乱流混合による輸送フラックス F である。

$$F = -(\overline{v_i Y}) \frac{\partial C}{\partial y} \quad (22.16)$$

すなわち、上式を式 (22.1) と比較すれば、乱流拡散係数 K は次のように表される。

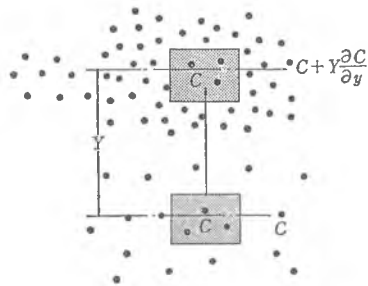


図 22.4 乱流混合による濃度変動

$$K = \overline{v_i Y} \quad (22.17)$$

そこで、 v_i と Y との積を作り上の関係を利用して二通りに変形してみる。まず、式 (22.14) を利用すれば、

$$v_i(T) Y(T) = v_i(T) \int_0^T v_i(T-\xi) d\xi$$

右辺の $v_i(T)$ は積分変数 ξ を含まないから積分のうちに含めることができ、

$$v_i(T) Y(T) = \int_0^T v_i(T) v_i(T-\xi) d\xi \quad (22.18)$$

と書ける。一方、式 (22.15) の関係を使うと $v_i Y$ は次のように変形しうる。

$$v_i Y = Y \frac{dY}{dT} = \frac{1}{2} \frac{dY^2}{dT} \quad (22.19)$$

$v_i(T)$ も、したがって $Y(T)$ も不規則変数であるから、 $v_i Y$ の値は追跡する流体粒子ごとに異なった値をとる。そこで、多くの標本についての平均 (ensemble mean) をとり、これを $\overline{v_i(T) Y(T)}$ のように表すと、式 (22.17)~(22.19) より次の関係を得る。

$$\begin{aligned} K &= \overline{v_i Y} \\ &= \frac{1}{2} \frac{d\overline{Y^2}}{dT} = \int_0^T \overline{v_i(T) v_i(T-\xi)} d\xi \end{aligned} \quad (22.20)$$

あるいは

$$\frac{1}{2} \frac{d\overline{Y^2}}{dT} = \overline{v_i^2} \int_0^T R_i(\xi) d\xi \quad (22.21)$$

ここに、 $R_i(\xi)$ は

$$R_i(\xi) = \overline{v_i(T) v_i(T-\xi)} / \overline{v_i^2} \quad (22.22)$$

と定義され、流体粒子をラグランジュ的に追跡するとき、 ξ 時間だけ隔たった二つの時刻の流速の自己相関を表し、**ラグランジュ相関係数**と呼ばれる。定常一様な乱れの場合は、ラグランジュ相関は相関をとる二時刻の差のみの関数である。

式 (22.21) の積分により、流体粒子あるいはトレーサーの広がり二乗平均 $\overline{Y^2}$ は

$$\overline{Y^2} = 2\overline{v_i^2} \int_0^T \int_0^\eta R_i(\xi) d\xi d\eta \quad (22.23)$$

となる。これがテイラーの拡散理論式である。

式 (22.23), (22.20) は、乱流場で湧源より連続的に放出される流体粒子ないしはトレーサーの分散および拡散係数を与える関係式である。式の展開よりも明

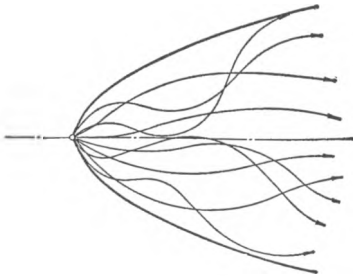


図 22.5 固定源型拡散

源型の拡散といわれる。また、粒子一個一個の追跡のアンサンブル平均という意味で“one particle analysis”とも呼ばれる。

(注 22.1) テイラーの拡散理論の別の導き方

テイラーの拡散理論(式(22.23))は、次のようにより直接的に導くことができる。 $Y(T)$ に式(22.13)の表示を用いて、 Y^2 を作る。その際、 Y^2 は v_i の積分の二乗ではなく、 v_i の積分の積であることに注意しなければならない。積分変数の混同をさけるために、式(22.13)の積分助変数 t のかわりに別々の変数 (τ, η) を用いると

$$Y^2(T) = \int_0^T v_i(\tau) d\tau \cdot \int_0^T v_i(\eta) d\eta \quad (22.24)$$

したがって、二つの被積分関数はともに積分記号のうちにまとめることができる。このアンサンブル平均をとれば $\overline{Y^2(T)}$ は直ちに

$$\begin{aligned} \overline{Y^2(T)} &= \int_0^T \int_0^T \overline{v_i(\tau) v_i(\eta)} d\tau d\eta \\ &= \overline{v_i^2} \int_0^T \int_0^T R_i(\eta - \tau) d\tau d\eta \end{aligned} \quad (22.25)$$

と表される。ここに、

$$\overline{v_i(\tau) v_i(\eta)} = \overline{v_i^2} R_i(\eta - \tau) = \overline{v_i^2} R_i(\xi) \quad (22.26)$$

($\xi = \eta - \tau$)である。

式(22.25)の右辺の積分を図22.6(a)の左上と右下の部分に分け、右下部の積分で記号 η と τ を入れ換え $R_i(\tau) = R_i(-\tau)$ の関係を用いると、 $\overline{Y^2} = \int_0^T \int_0^{\tau} \overline{v_i^2} R_i(\eta - \tau) d\tau d\eta + \int_0^T \int_{\tau}^T \overline{v_i^2} R_i(\eta - \tau) d\eta d\tau = 2 \int_0^T \int_0^{\tau} \overline{v_i^2} R_i(\eta - \tau) d\tau d\eta$ となる。さらに、 $d\xi = -d\tau$ より上の積分は

$$\overline{Y^2} = 2 \overline{v_i^2} \int_0^T \int_0^{\tau} R_i(\xi) d\xi d\eta \quad (22.27)$$

と変形される。これは、すでに求められた式(22.23)にはかならない。

b. テイラーの拡散理論式の変形——Kampé de Férietの表示——

さらに、 (ξ, η) 座標に画いた図22.6(b)を参考にして、式(22.23)の積分の順序をかえて変形すれば(Kampé de Fériet, 1939)、 $\overline{Y^2} = 2 \overline{v_i^2} \int_0^T R_i(\xi) \int_{\xi}^T d\eta d\xi$,

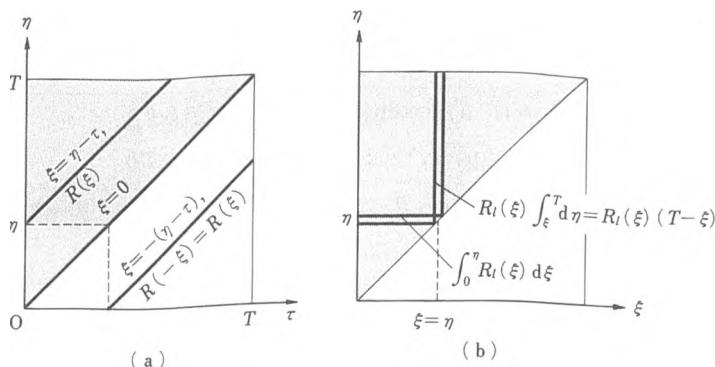


図 22.6 (a) $R_1(\eta - \tau)$ の $\xi = \eta - \tau = 0$ に関する対称性から、式 (22.25) の (τ, η) 面上の積分は上半分の積分を 2 倍すればよい。(b) 式 (22.23) の (ξ, η) 面上の左上半分積分の順序を変える。

したがって

$$\bar{Y}^2 = 2\bar{v}_l^2 \int_0^T (T - \xi) R_1(\xi) d\xi \quad (22.28)$$

となる。

式 (22.28) をさらに変形すれば、

$$\begin{aligned} \bar{Y}^2 &= 2\bar{v}_l^2 \left\{ T \int_0^T R_1(\xi) d\xi - \int_0^T \xi R_1(\xi) d\xi \right\} \\ &= 2\bar{v}_l^2 \{ f_1(T) T - f_2(T) \} \end{aligned} \quad (22.29)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} f_1(T) &= \int_0^T R_1(\xi) d\xi \longrightarrow T_l = \int_0^\infty R_1(\xi) d\xi \quad (T \rightarrow \infty) \\ f_2(T) &= \int_0^T \xi R_1(\xi) d\xi \longrightarrow \text{const} \quad (T \rightarrow \infty) \end{aligned} \right\} \quad (22.30)$$

c. 広がり幅・拡散係数と距離の関係——テイラーの拡散理論の解——

不規則な乱流の性質として、ラグランジュ相関は $\xi \rightarrow \infty$ で $R_1 \rightarrow 0$ 、 $\xi \rightarrow 0$ では定義により $R_1 \rightarrow 1$ の性質をもつ。この関係を用いて、式 (22.21)、(22.23) の積分を行うことができる。まず $T \cong 0$ の場合には式 (22.21) で $R_1 \cong 1$ とおいて積分を行えば、

$$K = \bar{v}_l^2 T \quad (T \cong 0) \quad (22.31)$$

$$\sqrt{\bar{Y}^2} = \sqrt{\bar{v}_l^2} T \quad (T \cong 0) \quad (22.32)$$

他方、 T が十分大きければ、

$$\int_0^T R_I(\xi) d\xi = \text{const} = T_I \quad (22.33)$$

とおけるから、

$$K = v_i^2 \cdot T_I (= \text{const}) \quad (T \gg T_I) \quad (22.34)$$

$$\sqrt{\bar{Y}^2} = \sqrt{2v_i^2 T_I} \cdot \sqrt{T} \quad (T \gg T_I) \quad (22.35)$$

となる. 式 (22.33) で定義される T_I は緩和時間 (あるいは渦の寿命時間) と呼ばれ, 乱流場の時間的スケールを示す指標である.

もし, 上記のラグランジュ相関の一般的性質を満たす内挿式として

$$R_I(\xi) = e^{-\xi/T_I} \quad (22.36)$$

を式 (22.20), (22.23) に代入すれば, 次の関係を得る.

$$\left. \begin{aligned} K &= \overline{v_i^2} T_I \left[1 - \exp\left(-\frac{T}{T_I}\right) \right] \\ \bar{Y}^2 &= 2\overline{v_i^2} T_I^2 \left[\frac{T}{T_I} - \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{T}{T_I}\right) \right\} \right] \end{aligned} \right\} \quad (22.37)$$

あるいは, もっと簡単に $R_I(\xi)$ を矩形の関数で近似し,

$$R_I(\xi) \begin{cases} = 1 & (\xi \leq T_I) \\ = 0 & (\xi > T_I) \end{cases} \quad (22.38)$$

とすると

$$\bar{Y}^2 = \begin{cases} = \overline{v_i^2} T_I^2 (T/T_I)^2 & (T \leq T_I) \\ = \overline{v_i^2} T_I^2 (2T/T_I - 1) & (T > T_I) \end{cases} \quad (22.39)$$

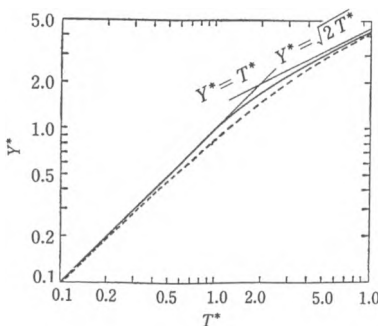


図 22.7 トラベルタイム $T^* = T/T_I$ と拡散幅 $Y^* = \sqrt{\bar{Y}^2}/(\sqrt{\overline{v_i^2}} T_I)$

となる (井上, 1950).

テイラーの理論によれば, 連続的に放出されるトレーサーの広がり幅は, ラグランジュ相関 $R_I(\xi)$ を2回積分して得られる. それゆえ, $R_I(\xi)$ の関数形が多少異なっても, \bar{Y}^2 には直接的には影響しない. $R_I(\xi)$ として指数関数を用いても (図 22.7 の破線), もっと単純に矩形の形を仮定しても (図 22.7 の実線) 結果はほとんど変わらず, $R_I(\xi)$ の全体的

特性量である $T_l = \int_0^\infty R_l(\xi) d\xi$ と $\overline{v_l^2}$ により拡散は決定される。

上に導いた各式より、テイラーの乱流拡散理論の与える重要な結果は次のようになる。

(i) 連続的放出源よりの流体粒子の拡散幅は、トラベルタイム T が短い範囲 ($T \ll T_l$) では、 T すなわち ($T = x/U$ であるから) 放出源からの流下距離 x に比例して直線的に広がっていく (式 (22.32))。

(ii) しかし、ある距離以上 ($T \gg T_l$, $x \gg T_l U$) になると、拡散幅は距離 x の $1/2$ 乗でしか広がらない (式 (22.35))。

(iii) 乱流拡散係数は放出源の近くでは、トラベルタイムあるいは放出源からの距離に比例して増加するが (式 (22.31)), ある所より以遠では一定となる (式 (22.34))。

(iv) 拡散能は流れの場の乱れの強さ $\sqrt{\overline{v_l^2}}$ と乱れの場のスケール T_l (あるいは $T_l U$) に関する。乱れが強いほど、また乱れのスケールが大きいほど拡散による効果が大きい。

大気中での拡散を例にとれば、冬季は地面が冷えて大気の下層には冷く重い層があり、安定した状態になっている。そのため大気の乱れが少なく、また乱れのスケールも小さい。したがって、大気の拡散能は低く、いわゆるスモッグ・シーズンである。一方、夏季の昼間には太陽熱輻射のために地面は熱せられて、地表面近くの熱をもった軽い大気塊は激しい対流運動を起こす。夏の入道雲を思い出すがよかろう。このため、大気の乱れもそのスケールも大きくなり、大気の拡散能は高まる (「流れの世界」図 43)。(もっとも、大気の状態は、これほど単純ではなくて夏季にも大気汚染は発生する)。

d. 乱流拡散のスペクトルによる表現

テイラーの拡散理論は乱流場のラグランジュ速度の自己相関係数に関して表現されている。19章において、自己相関とスペクトルとは互いにフーリエ変換の関係にあることを説明し、渦の不規則な集合である乱流場の理解には、乱流変動の各周波数成分の乱れへの寄与を表すスペクトルによる表示が適切であることを述べた。拡散においても同様であって、ラグランジュ相関 $R_l(\tau)$ はラグランジュ速度スペクトル $F_l(f)$ と互いにフーリエ変換の関係にある。

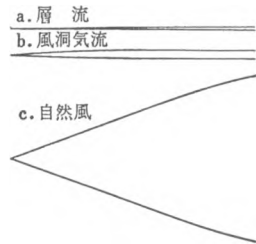


図 22.8 乱れの強さ、スケールによる拡散幅の差異
a. 層流 (分子拡散)
b. 風洞中の乱流拡散
c. 自然風による乱流拡散

$$F_l(f) = 4 \int_0^\infty R_l(\tau) \cos 2\pi f \tau \, d\tau \tag{22.40}$$

$$R_l(\tau) = \int_0^\infty F_l(f) \cos 2\pi f \tau \, df \tag{22.41}$$

ここに、

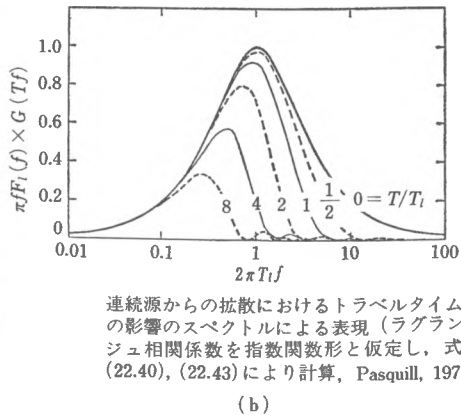
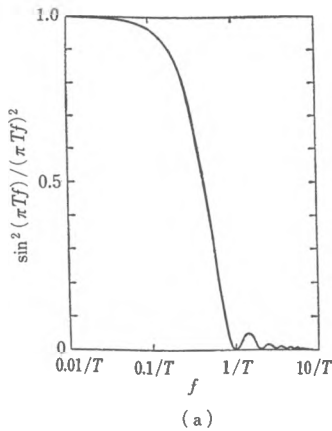
$$\int_0^\infty F_l(f) \, df = 1 \tag{22.42}$$

式 (22.28) に上式の第二式 (22.41) の関係を代入し、 τ に関する積分を行って変形すれば、

$$\overline{Y^2} = \overline{v_l^2} T^2 \int_0^\infty F_l(f) \frac{\sin^2(\pi T f)}{(\pi T f)^2} \, df \tag{22.43}$$

となる (Kampé de Fériet, 1939).

上式の被積分関数にかかる $G(Tf) = \sin^2(\pi Tf)/(\pi Tf)^2$ は、図 22.9(a) に示すように周波数 $f=1/T$ 以上の変動成分をほとんどカットする一種の高周波数カットオフ・フィルタで、トラベルタイム T が大きくなるほど除去される $F_l(f)$ の高周波数部分が広がることを示している。すなわち、 T が小さい放出源の近くでは、拡散場のすべてのスケールの乱れが拡散に寄与するが、放出源より遠くなるにつれてスケールの大きな渦の拡散への寄与の割合が卓越し、小さな渦の作用は無視しうるようになる。また、乱れが大きなスケールの渦を含むほど、拡散幅は増大する (図 22.9(b))。



連続源からの拡散におけるトラベルタイムの影響のスペクトルによる表現 (ラグランジュ相関係数を指数関数形と仮定し、式 (22.40), (22.43) により計算, Pasquill, 1974)

図 22.9 ティラーの乱流拡散理論のスペクトル表示

e. 濃度と観測時間

上述の理論は濃度の観測時間が無限大の場合であるが、観測時間（ないしはサンプリング時間）が有限（ s ）の場合の乱流拡散は式 (22.43) の右辺のラグランジュ・スペクトルに、さらに低周波数カットオフ・フィルター $[1 - \sin^2(\pi fs) / (\pi fs)^2]$ を作用させたことに相当する (Ogura, 1958).

$$\overline{Y^2}(T, s) = \overline{v_i^2} T^2 \int_0^\infty F_l(f) \frac{\sin^2(\pi f T)}{(\pi f T)^2} \left[1 - \frac{\sin^2(\pi fs)}{(\pi fs)^2} \right] df \quad (22.44)$$

この低周波数カットオフ・フィルターは、観測時間 s が長くなるほど拡散に大きなスケールの渦が寄与する効果を表している。

大気中の拡散では、鉛直方向の渦のスケールが地表からの高さによって規定されているのに対し、水平方向の渦のスケール（ないしは拡散幅）は観測時間とともに増大し、トレーサー濃度は拡散幅に逆比例して減小する。慣性領域におけるラグランジュ・スペクトルが

$$F_l(f) \propto f^{-2} \quad (22.45)$$

であること (井上, 1952) を考慮すると、“一点で観測されるトレーサー濃度は観測時間すなわちサンプリング時間 s の $-1/2$ 乗に比例して逓減する” こと、いわゆる “ $-1/2$ 乗則”

$$C_{\text{mean}}(s) \propto s^{-1/2} \quad (22.46)$$

が導かれる。

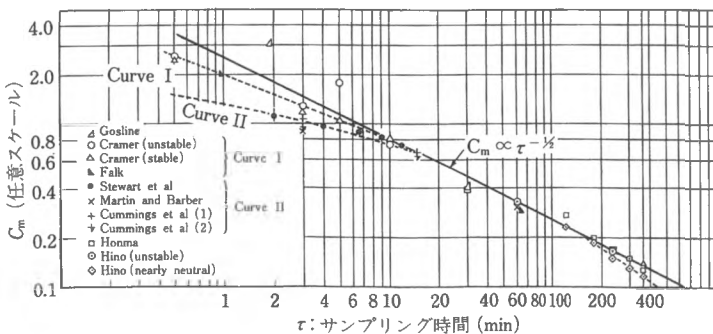
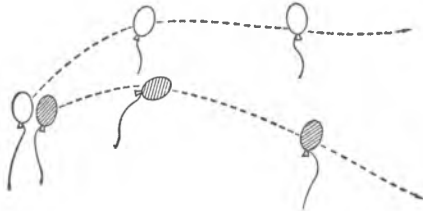


図 22.10 軸上最大濃度と観測（またはサンプリング）時間 s 、 $-1/2$ 乗則 (日野, 1965)

22.3 相対拡散

a. 相対拡散への乱れ成分の寄与

テイラーの理論よりやや遅れて、リチャードソン (Richardson) は 1926 年に “neighbour separation” という拡散概念を提出した。これは、二つの風船をほぼ同一点より同時に放しても、決して二つそろって同じコースを飛ばず、徐々に二つの風船が離れていく現象を考えたものである。また、一点でトレーサー群 (あるいは雲) を放出する場合にも、この群は平均流に乗って下流に流されつつ、



(a) 相対拡散の最も単純なもの
(two particle analysis)



(b) パフ (トレーサー雲) の拡散

図 22.11 相対拡散

次第にその広がり半径を大きくしていく。この種の拡散は、前節で取り扱った連続源型のテイラー拡散とは異なり、多数の流体粒子の集団の相対的な広がりを追跡しようとするもので、相対拡散 (relative diffusion) とか “浮遊源型の拡散” と呼ばれている。また、“多数の粒子の集団” の最も単純なものが一對の粒子の組であることから、理論的には 2 粒子相互の拡散として取り扱われる。こ

の意味でテイラー拡散を one particle analysis と呼ぶのに対し、相対拡散は **two particle analysis** と名づけられる。

相対拡散については、拡散係数に関するリチャードソンの $4/3$ 乗則がよく知られている。しかし、相対拡散の意義が正しく認識され、理論的に論じられるようになったのは、1940 年代の Obuhov (1941), Batchelor (1949, 1952), 井上 (1952) らの研究に負うところが大きい。

相対拡散のメカニズムを理解するために、乱れの場合は同じ大きさの渦から成り立っているとしよう。各々の渦は剛体的回転運動を行いつつ、自分自身以外のほかの渦の作用でランダムな運動をしている。渦のスケールに比べて 2 粒子の間隔あるいは粒子雲のスケールが十分短いと、2 粒子 (粒子雲) はいわば回転台の上に乗って回っているように相互の間隔は変化しない。逆に、渦のスケールに比べて 2 粒子間の間隔 (あるいは粒子雲のスケール) が十分大きくなると 2 粒子の運動

は互いに関連がなく、渦は粒子雲に対していわば分子拡散的に作用するであろう。したがって、ある間隔の粒子の拡散に対して有効なのは、その粒子間間隔あるいは粒子雲のスケール以下の渦である。しかしながら、スケールの小さな渦ほど乱れのエネルギーは少ないので、乱れのエネルギーと拡散効率

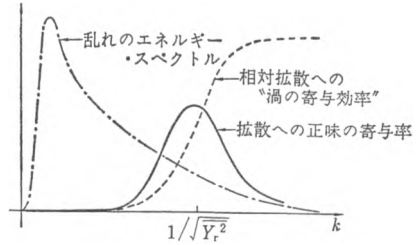


図 22.12 相対拡散への各波数成分よりの寄与 (Corsin)

の積としての相対拡散は、粒子間距離と同じ大きさの渦の寄与が最も重要であると結論される (図 22.12, 22.16)。

b. 慣性小領域の相対拡散

上に述べたように、相対拡散における拡散能—拡散係数は、粒子間隔 (もっと一般的に言えば、粒子群の広がり) $\sqrt{\overline{Y_r^2}}$ に支配される。ここで、19章に述べたコルモゴロフの考え方を拡散場にも適用する。拡散粒子群のスケール $\sqrt{\overline{Y_r^2}}$ が拡散場の最大渦のスケール L よりも十分小さく、局所等方性の領域にあるとすると、拡散は初期の粒子間隔 A と拡散時間 T のほかには、動粘性係数 ν とエネルギー—消散率 ϵ のみに関係する。これらの次元マトリックスは次表のようになる。

表 22.1

	A	T	ϵ	ν	$\overline{Y_r^2}$	(または $d\overline{Y_r^2}/dt$)
長さ (L)	1	0	2	2	2	(2)
質量 (M)	0	0	0	0	0	0
時間 (T)	0	1	-3	-1	0	(-1)

相対拡散に関係する物理量は $A, T, \epsilon, \nu, \overline{Y_r^2}$ の $n=5$ 個である。一方、基本次元は長さ (L) と時間 (T) の $m=2$ 個である。したがって、相似則 (π 定理) によれば、相対拡散は 5 個の物理量から作られる $3(=n-m)$ 個の無次元量により記述される。次元解析[†]を行えば、 π 定理により次の関係が導かれる。

$$\frac{d\overline{Y_r^2}}{dT} = \epsilon T^2 f_n \left(\frac{A}{\epsilon^{1/2} T^{3/2}}, \frac{T\epsilon^{1/2}}{\nu^{1/2}} \right) \quad (22.47)$$

(1) 拡散時間が長い場合—リチャードソンの 4/3 乗則 大気拡散の場合のようにレイノルズ数が十分大きければ、初期粒子間隔 A や相対拡散幅 $\sqrt{\overline{Y_r^2}}$ は、

[†] 次元解析や π 定理については、「流体力学」第 5 章 (朝倉書店, 1974) を参照。

ϵ と ν より作られる長さのスケール (コルモゴロフ・スケール) $\eta_0 = (\nu^3/\epsilon)^{1/4}$ に比べて十分大きい。したがって拡散はコルモゴロフの局所等方性理論の慣性領域で行われ、拡散は粘性の作用 ν に無関係でなければならない。ゆえに、式 (22.47) の右辺の括弧内の第二項は式より落ちて

$$\frac{d\overline{Y_r^2}}{dT} = \epsilon T^2 f_n \left(\frac{A}{\epsilon^{1/2} T^{3/2}} \right) \tag{22.48}$$

拡散時間が十分長い場合には、 $\eta_0 \ll A \ll \overline{Y_r^2} \ll L$ (拡散場の渦の最大スケール) となつて 2 粒子の相対運動は A にも無関係となり、拡散 $\overline{Y_r^2}$ は T のほかには ϵ のみに関係する。結局、上式の関係は

$$\frac{d\overline{Y_r^2}}{dT} \propto \epsilon T^2 \tag{22.49}$$

となる。上式を T に関して 1 回積分すれば広がり幅と T の関係が得られ、その結果を式 (22.49) に代入すれば拡散係数 $K = (1/2) d\overline{Y_r^2}/dT$ が求まる。

$$\sqrt{\overline{Y_r^2}} \propto \epsilon^{1/2} T^{3/2} \quad (\eta_0 \ll A \ll \sqrt{\overline{Y_r^2}} \ll L) \tag{22.50}$$

$$K \propto \epsilon^{1/3} (\sqrt{\overline{Y_r^2}})^{4/3} \quad (\eta_0 \ll A \ll \sqrt{\overline{Y_r^2}} \ll L) \tag{22.51}$$

上式が、“相対拡散における拡散係数は、拡散のスケール (粒子群の広がり) l の $4/3$ 乗に比例する ($K \propto l^{4/3}$)” というリチャードソンの法則 (1926) である。

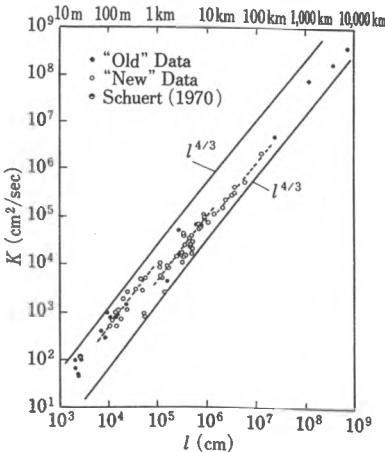


図 22.13 拡散係数とスケール (Okubo による)

リチャードソンは、拡散のスケールが $15 \sim 5 \times 10^4$ m の範囲の 5 種類のデータから実験的にこの法則を導いた。しかし、上の理論的誘導で明らかのように、リチャードソンの $4/3$ 乗則は、拡散のスケール $\sqrt{\overline{Y_r^2}}$ が拡散場の渦のスケール L より十分小さく、かつ粘性の影響を受けない慣性小領域にある場合にのみ成立することに注意しなくてはならない。

(2) 拡散時間が短い場合 $\sqrt{\overline{Y_r^2}}$ が慣性領域にあるが、拡散時間 T が十分小さい場合には、2 粒子の速度はほぼ一定 ($d\sqrt{\overline{Y_r^2}}/dT = \text{const}$) で、 $\overline{Y_r^2}$ の時間変

化率は T に比例する。したがって、式 (22.48) の右辺の関数 $f_n(z)$ を z のべき乗型と考えると、べき数は $2/3$ であり

$$\frac{d\overline{Y_r^2}}{dT} \propto (\epsilon A)^{2/3} T \quad (\eta_0 \ll \sqrt{\overline{Y_r^2}} \ll L, T \approx 0) \quad (22.52)$$

の関係が得られる。上式を積分すれば、粒子間隔について次の式を得る。

$$\sqrt{\overline{Y_r^2}} \propto (\epsilon A)^{1/3} T \quad (\eta_0 \ll \sqrt{\overline{Y_r^2}} \ll L, T \approx 0) \quad (22.53)$$

$$K \propto (\epsilon A)^{1/3} \sqrt{\overline{Y_r^2}} \quad (22.54)$$

図 22.14 は式 (22.50), (22.53) の関係を実測データと比較したものである。ここに、 σ は濃度分布の標準偏差。放出源からのある距離における拡散濃度分布 $C(y)$ を放出源からの粒子の y 軸方向の移動距離の確率分布と考えると、 $\overline{Y_r^2} = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 C(y) dy = \sigma^2$ となる。以上をまとめると、

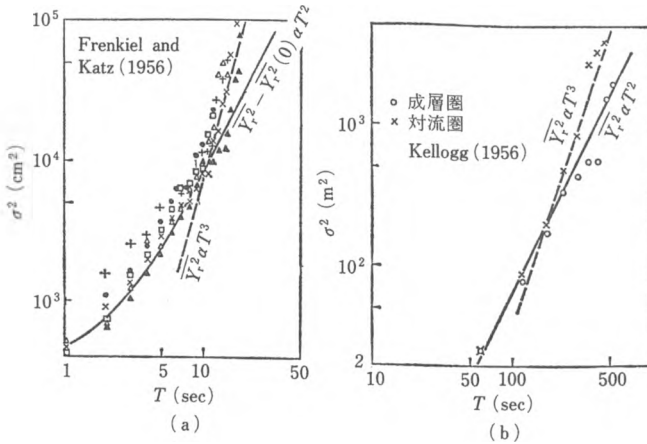


図 22.14 バフの相対拡散

(i) 相対拡散のスケール ($\sqrt{\overline{Y_r^2}}$) が、拡散場の最大渦のスケール L より十分小さく、かつ乱れのコルモゴロフ・スケール $\eta_0 (= \nu^{3/4} / \epsilon^{1/4})$ より十分大きい慣性領域にある場合には、拡散時間 T の小さい範囲では相対拡散幅 $\sqrt{\overline{Y_r^2}}$ は T に比例して増加し、

(ii) 拡散時間 T が大きい場合には、 $\sqrt{\overline{Y_r^2}}$ は T の $3/2$ 乗に比例する。この場合には、拡散係数についてリチャードソンの $4/3$ 乗則 ($K \propto l^{4/3}$) が成立する。(テイラー型拡散では T が十分大きい場合には $\sqrt{\overline{Y_r^2}} \propto T^{1/2}$, $K = \text{const}$ であることを思い出されたい。)

(iii) T が増加し、粒子間隔が隔たるにつれて、粒子対の相対速度に影響する渦径が増大し、粒子の分散傾向はますます急になる。

(iv) しかし、拡散スケールが十分大きく拡散場の最大渦径以上になると、相対拡散においても拡散係数は一定となり、拡散幅は \sqrt{T} に比例するようになる。

22.4 拡散における蛇行運動

a. テイラー型拡散と相対拡散

§ 22.2 に述べたテイラー型の固定源からの拡散と前節 (§ 22.3) に述べた浮遊源型の拡散とはどんな関係にあるのであろうか。本節ではこの点について考察しよう。

流れの場の一点に一群のトレーサーを放出したとする。ごく単純に考えるとこのトレーサー雲は、図 22.15(a), (b) に示すように流れによって下流に一定流速で流されるとともに、前節で述べた相対拡散により広がり半径が大きくなっていき、このトレーサー雲の包絡線がテイラー型拡散になるように思われる。しかし、一般にはトレーサー雲の拡散はこの図のようにはならない。相対拡散の理論はトレーサー雲の相対的な広がりについて述べているのみであって、トレーサー雲の中心が図のように放出点を通る流軸上にあるとはしていない。図 22.15 (a) のような拡散が起こるのは、①

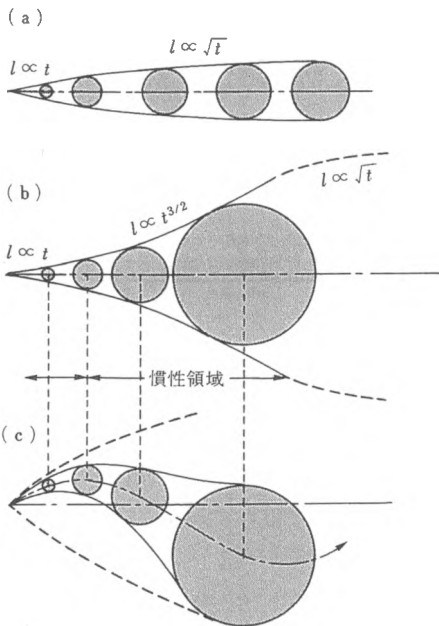


図 22.15

(a) 小さな渦のみによる拡散、(b) 慣性領域における相対拡散、(c) 重心の拡散(蛇行)と相対拡散の重ね合わせ。破線は連続源からのテイラー拡散。

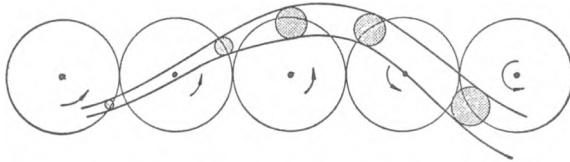
② 拡散場の最大渦のスケールが非常に小さい場合とか、あるいは③ 拡散時間が十分長くなり、拡散場の最大渦径より拡散幅が十分大きく拡散係数が一定となる領域についてである。

トレーサー雲はその径のオーダー以下の渦の作用により相対的に広が

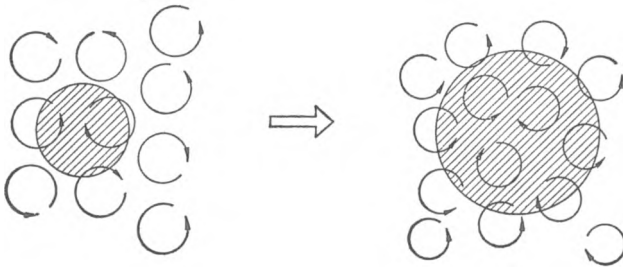
りを増すとともに、重心もまた拡散場のより大きな渦の作用により流軸のまわりに変動する (図 22.15(c)). 重心の変化はいわゆる one particle analysis による拡散に相当し、重心のまわりのトレーサー雲の広がりには two particle analysis による拡散である。この関係をわかりやすくするために、拡散場がトレーサー雲の径以下の小さな渦とこれよりも遥かに大きな渦径の二種類の渦からなると考えた場合の拡散を模式的に示したのが図 22.16 である。トレーサー雲の重心は一つの大きな渦によって、その回転運動とともに流下する。結局、トレーサー雲は図 22.15(c) や図 22.16(a) に見られるように流軸のまわりにうねるようになる。これを煙の蛇行運動 (meandering of plume) という。(plume とは、元来羽毛あるいは羽根のように軽いものという意味であるが、転じて受動的に運動する流体塊をさすのに用いられる。)

いままでは、一つのトレーサー雲を時間的に追跡したが、放出源から連続的にトレーサーを放出した場合の各瞬間瞬間の拡散の様子も図 22.15(c) と同様なものとなる。日射の激しい夏の昼など、煙突からの煙がこの図のようにのたうっているのをよく見かけるであろう (「流れの世界」図 43)。

こうしたトレーサー雲の蛇行運動を伴った相対拡散を多数重ね合わせたのが、



(a) 大きな渦によるトレーサー雲の蛇行



(b) 小さな渦によるトレーサー雲の拡散

図 22.16

テイラー型の固定源からの拡散理論である (図 22.15(c) の破線)。この関係を式で導けば次のように表される。

$$\sigma^2(T) = \sigma_c^2(T) + \frac{1}{2}\sigma_r^2(T) \quad (22.55)$$

ここに、 $\sigma^2(T)$ はテイラー理論 (一粒子拡散) における拡散幅の二乗もしくは分散、 $\sigma_r^2(T)$ は相対拡散幅の二乗もしくは分散、 $\sigma_c^2(T)$ はトレーサー粒子雲 (群) の重心の拡散幅の二乗もしくは分散を表す。

実際のトレーサー実験で観測されるトレーサーの濃度分布や広がり の形は、多くの場合フィックの拡散方程式の解として得られる等濃度線図やテイラーの拡散理論の与えるトレーサーの広がり幅の形と大きく異なるのが普通である。トレーサー実験で得られるトレーサー・プルームの形や濃度の分布 (等濃度線図や流軸に垂直な断面での濃度分布) は不規則であり、かつ理論より広がり幅が狭い (図 22.17, 22.18)。

この理由は、フィック式の理論解やテイラーの理論は長時間の観測データの平均、もしくは同一条件のもとで行われる多数の実験の平均 (アンサンブル平均) を意味するのに対して、実際の拡散実験のデータはただ一回の実験によるものであり、観測時間も短く瞬間濃度分布に近いものを測定するからである。

b. 瞬間濃度と平均濃度の比——流下距離との関係——

プルームの蛇行運動は実際問題の上で汚染物の濃度変動、特に最大濃度と平均

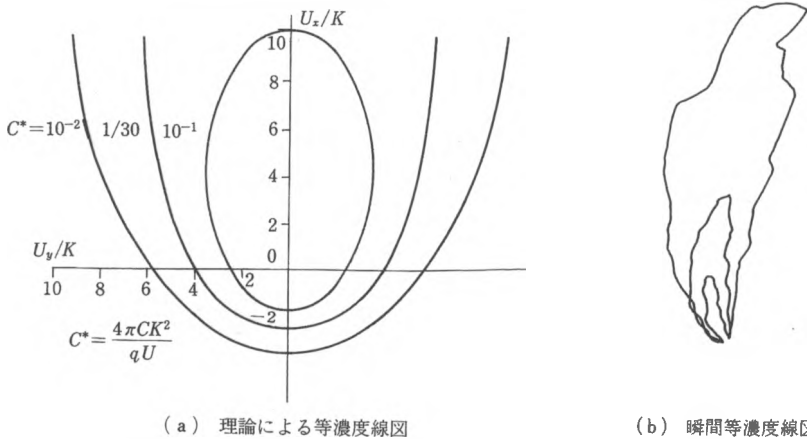


図 22.17 連続源からのトレーサーの濃度分布の模式図

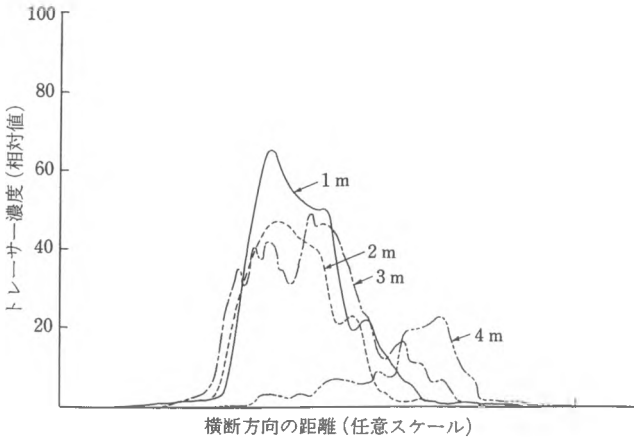


図 22.18 流軸を横切る断面内のさまざまな深さでのほぼ瞬間とみなせる時間の濃度分布。カナダの湖沼での拡散実験，放出源からの距離 $x=500\text{m}$ (Murthy and Csanady, 1971)。

濃度との関係を知る上に重要である。

放出源からのトラベル・タイム $T(=x/U)$ のある観測点でのトレーサー濃度は (三次元的拡散の場合) 拡散プルームの横断面積，したがって，拡散幅の二乗に逆比例する。つまり，平均濃度は $C_{\text{mean}} \propto \sigma^{-2}(T)$ ，瞬間濃度は瞬間的な相対拡散幅の二乗に逆比例し， $C_{\text{inst}} \propto \sigma_r^{-2}(T)$ 。慣性領域では，これらは $\sigma^2(T) \propto T^2$ および $\sigma_r^2(T) \propto T^3$ であるから，ある点での瞬間濃度と平均濃度の比はトレーサーのトラベル・タイム T あるいは放出点からの距離 $x(=TU)$ に逆比例する。

$$\frac{C_{\text{inst}}}{C_{\text{mean}}} \propto T^{-1} \propto x^{-1} \quad (>1) \quad (22.56)$$

この関係式は放出源に近いほどトレーサー・プルームの蛇行が激しく長時間の平均濃度に対し瞬間濃度が高いことを示している。

なお，上の関係 (22.56) と前節で示した観測時間 s の効果 (式 (22.46)) とを混同しないように，留意されたい。

22.5 分散 (移流拡散)

前節までは，一様な流れの中の拡散を取り扱った。しかし，円管路や開水路のように一つの断面内の流速分布が一様でない，いわゆるシャーをもつ流れの中の拡散が問題となることも多い。この問題を最初に論じたのは，テイラー (1953，

1954) である。流速分布が一つの断面内で一様でないために流速の差による流れ方向の物質輸送の広がりが生じる。この現象はいままで論じてきた拡散 (diffusion) と機構を異にしているので、特に分散 (dispersion) とか移流拡散 (convective diffusion) と呼ばれている。

さて、管路や開水路の一点で放出されたトレーサーは流下につれて拡散し、ある時間後には断面いっばいに広がって、深さ方向 (y 方向) にはわずかに濃度分布が異なるのみで、拡散は主として流下方向 (x 方向) に行われる状態になる。分子拡散についてのフィックの方程式を、乱流拡散に拡張する際に乱れの作用の時間平均をとったのと同じように、移流拡散では流速分布・濃度分布の断面平均からのズレの効果の平均をとる。

§ 22.1. b と同様に、ある点での流速と濃度のアンサンブル平均を \bar{u} , \bar{C} , 変動成分を u' , C' と表す。さらに、ある断面の平均流速と断面平均濃度を U , C とし、断面平均値とある点のアンサンブル平均値との差を $''$ をつけて表す。すなわち、図 22.19 を参考にして、

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} &= U + U'' & \bar{C} &= C + C'' \\ U &= [\bar{u}] & C &= [\bar{C}] \end{aligned} \right\} \quad (22.57)$$

ここに、 $[\]$ は断面平均をとることを意味する。

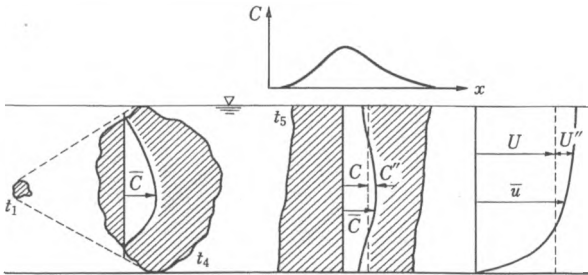


図 22.19 (Holley, ASCE)

式 (22.10) に上の断面平均値と平均よりのズレの定義を代入し、断面平均をとる演算を行えば、移流効果による拡散方程式として

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (D_m + K_x) \frac{\partial C}{\partial x} \right\} + \frac{\partial [-U''C'']}{\partial x} \quad (22.58)$$

を得る。

上式の右辺の第二項がいわゆる移流効果で、これは流れの方向の濃度勾配 $\partial C/\partial x$ に比例すると考えることができる。

$$E \frac{\partial C}{\partial x} = [-U''C''] + (D_m + K_x) \frac{\partial C}{\partial x}, \quad (C'' \ll C) \quad (22.59)$$

ここに E は縦分散係数 (coefficient of longitudinal dispersion) と呼ばれる。上式右辺の第二項は便宜上第一項とまとめたが、この項は第一項に比べて小さく普通は 1% またはそれ以下である。式 (22.58) と式 (22.59) を一つにして、次の関係式が得られる。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = E \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (22.60)$$

縦分散係数 E を求めるために、式 (22.10) に式 (22.57) を代入して y 方向の平均をとる前の式において、オーダーの大きい項を取り出す。すなわち、トレーサーは x 方向に大きく広がっているので $\partial/\partial x$ の項は $\partial/\partial y$ の項に比べてきわめて小さいことを考えれば、

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial C''}{\partial y} \right) = U'' \frac{\partial C}{\partial x} \quad (22.61)$$

の関係が得られる。 C は断面平均濃度で y に無関係であることを考慮し上式を y に関して積分すれば、濃度の断面平均値よりの偏差 C'' は

$$C'' = \frac{\partial C}{\partial x} \int_0^y \frac{1}{K_y} \int_0^y U'' dy dy \quad (22.62)$$

となる。したがって、縦分散係数は定義式 (22.59) より

$$\begin{aligned} E \frac{\partial C}{\partial x} &= [-U''C''] \\ &= - \left[\frac{1}{h} \int_0^h U'' \left\{ \int_0^y \frac{1}{K_y} \left(\int_0^y U'' dy \right) dy \right\} dy \right] \frac{\partial C}{\partial x} \end{aligned}$$

すなわち、

$$E = -h U_r \int_0^1 \frac{U''}{U_r} \left\{ \int_0^\eta \frac{U_r h}{K_y} \left(\int_0^\eta \frac{U''}{U_r} d\eta \right) d\eta \right\} d\eta \quad (22.63)$$

($\eta = y/h$) となる。

流速分布に対数分布式を用い、 y 方向の拡散係数 K_y を運動量の輸送係数 ($K_r = \tau/(d\bar{u}/dy)$) に等しいとすれば、上式より E は

$$E = 5.9 U_r h \quad (\text{開水路}) \quad (22.64)$$

となる。

同様の理論により、円管の場合の E は次のようになる。

$$E = 10.1 U_r a \quad (\text{円管路}) \quad (22.65)$$

ここに、 a : 管の半径。

リチャードソン—平和愛好の天気数値予報の先覚者

(Lewis Fry Richardson, 1881—1953)



今日スーパー・コンピューターの最大の利用者は、流れに関する計算屋である。地球温暖化予測の全球計算 (GCM : general circulation model)、日々の天気予報、台風の進路予報、新型車の空力抵抗の計算、航空機の空力計算、太平洋を渡って日本の沿岸を襲う地震津波、洪水、ヒートアイランド・クールアイランドなど都市環境、ビル風などの応用面から、物体背後のカルマン渦の発生、複雑な乱流のシミュレーションといった基礎面までスーパー・コンピューターが活躍している。流体力学者はコンピューター

の誕生以来その最大の利用者であり、かつ高性能化の厳しい要求者でもあった。

1940年代の後半、プリンストン大学の数学者フォン・ノイマンのアイデアでプログラム内蔵式 (いわゆるノイマン型) の電子計算機 ENIAC が誕生したとき、その高速性を生かす計算問題として天気の数値予報が選ばれ、プリンストン大学高等研究所にカリフォルニア大学のチャーニーを中心に若手チームが作られた。天気は疑いもなく流れの基礎方程式で記述される自然現象である。しかし、この方程式を解析的に解くことはもちろん、研究の常套手段である室内での実験も不可能で、数値実験以外に実際問題の解決の方法はない。これが ENIAC の高性能を生かす課題として天気の数値予報が取り上げられた理由であった。もっとも、当時の電子計算機は真空管式で信頼性も低く、性能は今日のパソコンにも及ばないのに、怪物のように図体ばかり大きく、大きな室全体を占有する代物であった。

「天気の変化はいかに複雑不可思議であっても、流れの基礎法則にしたがって変化しているはずである」との信念のもとに、高速コンピューターの発明の遙か以前の 1913 年頃から、天気の数値予報に取り組んだのがイギリスのリチャードソンである。クエーカー教徒であった彼は第一次世界大戦には友好救急隊の一員として負傷者の後方輸送という任務に就きながら、勤務の合い間にも懸命に手まわしの計算

機を回し続けた。しかも、こうした努力の結果の計算書が失われ、それが何ヵ月も後になってまさに奇跡的に石炭の山の下から発見されるという事故に会いながら。

このような大変な苦勞の甲斐もなく、たった6時間先の予測が実際と合わず計算結果はみごとな失敗であった。にもかかわらず彼の信念は変わらなかった。しかも、彼は失敗の原因を、初期データの不足・信頼度の低さ(誤差)と計算理論の不備というように、かなり正確につかんでいたようである。リチャードソンは自分のこの研究の結果を一冊の本“Weather Prediction by Numerical Process, Cambridge, (1922)”にまとめて出版した。これが30年後のチャーニー達の出発の先導役をはたした。

気象学者としてリチャードソンは、乱流による拡散には1921年テイラーにより発表された連続源型の拡散のほか、浮遊源型の拡散ないしは相対拡散があることに気づいた。後に井上栄一(1952)らにより理論的にも導かれることになる彼の有名な拡散係数に関する4/3乗則(1926)は、わずかに5種類のデータから経験的に導かれたものである。この点ではリチャードソンはラッキーであったといわなければならない。

リチャードソンがいかに乱流の本質を的確に理解していたかは、前出の天気の数値予報の本に載っている「渦の詩」(1922)によって知ることができる。(このリチャードソンの「渦の詩」は、ガリバー旅行記の著者として有名な18世紀の風刺作家スウィフトの詩(On Poetry, A Rhapsody, 1733)の替え詩である。)

Big whirls have little whirls
That feed on their velocity,
And little whirls have lesser whirls

And so on to viscosity
(in the molecular sense.)

大きな渦は小渦を抱え、
その速度を食って生きている。
小渦はより小さな渦を抱え、
そしてそれが粘性まで続く。(木田重雄訳)

この渦のカスケード過程は、テイラーとグリーン(1937)により単純化した数学モデルで示され、ずっと後年ソ連のコルモゴロフ(1941)が乱流の局所等方性の仮説を提案し定式化したものである。

しかし、後に彼の大気研究に最も関心をもっていた人達が毒ガスの専門家であることを知ったとき、クエーカー教徒であり平和主義者であった彼の苦悩は大きかった。彼は気象学の研究をやめ、未印刷の論文原稿を破棄してしまった。平和を愛好するリチャードソンは、いかにすれば戦争がなくなるのか、国民を戦争へと駆り立てる心理は何かということに、若い頃から関心があった。すでに1919年(38歳)にはこの面での最初の論文“Mathematical psychology of war”を発表している。

すでに王立学会のフェローであった彼が50歳にもなって、あらためて心理学を学び、国際紛争、軍拡競争、国民感情の変化の数学モデルの研究に没入していき、それは彼の死の年の論文“The submissiveness of nation”(1953)にまで続く。これらの研究は1960年彼の死後2冊の本として刊行された。リチャードソンの晩年には米ソ間の冷戦はすでに始まっていた。(第二次世界大戦終結の翌年、1946年、イギリスの元首相チャーチルは米のフルトンで「鉄のカーテン」演説を行った。これが冷戦の始まりの認識となった。)もし、彼が生きていたならば、1989年末以来の東西の壁の崩壊、冷戦の終結を彼はどんなに喜んだことであろうか。

- 1) 小倉義光 (1968): 大気科学—新しい気象の考え方, NHK ブックス.
- 2) 佐藤總夫 (1987): 自然の数理と社会の数理, II, 日本評論社.

問 題

3.1 水槽に直径 d (cm) 長さ L (cm) の円管が水平に取り付けられ水が流出している。水槽の水位が常に一定になるように水が補給されており、円管内の流れは乱流となっている。円管が滑らかな場合と相当粗度が k_s のそれぞれの場合について、次の間に答えよ。

- (1) 管からの流量は Q (cm³/sec) である。管の損失水頭 Δh を求めよ。
- (2) 逆に損失水頭 Δh が決められているとき、この管の流量を計算せよ。
- (3) 損失水頭 Δh が与えられたとき、必要流量 Q を流すための管径はいくらにとらなければならないか。

3.2 勾配 I の真直な幅の広い開水路がある。水路の流れの水深が h のとき、表面の流速はいくらか。また単位幅あたりの流量はどのくらいか。ただし、流れは乱流状態にあり、壁は滑らかと考えてよい。

3.3 上の問題において、水路の壁面が粗で相当粗度が k_s のときは、表面の最大流速および単位幅あたりの流量はどうなるか。

3.4 開水路の表面を流れる笹舟の速さを測ったら U_{\max} (m/sec) であった。この水路の単位幅流量はいくらか。また、この水路の壁は滑面か、粗面かを検討せよ。

3.5 小型の船を作った。波に対する安定性に多少問題があるので、船の両側に斜めに長さ l 、幅 w の板を取りつけて安定を増すようにした。船の速度を V km/hr とするとき船の受ける抵抗はこの安定板のためにどれだけ増加するであろうか。

3.6 先に完全流体のところを出した水槽からの流出の問題で、流体の粘性を考えたらどうなるか。特に、管の先端の噴出口を挿ったときと、太いままのときとで噴出する水の上がる高さはどちらが高いか。

3.7 二次元開水路流のベキ乗流速分布のベキ数 n と摩擦損失係数 f' の関係および n と相当粗度 k_s の関係を導け。

3.8 船の受ける抵抗のうち摩擦抵抗を模型実験により求める。それには、実型と模型の相似の条件として船腹に沿って発達する境界層の乱流への遷移点を合わせる必要がある。実型の大きさを L 、速度を U 、模型の大きさと速度をそれぞれ l, u とする。境界層の遷移を促すトリップ・ワイヤは模型のどの位置に着ければよいか。また、模型の曳行速度 u はいくらにすべきか。

3.9 電子計測機器の進歩により、乱れのスペクトルは比較的簡単に求められるようになった。さて、管路中に乱流流速計を設置し、乱れ速度のスペクトル密度曲線 $S(f) \sim f$ を求めたところ、コルモゴロフの $-5/3$ 乗則にしたがう領域が存在することが認められた。管路に沿う圧力勾配 dp/dx が与えられているとき、

- (1) エネルギー消散率 ϵ はいくらか。
- (2) 平均流速の勾配 $d\bar{u}/dy$ はどのくらいと推定されるか。
- (3) 渦動粘性係数 ϵ の値を推定せよ。

3.10 線放出源からのトレーサーの濃度分布式を求めよ。ただし、拡散係数 K は一定とする。

3.11 連続線源からトレーサーの二次元的拡散が行われている。テイラーの乱流拡散理論によりトレーサー濃度の等濃度分布図を求めよ。ただし、乱れの強さを $\sqrt{u'^2}$ 、乱れのラグランジュ・時間スケールを T_l 、流れの平均流速を U とする。また、断面内のトレーサーの濃度分布はガウス分布としてよい。

3.12 勾配 I の長い水路が平野を横切ってまっすぐ走っている。水路の壁はコンクリート仕上げで相当粗度は k_s 、水深は h である。この水路に誤って毒物を流してしまった。このとき L (km) 下流では毒物の濃度は最大値でどのくらいまで希釈されるであろうか。