問題のヒントと解答

1.1　$\omega_z=0$ ならば，$\gamma=2\partial v/\partial x$，逆に$\gamma=0$ ならば，$\omega_z=2\partial v/\partial x$.

1.2　連続の方程式より $\partial v/\partial y=-a$. したがって，それぞれの式を積分して

$$\left.\begin{aligned}u(x,y)&=\int\partial u/\partial x\cdot \mathrm{d}x+c_1(y)=ax+c_1(y)\\ v(x,y)&=\int\partial v/\partial y\cdot \mathrm{d}y+c_2(y)=-ay+c_2(x)\end{aligned}\right\}$$

ここに，$c_1(y)$，$c_2(x)$ はそれぞれ y および x の任意の関数.

1.3　$u=\partial\Psi/\partial y$，$v=-\partial\Psi/\partial x$ をそれぞれ積分すれば

$$\Psi=\int ax\,\mathrm{d}y=axy+c_3(y)$$

$$\Psi=\int ay\,\mathrm{d}y=axy+c_4(x)$$

したがって，

$$\Psi(x,y)=axy$$

1.5　水面低下速度と水槽底からの流出との間の連続の関係 $-A(dh/dt)=kav$ とトリチェリーの定理（式 2.27）を用いよ.

1.6　連続の関係より，管軸方向の流速Vは管の各断面で等しく時間 t のみの関数である. したがって，運動方程式より圧力勾配 $\partial p/\partial x$ も時間のみの関数で管の入口と出口の圧力差より $-\mathrm{d}p/\mathrm{d}x=\rho g\left(h-\dfrac{V^2}{2g}\right)/l$ である. これを管軸方向の運動方程式に代入して積分せよ.

1.15　速度 U_1 で x 軸の正の方向へ流れる一様流の複素速度ポテンシャルは $W_1=U_1z$, 速度 U_2 で x 軸の負の方向に進む二重湧出しの複素速度ポテンシャルは $W_2=U_2a^2/z$ である. この二つを重ね合わせると速度 U_1 の一様流中を半径 a の円が速度 $U_c=U_1-U_2$ で x の正の方向に進む場合の複素速度ポテンシャル $W=W_1+W_2=U_1z+(U_1-U_c)a^2/z=(z+a^2/z)U_1(t)-a^2U(t)/z$ となる.

1.17　抵抗Dと揚力Lは円柱の運動方向 $e^{i\chi}$ にそれぞれ平行および直角に作用するから，円柱に働く力Pの x，y 成分は複素数表示により

$$\begin{aligned}P_x+iP_y&=(-\pi a^2\rho\dot{U})e^{i\chi}+i(\rho\Gamma U-\pi a^2\rho U\dot{\chi})e^{i\chi}\\&=-\pi a^2\rho\ddot{\zeta}+i\rho\Gamma\dot{\zeta}\end{aligned}$$

ここに，ζは円柱の中心位置で，$\dot{\zeta}=Ue^{i\chi}$. したがって，円柱の運動方程式は円柱の質量を M, $M'=\pi a^2\rho$ とすれば

$$M\ddot{\zeta}=-\pi a^2\rho\ddot{\zeta}+i\rho\Gamma\dot{\zeta}$$

これを解くと

$$\zeta=\zeta_0+Ce^{i\omega t}$$

ここに，

$$\omega=\rho\Gamma/(M+M')$$

すなわち，円柱は角周波数 ω で半径 $R=|C|$ の円運動をする．

1.18 ミルン-トムソンの円定理を応用せよ．

1.20 ミルン-トムソンの円定理を応用して複素速度ポテンシャルを求めよ．次に渦の中心がそれ自身以外の作るポテンシャル場により移動する速度を導き，これを零とおけ．

1.21 $\zeta=ae^{\phi+i\theta}$ とおけば，ジューコフスキー変換は，

$$z=a(e^{\phi+i\theta}+e^{-(\phi+i\theta)}) \tag{1}$$

これを実数部と虚数部に分けると

$$x=2a\cosh\phi\cdot\cos\theta, \qquad y=2a\sinh\phi\cdot\sin\theta \tag{2}$$

上式より θ を消去すれば，次の共焦点楕円群

$$\frac{x^2}{(2a\cosh\phi)^2}+\frac{y^2}{(2a\sinh\phi)^2}=1 \tag{3}$$

となり，ϕ を消去すれば，共焦点双曲線群になる．

$$\frac{x^2}{(2a\cos\theta)^2}-\frac{y^2}{(2a\sin\theta)^2}=1 \tag{4}$$

これらは原点を離れる（$\phi\to\infty$ または $x\to\infty$ $(y\to\infty)$）につれてそれぞれ円および直線に近づく．

1.26 ポールはカルマン渦による変動揚力により強制的に振動して音を発していると考えられる．（レイノルズ数が高い場合の）ストローハル数＝一定の関係を用いよ．

1.27 セイシュの固有振動周期の式（6.69）を用いよ．

2.1 水槽面の低下速度と管からの流量との間の連続の関係およびハーゲン-ポアズイユの法則を用いよ．（問題 1.5 で管の摩擦損失を考慮せよ．）

2.2 レイリー問題と同様な手法を用いよ．

2.3 上と同様の解法を応用せよ．

2.4 x 軸を平行平板に沿い水平に，z 軸を鉛直に，y 軸をこれらに直角にとるとき，ナビエ-ストークスの方程式が

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho g}+h\right)=\frac{\nu}{g}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\rho g}+h\right)=\frac{\nu}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{\rho g}+h\right)=0$$

となることを示せ．次に，これを y 方向に積分し，xz 面内の平均流速が $\bar{u}$, $\bar{w}$ がダルシー則と同形式の法則にしたがう（平均流速すなわちベクトルがスカラー量の微分操作より導かれる）ことを示せ．

2.5 回転の中心軸より半径 r，幅 dr の円環部について剪断速度と粘性摩擦応力の関係を適用し，これを円盤全面に積分せよ．このとき，粘性による抵抗はほとんど円盤の下面にのみ作用することに注意せよ．

2.6 エネルギー消散率は問 2.6 図のようになる．

2.11 二次元噴流の流速分布式 (17.27) を用いよ.

3.1 (1) $f(Re,\ k_s/D) \sim Re(=VD/\nu)$ 曲線より, f を求め, $\Delta h = f\dfrac{L}{D}\dfrac{V^2}{2g}$ を計算せよ.

(2) $f \sim Ref^{1/2}(=D^{3/2}/\nu[2g\Delta h/L]^{1/2})$ 曲線を利用せよ.

(3) $f \sim Ref^{1/5}(=4/\nu[g\Delta h/Q^3/8\pi^3 L]^{1/5})$ の関係図を利用せよ.

新たに $f \sim Ref^{1/2}$, $f \sim Ref^{1/5}$ の曲線を用意するか, もしくは普通に用いられる $f \sim Re$ の曲線の上に $Ref^{1/2}=\mathrm{const}$ および $Ref^{1/5}=\mathrm{const}$ の補助曲線群を画いておけば, トライアル・エラーの計算を行うことなく直ちに流量 Q や必要管径 D が求められる.

3.2 深さ h, 流れの方向に dx の流体部分に働く x 方向の外力 (重力の分力) と底面での摩擦力とのつりあいから $U_\tau = \sqrt{ghI}$ の関係を導き, これを平均流速と摩擦速度 U_τ との関係式 (円管路の場合の式 (15.38) に対応する関係を二次元水路について求める) に代入せよ.

3.3 粗面水路の場合の $U_{\max} \sim U_\tau$ および $U_0 \sim U_\tau$ の関係式を用いよ.

3.4 滑面および粗面上の対数流速分布式において, $y \to h$, $U \to U_{\max}$ として分布式の定数項 A_s および A_r を求め, 正しい値と比較せよ. (実際には, 自由表面や水路幅の影響で水面まで対数則が成立しないので実用には注意.)

3.5 平板の抵抗法則により計算せよ.

3.6 噴出口を搾ると, 流出口急縮部の損失係数は増大する. しかし, 噴出流量が減り, パイプの中の水の流速は減少する. したがって, パイプの摩擦抵抗は噴出口を搾った方が少なくなる. 結局, この方が噴出口での総圧が大きくなるので, 流出口での損失係数の増加にもかかわらず, 噴水の高さは高くなる.

3.7 二次元開水路の場合について, ベキ乗分布則を全断面について積分し平均すれば,

$$\frac{U_0}{U_\tau} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{U_{\max}}{U_\tau} \tag{1}$$

一方, 対数分布則において, $y=h$ とすれば

$$\frac{U_{\max}}{U_\tau} = \left(\frac{1}{\kappa}\ln\frac{h}{k_s} + A_r\right) \tag{2}$$

また, f' の定義

$$f' = 2\left(\frac{U_\tau}{U_0}\right)^2, \quad \text{すなわち} \quad \sqrt{\frac{2}{f'}} = \frac{U_0}{U_\tau} \tag{3}$$

および f' と h/k_s の関係式

$$\frac{1}{\sqrt{f'}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{A_r - \frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\kappa}\ln\frac{h}{k_s}\right\} \tag{4}$$

これらの関係より f' と n および k_s と n に関し次式が求まる.

$$\sqrt{f'} = \sqrt{2}\,\kappa/n \tag{5}$$

$$n = \kappa\left\{A_r - \frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\kappa}\ln\frac{h}{k_s}\right\} \tag{6}$$

円管路の場合も同様な計算を行えばよい.

3.8 船体に沿う境界層が層流から乱流へ遷移する相対的位置を模型と実型とで同じに

なるようにせよ.

3.9 (1) コルモゴロフの乱流速度スペクトルの $-5/3$ 乗則式 (19.34) より, エネルギー消散率 ε が求まる.

(2) 壁面近傍と表面付近を除く大部分の領域で, エネルギーの生産率 ($P_r=\tau\mathrm{d}U/\mathrm{d}y$) とエネルギー消散率 ε はほぼ等しくつりあっている (ラウファーの実験) ことを利用せよ.

(3) $\tau=\epsilon\mathrm{d}\bar{u}/\mathrm{d}y$ および $\tau=\tau_0(1-y/h)$ より渦動粘性係数 (運動量輸送係数) ϵ が求まる. また, スペクトルより乱れの r.m.s. $\sqrt{\overline{u'^2}}=\left[\int_0^\infty E(f)\mathrm{d}f\right]^{1/2}$ と乱れのオイラー・スケール $l_E=\bar{u}\int_0^\infty R(\tau)\mathrm{d}\tau=\bar{u}\int_0^\infty\int_0^\infty 4E(f)\cos 2\pi f\tau\ \mathrm{d}f\mathrm{d}\tau$ を求め, 渦拡散係数 $K=\beta\sqrt{\overline{u'^2}}\,l_E$ が推定される. ここに, β はラグランジュ・スケール $L_l=\sqrt{\overline{v_l}^2}\ T_l$ とオイラー・スケール l_E の比で, $\beta=\bar{u}/(\alpha\sqrt{\overline{v_l'^2}})$ である. これらのパラメーターは, $\alpha=2.5\sim5$, $\beta\cong4$ の値をとる.

3.10 フィックの拡散方程式を解け.

3.11 テイラーの拡散理論式 (22.37) において $T_l=L_l/\sqrt{\overline{u'^2}}$ とすればトレーサーの放出源からの距離 $x=Ut$ とトレーサーの拡り幅 $\sigma=\sqrt{\overline{Y^2}}$ の関係がわかる. これを濃度のガウス分布式に代入せよ. 流軸上濃度はフラックス一定の関係から決定される. しかるのち, $C=f_n(x,y)$ において $C=$一定の曲線群を求めよ.

3.12 平均流速 U_0 を問題 3.3 と同様に計算し, また拡散係数は移流拡散式 (22.64) より求め, 一次元の拡散濃度分布式に代入し濃度を計算せよ. (ただし, 水路は十分幅広く等流状態にあると考えて, $U_*=\sqrt{ghI}$ を用いてよい.)