

16. 乱流境界層

16.1 平板に沿う乱流境界層流れ

a. 乱流への遷移

一様な流れの中に流れに平行に平板をおく。このとき、平板に沿って前縁から層流境界層が発達する。境界層はしだいに厚くなり平板の前縁から十分下流では、一様流速 U_∞ と境界層の排除厚 δ^* より作られるレイノルズ数 $Re^* = U_\infty \delta^* / \nu$ が、ある臨界値 ($Re^* \approx 420$) に達すると、境界層は微小擾乱に対して不安定となり、指数的に変動の振幅が増大していき、この点より遙か下流で境界層内の流れは乱流状態となる (§ 18.2 参照)。この乱流への遷移点のレイノルズ数 $Re_l = U_\infty l / \nu$ (l : 前縁よりの距離) は流れの乱れが小さい場合には、 $Re_l \approx 4 \times 10^6$ にも達するが、乱れの大きい普通の流れでは $Re_l \approx 5 \times 10^5$ である。境界層が層流から乱流へ遷移していることは次のような事実から確認できる。

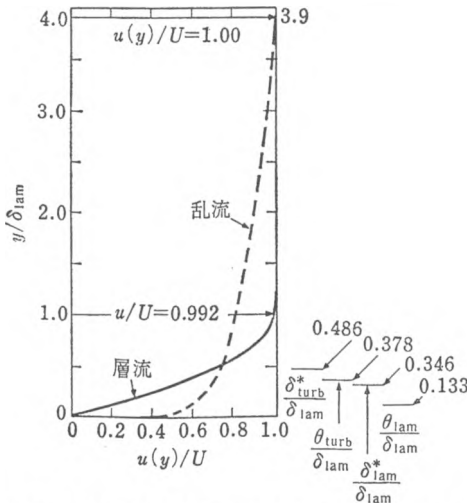


図 16.1 層流境界層と乱流境界層内の流速分布の相違; $dp/dx=0$, $Re_x=5 \times 10^5$ (Daily-Harleman, Addison-Wesley)

流へ遷移していることは次のような事実から確認できる。

(i) 境界層内の流速分布型がやせ型のブラジウス型から肥えた対数型あるいはベキ乗型に変化する (図 16.1)。

(ii) 境界層厚さの発達の仕方は、層流境界層の場合には x の平方根に比例するが ($\delta(x) \approx 5\sqrt{\nu x / U_\infty}$)、乱流境界層では層内の激しい乱流混合運動の結果、境界層の発達の仕方は明らかに急になる。後に示すように、滑面の平板に沿う乱流境界

層は $\delta(x) \cong 0.37x(U_{\infty}x/\nu)^{-1/5}$ で距離の $x^{4/5}$ に比例する。

(iii) 平板の受ける全抵抗の係数 C_f は平板の長さに関するレイノルズ数 ($U_{\infty}l/\nu$) がほぼ 5×10^5 を超えると急に異なった C_f-Re 曲線に移行し、流れの状態が変化したことを示す。

(iv) 熱線流速計やレーザー流速計のような流速の微小変動を記録しうる計器により、直接流れの状態が層流から乱流に変わったことが確かめられる。

b. 乱れの間欠性

ピトー管などで断面各点の平均流速の分布を測ると流速分布は壁面での流速 0 の点から滑らかに一様流の速度へと変化している。層流境界層の章で述べたように、境界層の外部は乱れないポテンシャル流である。それでは、乱流境界層の場合には、乱流状態の流れと乱れないポテンシャル流れとが、このように滑らかに接続しているのであろうか。とすれば、乱流から非乱流へとマイクロな構造が不連続に変化しているということになり不自然ではないだろうか。

乱流計測器を乱流境界層の外縁近くに入れて、流速変動の時間的な変動をとってみると、流れは層流と思われるほとんど時間変化のない状態の間に激しい乱流状態の続く区間がときおり入り込んでいることがわかる。乱流計を壁面に近づけるにつれて、一定時間内に乱流状態の占める割合が増加し、壁からの計器位置が境界層厚さの 40% 以内になると流れは完全に乱流状態で占められてしまう。この乱流状態の占める割合を間欠率 (intermittency factor) と呼んでおり、図 20.6 のような分布である。このような実験結果から乱流境界層は瞬間的には不規則な境界面を介して乱流状態と乱れないポテンシャル流とが混在する流れであり、その境界面は不規則に境界層内に侵入したり、ポテンシャル流へ飛び出したりしていることがわかる。この瞬間的な境界面は、粘性底層 (sublayer) と同じく粘性の効果が利いており、かつて sublayer に対して superlayer と呼ばれたことがある。

c. 乱流境界層の流速分布

壁法則

レイノルズ方程式 (14.5) に対して層流境界層の場合と同様な“オーダー比較”を行えば、乱流境界層の方程式は (重力項を省略して) 次のようになる。

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \rho \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} \quad (16.1a)$$

$$0 = -\frac{\partial(\bar{p} + \rho \overline{v'^2})}{\partial y} \tag{16.1 b}$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \tag{16.1 c}$$

壁面の近傍 ($y \approx 0$) では、定常流の場合式 (16.1 a) の左辺は 0 と考えうる。また、平板の迎え角は零としているから $\partial \bar{p} / \partial x = 0$ である。また、式 (16.1 a) の右辺の最後の二項は、剪断応力 τ の y 微分を意味する。すなわち、

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{u'v'} \right) = 0 \tag{16.2}$$

したがって、境界層の下部では剪断応力は壁面剪断応力に等しく一定であると仮定することができる (以下、混乱のおそれはないから、 \bar{u} を u と書き換えて)

$$\tau \doteq \tau_0 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \tag{16.3}$$

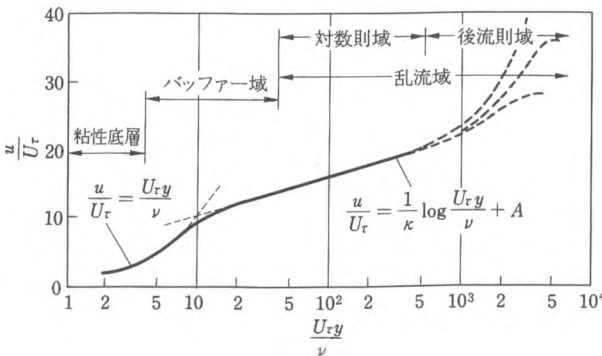


図 16.2 乱流境界層の流速分布

壁面のごく近くを除けば分子粘性による項 $\mu du/dy$ は省略できて、剪断応力はレイノルズ応力によるものと考えられる。すなわち、式 (14.8) より

$$\begin{aligned} \tau &\doteq -\rho \overline{u'v'} \\ &= \rho l^2 \left| \frac{du}{dy} \right| \left| \frac{du}{dy} \right| \end{aligned} \tag{16.4}$$

混合距離 l にプラントルの仮定

$$l = \kappa y \tag{16.5}$$

を導入すれば、式 (16.3)~(16.5) より流速の対数分布式として

$$\frac{u(y)}{U_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{U_\tau y}{\nu} + A \tag{16.6}$$

あるいは、速度欠損則の形として

$$\frac{U_\infty - u(y)}{U_\tau} = -\frac{1}{\kappa} \ln y + C \tag{16.7}$$

が導かれる。これは管路の場合と全く同じ式である。しかし、境界層の外縁近く

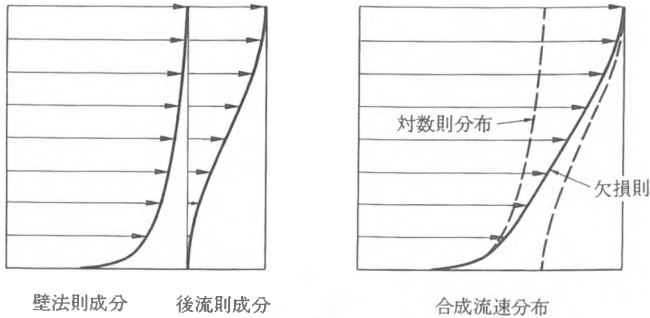


図 16.3

の乱れの構造は、前項に述べたように管路の場合と異なるから、式 (16.6) の成立範囲にも自ずと制約がつくことが予想される。

コールスの流速分布則

円管や二次元管路の乱流の流速分布については、プラントルの混合距離理論や次元論的考案（による壁法則と速度欠損則が共通に成立領域が存在すること）から導いた対数分布則が管路のほぼ全域にわたって成立する。平板に沿う乱流境界層についても速度分布に関する対数則が成立するが、境界層外縁に近づくにつれて、流速分布が対数分布則からはずれることが以前から指摘されていた。これについて、コールス (Coles, 1956) は以下に示すように後流則 (the law of the wake) を導入した。なお、コールスの分布則は円管流や開水路流にも適用できるが、後流則による修正は乱流境界層の場合に比べて遥かに小さい。

乱流境界層内の流速分布は、粘性底層を除く壁面近くは壁面摩擦応力 ($\tau_0 = \rho U_\tau^2$) と粘性 (係数 ν) に支配される壁法則 (the law of the wall) にしたがって、境界層外縁近傍の流速分布は平衡ないしは自己保存 (equilibrium または self-preserving) 状態にあり、 y/δ の関数 $\frac{\Pi}{\kappa} w\left(\frac{y}{\delta}\right)$ で表される後流則 (the law of the wake) を付加した次式にしたがう。

$$\frac{u(y)}{U_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{U_\tau y}{\nu} + A_s + \frac{\Pi}{\kappa} w\left(\frac{y}{\delta}\right) - F \quad (16.8)$$

ここに、 $\kappa (=0.41)$: カルマン定数、 $A_s (=5.0)$: 定数、 Π : 後流パラメーター (後流則の強さを表す)、 $w(y/\delta)$: 次の関係を満たす後流関数 (wake function)。

$$w(0) = 0, \quad w(1) = 2, \quad \int_0^1 (y/\delta) dw = 1 \quad (16.9)$$

後流関数 $w(y/\delta)$ としては、次のような関数が提案されている。

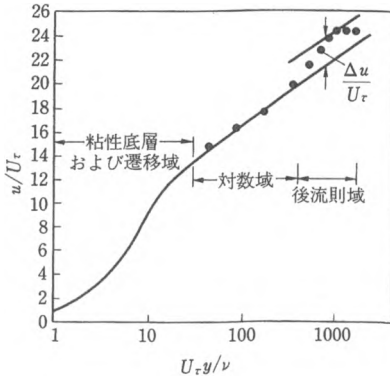


図 16.4 “壁法則” と “後流則”

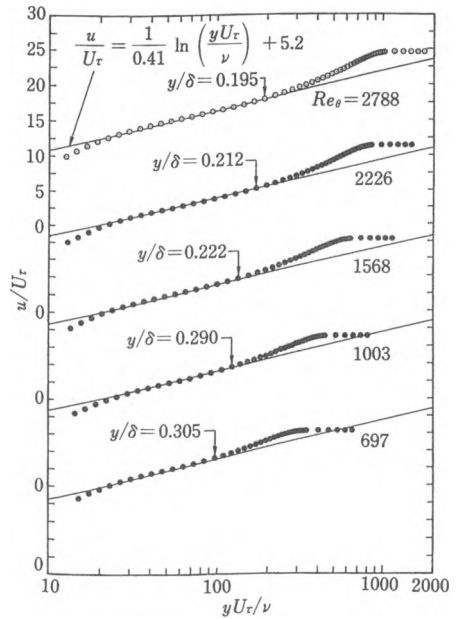


図 16.5 レイノルズ数 Re_δ の増加と対数則域 Re_δ の増加により対数則の成立する範囲 (矢印の y/δ) は狭くなっている。(縦軸の原点の移動に注意)

$$w\left(\frac{y}{\delta}\right) = 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \frac{y}{\delta}\right) \quad (16.10)$$

$$w\left(\frac{y}{\delta}\right) = 2\left(\frac{y}{\delta}\right)^2\left(3-2\frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{\Pi}\left(\frac{y}{\delta}\right)^2\left(1-\frac{y}{\delta}\right)\left(1-2\frac{y}{\delta}\right) \quad (16.11)$$

後流パラメーター Π は圧力勾配が零の平板に沿う乱流境界層では次のような値となる。

$$\Pi = 0.55 \quad (\text{圧力勾配零の平板境界層})$$

$F (= \Delta U / U_\tau)$: 粗度やリプレットの効果を表す一定値。

$$F \begin{cases} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{U_\tau k_s}{\nu} + D & (\text{粗面}) \\ = 0 & (\text{滑面}) \end{cases} \quad (16.12)$$

乱流境界層の外縁の流速は、式 (16.8) において、 $y = \delta$ とおいて

$$\frac{u(\delta)}{U_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{U_\tau \delta}{\nu} + A_s + \frac{2\Pi}{\kappa} - F \quad (16.13)$$

であるから、速度欠損則は次のように書かれる。

$$\frac{u(\delta) - u(y)}{U_\tau} = -\frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{\delta} + \frac{\Pi}{\kappa} \left\{ 2 - w \left(\frac{y}{\delta} \right) \right\} \quad (16.14)$$

ベキ乗流速分布則

管路や開水路の場合と同様、平板に沿う乱流境界層にもベキ乗型の流速分布式

$$\frac{u(y)}{U_\infty} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/n} \quad (16.15)$$

が適用でき、ベキ指数 n は滑らかな平板では $1/n = 1/7$ ($Re_\delta = U_\infty \delta / \nu = 3000 \sim 70000$) である。粗な平板では、 n 値は小さくなる。

16.2 滑面平板に沿う乱流境界層の発達と抵抗則

a. 1/7 乗則による抵抗則

滑らかな平板上の乱流境界層内の流速分布に式 (16.15) のようなベキ乗則が成立するとすれば、これに対応する各断面での摩擦応力は、前章の円管の場合のブラジウス公式 (式 (15.58)) が局所的に成立すると考える。

$$\frac{\tau_0}{\rho U_\infty^2} = 0.0225 \left(\frac{U_\infty \delta(x)}{\nu} \right)^{-1/4} \quad (16.16)^\dagger$$

一方、境界層厚さ δ 、排除厚さ δ^* 、運動量厚さ θ の関係

$$\delta^* = \frac{\delta}{(n+1)} = \frac{\delta}{8}, \quad \theta = \frac{n\delta}{(n+1)(n+2)} = \frac{7}{72} \delta \quad (16.17)$$

を境界層に関するカルマンの運動量方程式 (層流乱流の区別なく成立する) (式 (12.5)、あるいは式 (12.19)) に代入すれば、

$$\frac{\tau_0}{\rho U_\infty^2} = \frac{7}{72} \frac{d\delta(x)}{dx} \quad (16.18)$$

となる。つまり、§12.3にも述べたように、平板に沿う乱流境界層では、摩擦抵抗に対抗するのは (円管路の場合の圧力勾配に代わって)、境界層厚さ δ の増加による運動量束の変化である。式 (16.16) を式 (16.18) に代入し積分を行えば、

$$\delta(x) = 0.38 \left(\frac{U_\infty x}{\nu} \right)^{1/5} x \quad (Re_x < 10^7) \quad (16.19)$$

の関係が得られる。層流境界層は平板の前縁よりの距離の $1/2$ 乗に比例 ($\delta \sim x^{1/2}$) して発達したが、乱流境界層は流体の乱流運動により、より効果的に運動量が輸

† ブラジウス公式を書き直した式 (15.59) で、 U_{max} を U_∞ 、 a を $\delta(x)$ と置く。このとき係数は $8.74^{-1/4} = 0.0225$ となる。

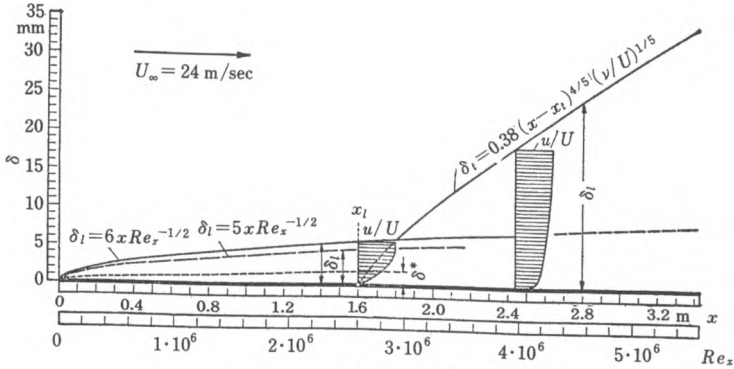


図 16.6 平板に沿う層流境界層の発達, 乱流への遷移と乱流境界層の発達 (Tietjens, Springer)

送られるために遙かに境界層が厚くなる ($\delta \sim x^{4/5}$) (図 16.6).

長さ l の平板に働く全抵抗 $D(l)$ は, 式 (12.19) を用いれば

$$D(l) = b \int_0^l \tau_0(x) dx \tag{16.20}$$

$$= b \rho U_\infty^2 \int_0^l d\theta$$

$$= b \rho U_\infty^2 \theta(l) \tag{16.20 a}$$

と表される. ここに, b は平板の幅. 上式に式 (16.17), (16.19) を代入し次式が得られる.

$$D(l) = 0.036 \rho U_\infty^2 b l (U_\infty l / \nu)^{-1/5} \quad (5 \times 10^5 < Re_l < 10^7) \tag{16.21}$$

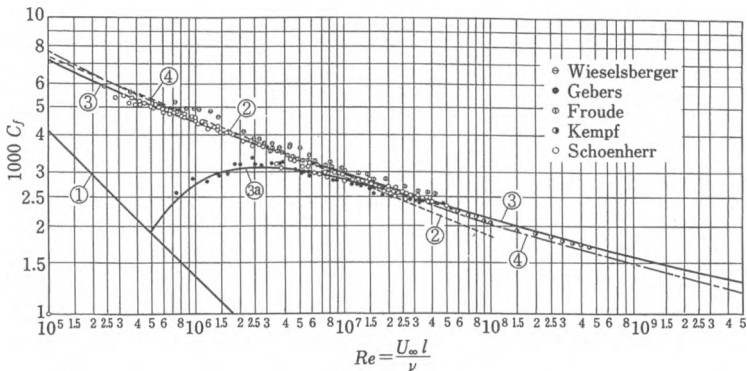


図 16.7 滑面平板の抵抗係数 C_f とレイノルズ数 Re (Schlichting より)

- ① 層流の場合のブラジウス解, 式 (11.56), ② 式 (16.22), ③ 式 (16.37), ④ 式 (16.39), ④ Schultz-Grunow 式.

また、抵抗係数 C_f および局所的摩擦係数 c_f は次のように表される。

$$C_f = \frac{D(l)}{(1/2)\rho U_\infty^2 bl} = 0.074 Re_l^{-1/5} \quad (5 \times 10^5 < Re_l < 10^7) \quad (16.22)$$

$$c_f = \frac{\tau_0}{(1/2)\rho U_\infty^2} = 0.059 Re_x^{-1/5} \quad (Re_x < 10^7) \quad (16.23)$$

ただし、上式右辺の係数は実験データとの一致のため 0.072 を 0.074 としてある。ここに、 $Re_l = U_\infty l / \nu$ 、 $Re_x = U_\infty x / \nu$ 。流速分布の 1/7 乗則に基づく上の公式は Re_l の限られた範囲 ($5 \times 10^5 < Re_l < 10^7$) で適用しうる (図 16.7 中の曲線 ②)。

b. 対数則による抵抗則

次にレイノルズ数範囲についての制約なしに適用しうる抵抗則を求めよう。このためには、乱流境界層の流速分布の一般式である対数分布式から出発しなければならない。以下の理論の展開はやや込み入って見えるが、要点はカルマンの運動量方程式から抵抗則を導くことにある。

乱流境界層内の流速分布を、後流則を省略した式 (16.6)

$$\left. \begin{aligned} \frac{u(y)}{U_\tau} &= \phi(\eta) \\ \eta &= \frac{U_\tau y}{\nu} \end{aligned} \right\} \quad (16.24)$$

で表現し、また、 $y = \delta$ での η 、 ϕ を

$$\eta_1 = \frac{U_\tau \delta}{\nu}, \quad \phi_1 = \phi(\eta_1) = \frac{U_\infty}{U_\tau} \quad (16.25)$$

とおく。流速分布に Coles 則を用いる場合には、境界層の外縁部の流速分布に後流関数 $w(y/\delta(x))$ の効果がきいてくるが、 $y/\delta(x) = (U_\tau y/\nu) \cdot (U_\tau \delta(x)/\nu)^{-1} = \eta/\eta_1$ と変形できるので、式 (16.24) を用いた以下の理論を拡張することは可能である。

カルマンの運動量方程式、式 (12.5) (あるいは、式 (12.19)) に上の関係を代入し変形する。 $\tau_0 = \rho U_\tau^2$ の関係を利用し、 η_1 が $U_\tau(x)$ と $\delta(x)$ を介して x の関数であることを考慮すれば、式 (12.19) は次のようになる。

$$\begin{aligned} U_\tau^2 &= \frac{d}{dx} \left\{ \int_0^\delta u(U_\infty - u) dy \right\} \\ &= \nu U_\infty \frac{d\eta_1}{dx} \frac{d}{d\eta_1} \left\{ \int_0^{\eta_1} \phi \left(1 - \frac{\phi}{\phi_1} \right) d\eta \right\} \end{aligned} \quad (16.26)$$

上式を整理すれば、

$$\frac{U_\infty}{\phi_1^2} = \nu \frac{d\eta_1}{dx} \frac{d}{d\eta_1} \left\{ \int_0^{\eta_1} \phi \left(1 - \frac{\phi}{\phi_1} \right) d\eta \right\} \quad (16.27)$$

となる。右辺の微分を行うには、積分の中の ϕ_1 が η_1 の関数であることに注意しなくてはならない。微分公式

$$\frac{d}{d\alpha} \int_{b(\alpha)}^{a(\alpha)} f(x, \alpha) dx = f(a, \alpha) \frac{da}{d\alpha} - f(b, \alpha) \frac{db}{d\alpha} + \int_b^a \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \alpha) dx \quad (16.28)$$

を考慮すれば、

$$\frac{d}{d\eta_1} \int_0^{\eta_1} \phi \left(1 - \frac{\phi}{\phi_1} \right) d\eta = \frac{d\phi_1}{d\eta_1} \int_0^{\eta_1} \frac{\phi^2}{\phi_1^2} d\eta$$

となるから、式 (16.27) は

$$dx = \frac{\nu}{U_\infty} F(\eta_1) d\eta_1 \quad (16.29)$$

$$F(\eta_1) = \frac{d\phi_1}{d\eta_1} \int_0^{\eta_1} \phi^2 d\eta$$

となる。これを積分すれば、

$$\frac{U_\infty l}{\nu} = \Phi(\eta_1) \quad (16.30)$$

$$\Phi(\eta_1) = \int_0^{\eta_1} F(\eta_1) d\eta_1$$

となる。ここに、 η_1 は $x=l$ における η_1 、

$$\eta_1 = U_\infty \delta(l) / \nu$$

である。式 (16.30) は乱流境界層厚さ δ と前縁からの距離 l の関係を陰に表している。

一方、壁面摩擦応力は次式となるが、

$$\tau_0(x) = \rho U_\infty^2 = \rho \frac{U_\infty^2}{\phi_1^2} \quad (16.31)$$

上式の両辺に x と η_1 の関係式 (16.29) を掛けて、 x について 0 から l まで、 η_1 について 0 から η_1 まで積分すれば、

$$D(l) = b\rho\nu U_\infty \Psi(\eta_1) \quad (16.32)$$

$$\Psi(\eta_1) = \int_0^{\eta_1} \frac{F(\eta_1)}{\phi_1^2} d\eta_1$$

式 (16.30) と式 (16.32) は無次元乱流境界層厚さ η_1 を助変数とした平板に働く抵抗 $D(l)$ とレイノルズ数 Re_l の関係式となっている。抵抗係数 C_f , c_f は定義式 (16.22), (16.23) に式 (16.32), (16.31) の関係を代入して、

$$C_f = 2\Psi(\eta_1)/\Phi(\eta_1), \quad Re_l = \Phi(\eta_1) \quad (16.33)$$

$$c_f = 2/\phi_1^2(\eta_1), \quad Re_x = \Phi(\eta_1) \quad (16.34)$$

上の積分が行いやすいように、対数分布式を

$$\phi(\eta) = a \ln(1+b\eta) = a \ln z \quad (16.35)$$

$$a = 2.545, \quad b = 8.93$$

と変形すれば(右辺の \ln の内に $\eta=0$ で $\phi=0$ とするため 1 を加えたがその影響は無視しうる), 次の関係式が求まる.

$$\left. \begin{aligned} F(\eta) &= a^3 \left(\ln^3 z - 2 \ln z + 2 - \frac{2}{z} \right) \\ \Phi(\eta) &= \int_0^\eta F(\eta_1) d\eta_1 = \frac{a^3}{b} (z \ln^2 z - 4z \ln z - 2 \ln z + 6z - 6) \\ \Psi(\eta) &= \int_0^\eta \frac{F}{\phi_1^2} d\eta_1 = \frac{a}{b} \left(z + 1 - \frac{2(z-1)}{\ln z} \right) \\ & z = 1 + b\eta \end{aligned} \right\} \quad (16.36)$$

図 16.7 の曲線 ③ は, これらの式より求められた滑面平板の抵抗則で, レイノルズ数範囲の制限なしに成立する. しかし, 間接的な表現は不便なので計算結果からの内挿式 ($Re_l < 10^6$) として, 全抵抗係数 C_f と局所的抵抗係数 c_f について次式が与えられている.

$$C_f = \frac{0.455}{(\log_{10} Re_l)^{2.58}} \quad (16.37)$$

$$c_f = (2 \log Re_x - 0.65)^{-2.3} \quad (16.38)$$

上の議論では境界層は平板の前縁からすぐに乱流境界層になっているとしたが, 実際にはレイノルズ数が限界値に達するまでは層流境界層となっているので, その分だけ抵抗を差し引くことが必要である. この場合には,

$$C_f = \frac{0.455}{(\log_{10} Re_l)^{2.58}} - \frac{A_1}{Re_l} \quad (16.39)$$

表 16.1

Re_{crit}	3×10^5	5×10^5	10^6	3×10^6
A_1	1,050	1,700	3,300	8,700

A_1 は乱流への遷移点の位置に関係し, 表 16.1 のようになる. 図 16.7 には, $Re_x = 5 \times 10^5$ で乱流に遷移する場合の抵抗係数曲線 ③a ($A_1 = 1,700$) が示されている.

同じく滑面平板の乱流抵抗則として, 上の方法とは異なる方法により導かれた

Karman-Schoenherr による抵抗係数式 (16.40) がある。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{C_f}} &= 4.13 \log_{10}(Re_l C_f) \\ \frac{1}{\sqrt{C_f}} &= 4.15 \log_{10}(Re_x c_f) + 1.7 \end{aligned} \right\} \quad (16.40)$$

16.3 粗面平板の抵抗則

平板の壁面が粗な場合の抵抗則は、粗な壁面をもつ円管の場合と同様に論じることができる。ただ、円管の場合には粗度 k_s の影響は k_s/R (R : 管の半径) で

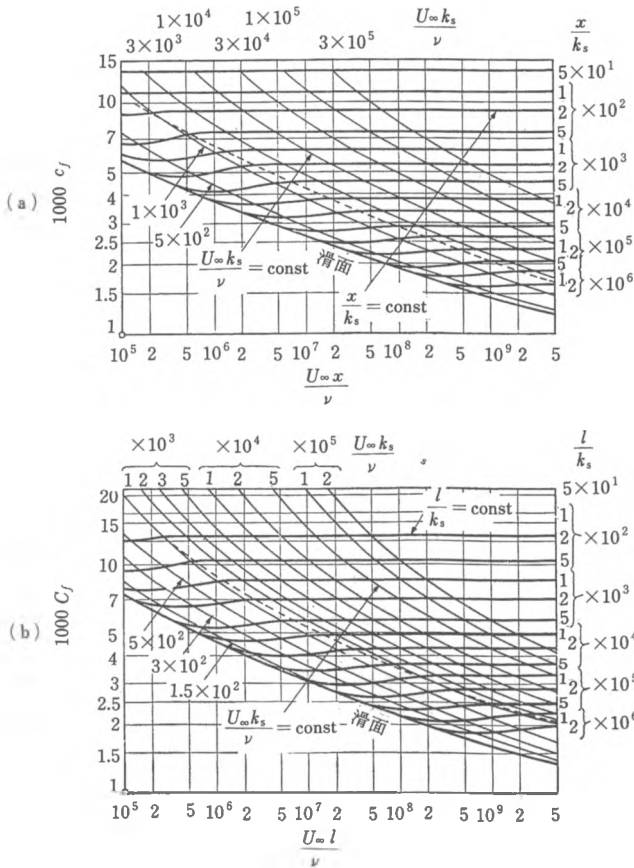


図 16.8 平板の抵抗係数とレイノルズ数 (Schlichting, McGraw-Hill)

表され、管の全長について一様であるのに反し、粗な平板の場合の相対粗度は k_s/δ (δ :境界層厚さ) であり、平板の下流側に行くにつれて境界層が発達し δ が増加する結果 k_s/δ は徐々に小さくなり、粗さの影響は少なくなる。平板が十分長ければ、平板の前部は粗面としての抵抗が働き、後部は滑らかな平板となることもある。

粗な平板上の流速分布を用いて滑面平板の場合と同様な計算により、粗面の抵抗を求めることがプラントルとシュリヒティング (1934) によりなされた。図 16.8(a), (b) はその結果であり、全抵抗係数 C_f あるいは局所的抵抗係数 c_f とレイノルズ数 $U_\infty l/\nu$ または $U_\infty x/\nu$ の関係を粗度レイノルズ数 $U_\infty k_s/\nu$ および l/k_s または x/k_s (l : 平板の長さ, x : 平板の前縁からの距離) をパラメーターとして示している。図中の破線の右が完全に粗面となる領域である。完全に粗な領域の内挿式として次の式が求められている。

$$\left. \begin{aligned} c_f &= \left(2.87 + 1.58 \log \frac{x}{k_s} \right)^{-2.5} \\ C_f &= \left(1.89 + 1.62 \log \frac{l}{k_s} \right)^{-2.5} \end{aligned} \right\} \quad (16.41)$$

$(10^2 < l/k_s < 10^6)$

コールス則による抵抗則

式 (16.8) において $y = \delta$ (境界層厚さ) とおくと、抵抗係数 $c_f = 2(U_\tau/U_\infty)^2$ ($U_\infty = u(\delta)$: 主流流速) に関して次の関係が導ける。

$$\sqrt{\frac{2}{c_f}} \exp\left(\kappa \sqrt{\frac{2}{c_f}}\right) = \frac{U_\infty \delta}{\nu} \exp(2\Pi + \kappa A_s - \kappa F) \quad (16.42)$$

この式による抵抗係数 c_f の値は、平板が滑面の場合も粗面の場合も、通常対数則による場合と実質的に同じであるが、特に粗度の効果や抵抗を减小させる効果をもつプレットの抵抗係数のより正確な評価に用いられる。