

8. ナビエ-ストークス方程式の厳密解

ナビエ-ストークスの方程式は非線型偏微分方程式であって、その解を厳密に求めることは一般に困難である。しかし、特殊な条件のもとでは厳密解が求まるので、本章ではそのいくつかの場合について述べる。これらの流れは特殊な流れではあるが、決して取るに足らない意味のないケースではなく、むしろ流体運動における粘性の作用を理解するための重要な基本的な流れである。

また、ここでは流体力学の理論の展開法の基本についても学ぶ。その第一段階は式を解くことである。それには、

- (i) 理論を展開する際の仮定と条件をまず明確にする。
- (ii) 次に、その仮定と条件に基づいて基礎方程式を整理・単純化する。
- (iii) 与えられた境界条件のもとにその式の数学的解を求め、
- (iv) 最後に、結果を図化する。

流体力学の場合には、「問題を解く」ことがこの段階で終わってはならない。第二段階として、その解から、

- (v) 流れの特性を物理的に解釈し、
- (vi) さらに、現象の本質を理解する。

ことに進んで初めて「問題を解く」ことが完結する。

8.1 平行流

十分に長い平行平板間の流れや一様径の管内流では、すべての流体粒子は一方方向（平行平板や管軸の方向）に流れ、他の方向の流速成分をもたない。このような流れを平行流 (parallel flow) あるいは一方向流 (unidirectional flow) という。流れの方向を x 軸方向、壁に垂直な方向を y 軸とし、これらに直角に z 軸をとれば、 $v \equiv w \equiv 0$ であるから連続の式より明らかに $\partial u / \partial x \equiv 0$ である。したがって、平行流では

$$u = u(y, z, t); \quad v \equiv 0; \quad w \equiv 0 \quad (8.1)$$

さらにナビエ-ストークス方程式の第二、三式に、式 (8.1) の条件を代入すれば、 $\partial p/\partial y \equiv 0$, $\partial p/\partial z \equiv 0$ となるから圧力 p は x のみの関数である。結局、ナビエ-ストークスの方程式の第一式より

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{dp}{dx} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (8.2)$$

が得られる。これは、 $u(y, z, t)$ に関する線型偏微分方程式である。

8.2 平行平板間のクエツト-ポアズイユ流

いま、二枚の平行平板間の定常な流れを考える。平行壁の一方は静止し、他方は U の速度で運動しているとする。平行壁の間隔を h とし、静止壁面上に U の方向に x 軸、これに垂直に y 軸を選べば、運動方程式は式 (8.2) より

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{d^2 u}{dy^2} \quad (8.3)$$

となり、境界条件は

$$\left. \begin{array}{l} y=0 : u=0 \\ y=h : u=U \end{array} \right\} \quad (8.4)$$

となる。上式の解は容易に求められ、次のようになる。

$$u(y) = U \left(\frac{y}{h} \right) + \frac{h^2}{2\mu} \left(-\frac{dp}{dx} \right) \cdot \left[\frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h} \right) \right] \quad (8.5)$$

壁面のずり運動による単純剪断流 (クエツト流れ)	圧力勾配による放物線流速分布 (ポアズイユ流れ)
-----------------------------	-----------------------------

上式の表す流速分布は、① 圧力勾配のない場合の壁面間のずり運動による単純剪断流れ (いわゆるクエツト (Couette) 流れ)

$$u(y) = U \frac{y}{h} \quad (8.6)$$

と、② 静止壁面間の圧力勾配による放物線流速分布

$$u(y) = \frac{h^2}{2\mu} \left(-\frac{dp}{dx} \right) \cdot \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h} \right) \quad (8.7)$$

との重ね合わせである。

無次元圧力勾配 $P = (h^2/2\mu U) (-dp/dx)$ が正、すなわち流れの方向に圧力が低下する場合には、流速は全断面にわたって正であるが、 P が -1 より小さくなると静止壁の近くに u/U が負となる逆流層が生じるようになる。

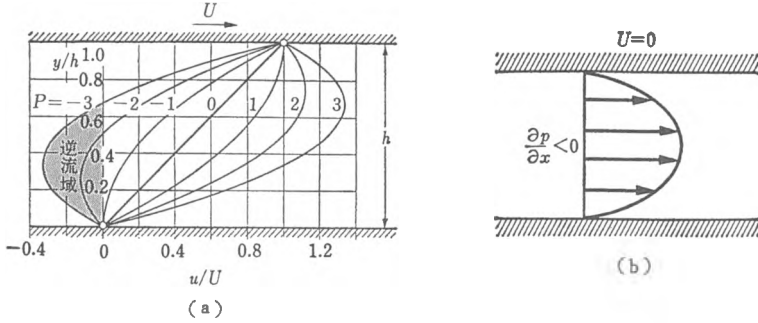


図 8.1 (a) 平行平板間のクエット-ポアズイユ流れと (b) 二次元ポアズイユの流れ

この例が示すように、一般に（均質な粘性流体に）流れを生じさせる原因は
(i) 圧力勾配

(ii) 境界（壁面，物体）の運動

の二つである。圧力が流れの方向に向かって減少する場合 ($-dp/dx > 0$) を順圧力勾配 (favorable pressure gradient) といい、逆の場合は圧力が流れを押しとどめ押し戻す作用をするので逆圧力勾配 (adverse pressure gradient) という。

8.3 管内流・ハーゲン-ポアズイユ流れ

次に、無限に長いまっすぐな一様径の円管内の定常的な流れについて考える。この流れは軸対称な一方向流れであり、半径方向と円周方向の流速成分 v_r, v_θ は零で、管軸 (z 軸) 方向の流速成分 v_z のみが存在する。さらに、 $\partial v_z / \partial t = 0, \partial v_z / \partial z = 0$ を考慮すると、円筒座標系に関して表されたナビエ-ストークスの方程式 (7.14c) は、次のように単純化される。

$$\mu \left(\frac{d^2 v_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_z}{dr} \right) = \frac{dp}{dz} \quad (8.8)$$

あるいは

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} \quad (8.9)$$

境界条件は、管壁で流速が 0 になることと、管中心で特異性のないことである。

$$r = a, \quad v_z = 0 \quad (8.10)$$

$$r = 0, \quad v_z = U_{\max}$$

式 (8.9) の解は

$$v_z = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} r^2 + A \log r + B \quad (8.11)$$

である。積分定数 A, B を境界条件より決定すれば、結局、半径 a の円管内の流速分布として次式を得る (図 8.1(b))。

$$v_z = \frac{1}{4\mu} \left(-\frac{dp}{dz} \right) (a^2 - r^2) \tag{8.12}$$

上式の流速分布を円管断面全体にわたって積分すれば、流量 $Q = \int_0^a 2\pi r v_z(r) dr$ を求めることができる。

$$Q = \int_0^a 2\pi r v_z(r) dr = \left(-\frac{dp}{dz} \right) \cdot \frac{\pi a^4}{8\mu} \tag{8.13}$$

Q を断面積で割れば、平均流速 U_0 として

$$U_0 = \left(-\frac{dp}{dz} \right) \cdot \frac{a^2}{8\mu} \tag{8.14}$$

を得る。管中心の最大流速 U_{max} は、式 (8.12) より

$$U_{max} = \left(-\frac{dp}{dz} \right) \cdot \frac{a^2}{4\mu} = 2U_0 \tag{8.15}$$

式 (8.13) は、円管内の流量は管の半径の 4 乗と圧力勾配に比例し、粘性係数が逆比例することを示している。この関係式は、最初ドイツの水道技師ハーゲン (Hagen, 1839) (水道管設計のための実験から)、フランスの医師ポアズイユ (Poiseuille, 1841) (血流に関連し細管中の水流の研究) により実験的に見出された。その後、間もなく (1858~60) 他の研究者により、ナビエ-ストークス方程式からこの理論解が導かれた。この法則をポアズイユの法則 (Poiseuille's law) といい、このような円管内の流れをハーゲン-ポアズイユ流れ (あるいは単に、ポアズイユ流れ) と呼んでいる。

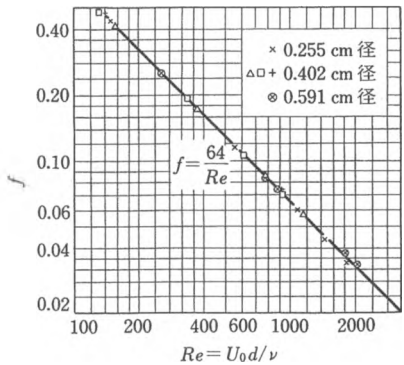


図 8.2 円管の摩擦抵抗係数 (層流)

上述の諸式を導くにあたって、特にレイノルズ数に関する制約を設けなかった。にもかかわらず、実際上ポアズイユの法則が成立するのは、レイノルズ数がある限界値以下の層流状態についてである。実験によれば、この限界レイノルズ数は、ほぼ

$$Re_{cr} = \left(\frac{U_0 d}{\nu} \right)_{cr} = 2300$$

である。ここに、 $d(=2a)$ ：管の直径、 U_0 ：平均流速。

レイノルズ数が Re_{cr} を越えると、流れはポアズイユ流と全く異なった乱流状態に移行する。これについては、第 14, 15 および 18 章に述べる。

ポアズイユ流れの抵抗係数

管壁による摩擦抵抗、つまり管に沿う圧力降下率と平均流速の関係は、普通次式で定義される抵抗係数あるいは摩擦損失係数（無次元数） f により表現する。

$$\left(-\frac{dp}{dz}\right) = \frac{f}{d} \frac{\rho}{2} U_0^2 \quad (8.16)$$

式 (8.14) から $(-dp/dz) = 8\mu U_0/a^2$ の関係を上式の左辺に代入すれば、 $f = 32\mu/\rho a U_0$ 、すなわち、

$$f = \frac{64}{Re} \quad (8.17)$$

の関係式を得る。ここに、 $Re = U_0 d/\nu$ 。

摩擦損失係数という考え方の導入とその利点

実際問題においてわれわれが知りたいのは、多くの場合円管内を流れる流量 Q である。これを決めるのは、式 (8.13) が示すように、圧力勾配 $(-dp/dz)$ と管径 d と粘性係数 μ の 3 変数である。流れる流体が決まっておれば、粘性係数 μ はほぼ一定と考えてよい。しかし、厳密に言えばこれは温度によって変化し、その変化量は決して無視できる値ではないので、やはり変数として取り扱う必要がある。流量 Q がこのように三つの別々の変数の関数として表されるということは、変数ないしはパラメーターの数が多すぎて流量公式が一般性を欠き、設計上の見通しを悪くしている。利用上からは“公式はできるだけ単純な方がよいし、パラメーターは少ないほどよい。”流れが本節で取り扱っている層流という状態にあれば、流量 Q とこれらの変数の関係は理論的に与えられるからそれほど不便ということはないであろうが、普通われわれの取り扱う流れは後の章で述べるように乱流と呼ばれる現象的に複雑な状態にあり、もはや層流の場合の理論式は成立しない。それゆえ、流量とこれらのパラメーターの間の関係をもっと単純な形で表すのが賢明である。

それには、まず圧力損失 $(-dp/dz)$ が何によるかを考える。圧力損失は管内を流れる流体の運動エネルギー $(\rho U_0^2/2)$ に比例すると考えるのが自然である。しかし、圧力損失の勾配 $(-dp/dz)$ の次元は [圧力/長さ] であるのに対し、運

動エネルギーの次元は〔密度×(速度)²〕=〔圧力〕であって、これらの間の比例係数は〔1/長さ〕という次元をもってしまう。係数が次元をもつということは、単位系が変わると係数の値も変わるということであり、一般性が失われる。そこで、運動エネルギーを長さの次元をもつ量で割る必要がある。いまの場合、現象に係る長さの次元をもつ量としては、円管の直径 d が適当である。このことは圧力損失が管壁の摩擦によるものであり、したがって円周ないしは管径あたりの運動エネルギーと圧力損失を関係づけるのが妥当であるともいえる。したがって、

$$-\frac{dp}{dz} = \frac{f}{d} \left(\frac{\rho U_0^2}{2} \right)$$

と表すことができる。比例係数 f は摩擦損失係数と呼ばれ、レイノルズ数 $Re = U_0 d / \nu$ やレイノルズ数によって決まる流れの状態（層流か乱流か）や管壁の相対的な粗さ (k_s/d , k_s : 相当粗度) の関数である。

$$f = f_n(Re, k_s/d)$$

管路の抵抗表現つまり摩擦損失係数に関する議論は相似律における次元解析、 π 定理からも導くことができる（旧版 第5章 参照）。

18世紀以後に始まった産業革命により、ヨーロッパ社会は資本の蓄積がすすみ、豊かになった。一方、衛生思想も普及して、都市の改造・近代化が盛んに行われるようになった（もっともパスツール（仏：細菌病因説, 1862；炭疽病, 1877；狂犬病, 1885）やコッホ（独：炭疽菌の発見, 1876；結核菌, 1882）により、伝染病と細菌の関係が明らかになるのは、それより後の19世紀後半のことであるが）。パリではすでに1740年頃に地下に石造りの大環状下水道が建設されたし、第二帝政時代にはナポレオン三世がパリを管轄するセーヌ県知事オスマン男爵と組んで有名なパリの大改造（これが現在のパリ）を行った。彼は市街が整備されていないと、暴徒が路地へ逃げ込んで鎮圧しづらいと称したという。このときの上下水道建設はベルグランにまかされ1854年から始まった。オーストリアの首都ウィーンの都市改造は一番遅く、19世紀後半に市街地整備とともに行われている。このようにヨーロッパの主要都市では人が立ったまま行動できるくらいに立派な下水道網が次々に完成したが、その規模の大きさは、ヴィクトル・ユゴーの名作「レ・ミゼラブル（ああ無情）」（1862）の中で7月革命（1830）後間もなくの時代、官憲に追われた主人公ジャン・バルジャンがパリの下水道を逃げ回る場面や、第二次世界大戦後のウィーンを舞台にしたグレアム・グリーン

(英) 原作の映画「第三の男」の中でオーソン・ウェルズ演じる第三の男が下水道網を伝って逃げるシーンによって、思い浮かべることができる。

8.4 瞬間的に運動を始めた平板上の流れ——レイリーの問題

無限に長い平板が瞬間的にある一定速度 U_0 で、その面の方向に運動しだす場合の流れについて考えよう。この問題は、レイリーの問題 (Rayleigh's problem) と呼ばれ、流れは非定常平行流である。この問題には一見実用的意味がないように思われるかもしれないが、実は粘性の作用を理解する上できわめて重要である。その上、第10章の境界層の概念への接続という役割も果たしている。

平板の面に沿い x 軸、これと直角に y 軸をとる。圧力 p は流れの場を通じて一定と考えられるから、ナビエ-ストークスの方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (8.18)$$

となる。境界条件は、次のようにおける。

$$\left. \begin{aligned} t \leq 0 : u &= 0 & (y \geq 0) \\ t > 0 : u &= U_0 & (y = 0) \\ u &= 0 & (y = \infty) \end{aligned} \right\} \quad (8.19)$$

ところで、新しい独立変数として η

$$\eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \quad (8.20)$$

を導入し、また、流速 u を

$$u(y, t) = U_0 f(\eta) \quad (8.21)$$

の形に仮定する。このことは y 軸の目盛を時々刻々変化させ $2\sqrt{\nu t}$ を基準として測ると、流速分布は相似となり一つの独立変数 η の関数となると考えることである。この関係を式(8.18)に代入すれば、 $f(\eta)$ に関する次の常微分方程式を得る。

$$f'' + 2\eta f' = 0 \quad (8.22)$$

これに対応する境界条件 $f=1$ ($\eta=0$)、 $f=0$ ($\eta=\infty$) を満たす前式の解は

$$u = U_0(1 - \operatorname{erf} \eta) \quad (8.23)$$

ここに、 erf は誤差関数で

$$\operatorname{erf} \eta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\xi^2} d\xi \quad (8.24)$$

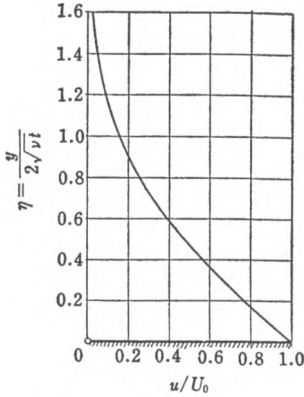


図 8.3 レイリー問題の相似流速分布

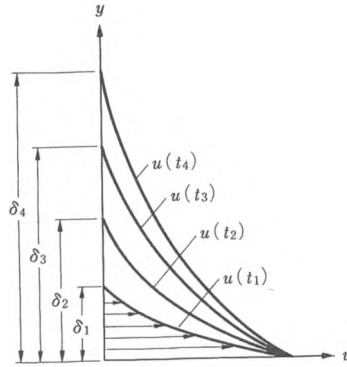


図 8.4 レイリー問題の流れ

流速分布 u/U_0 を図 8.3 に示す。これを生の座標 y に関して t をパラメーターにして表すと、図 8.4 のようになる。

また、平板に働く摩擦応力は次のようになる。

$$\tau_0(t) = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \rho \nu^{1/2} U_0 t^{-1/2}$$

粘性の影響範囲

レイリー問題の結果は粘性の作用を理解するにはきわめて重要である。図 8.4 からわかるように、板の運動の影響は時間 t とともに徐々に遠方に伝えられ、しかも流速分布は y 座標のスケールを変えることにより図 8.3 のように“相似形”となる。粘性の影響が遠方に及ぶ範囲を表す目安として、流速 u が壁面速度 U_0 の約 0.5% ($u/U_0 = 0.0047$) に落ちる高さを取り、これを $y = \delta(t)$ と定義する。式 (8.23) よりこれを満たすのは $\text{erf } \eta = 0.9953$ すなわち $\eta = 2$ が得られ、これより

$$\delta = 4 \sqrt{\nu t} \quad (8.25)$$

の関係が求まる。上の関係式は粘性の影響が動粘性係数の平方根および平板が運動し始めてからの時間の平方根に比例して遠くへ及んでいることを表している。式 (8.25) の結果は、第 10 章で展開される層流境界層の概念に結びつく。このことはまた、壁面の運動の記憶が粘性により $\delta/t = 4\sqrt{\nu/t}$ の速さで（時間が経つほど、また粘性が小さいほどゆっくりと）遠方に伝えられるというふうにも解釈される。これらの特性は、式 (8.18) と熱伝導とのアナロジーにより、半無限に広

がる（金属）板の表面の温度を急に一定温度だけ上昇（もしくは下降）させてその温度に保ったときの板内の温度の変化と同じように考えればわかりやすいであろう。

渦度の拡散

流れの場の特性量の一つである渦度に関して、レイリーの問題を見直してみよう。二次元平行流では渦度 ω_z は

$$\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (8.26)$$

である。式 (8.18) を y に関して偏微分して渦度 ω_z について書き直すと、

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} \quad (8.27)$$

となる。これは、渦度の拡散方程式 (1.66) である。渦度は平板が動き出す $t=0$ の瞬間から壁面上で作られ ($t=0$ では渦度の分布は $\omega_z(y, 0) = \delta(y)$ である。ここに、 $\delta(y)$ は Dirac のデルタ関数)、粘性の作用で壁面から上方に拡散され、その分布はガウス分布

$$\omega_z(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\eta^2} \quad (8.28)$$

となる。式 (8.26) により上式を積分すれば、式 (8.24) の流速分布 $u(y, t)$ となる。

熱伝導との相似（アナロジー）

上に述べた瞬間的に始まる平板の等速運動によって引き起こされる平板上の半無限域に広がる流体の運動や、次に述べる振動平板上の流れの流速変化のイメージはややつかみづらい。ところで、基礎方程式 (8.18) は熱伝導型といわれる型の偏微分方程式であり、流速 u を温度 T と読み換えると、式 (8.18) は

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

となる（このとき、粘性係数 ν を熱伝導係数と考えればよい）。したがって、この問題は半無限平板の境界の温度を時刻 $t=0$ に急に一定温度 T_0 まで上昇しそのままに保つときの熱の伝わり方を表すと考えることができる。（この問題と熱伝導現象との相似は、Rayleigh (1880), Taylor (1918), Terazawa (1922) により指摘された。）

ついでながら、熱を伝える能力を表す熱伝導係数も、物質を拡散させる分子拡

散係数も、そして流体の運動量を伝達する能力を表す粘性係数も、ともに分子運動の作用によるもので、いずれも〔長さ〕×〔速度〕の次元をもっている。

解の導き方

拡散型の偏微分方程式を解くには、次のように考えればよい。まず、粘性の効果は徐々に遠くに及ぶから、粘性の効果の及ぶ壁面からの距離（これを式 (8.25) で定義される $\delta(t)$ と区別して) $\theta(t)$ を尺度の基準に選んで高さ方向に流速分布をそろえてやれば、流速分布は同形の分布（相似分布）になるだろうと予測される。ただし、 $\theta(t)$ はいまは時間の未定の関数。したがって、 $\theta(t)$ で高さ y を測りそれを η とする。このことを無次元化という。

$$\eta = y/\theta(t) \quad (8.29)$$

このとき、流速分布は η に関して同形の分布 $f(\eta)$

$$u(y, t) = U_0 f(\eta) \quad (8.30)$$

となると仮定する。このとき、基本式中の微分項はそれぞれ

$$\frac{\partial f(\eta)}{\partial t} = \frac{df}{d\eta} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{y}{\theta(t)} \right) = \frac{df}{d\eta} \cdot \left[-\frac{y}{\theta^2(t)} \cdot \frac{d\theta}{dt} \right] \quad (8.31)$$

$$\frac{\partial f(\eta)}{\partial y} = \frac{df}{d\eta} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{\theta(t)} \right) = \frac{df}{d\eta} \cdot \frac{1}{\theta(t)} \quad (8.32)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{d^2 f}{d\eta^2} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} \cdot \frac{1}{\theta(t)} = \frac{d^2 f}{d\eta^2} \cdot \frac{1}{\theta^2(t)} \quad (8.33)$$

となる。これらの式を式 (8.18) に代入すれば、次式となる。

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} + 2\eta \frac{df}{d\eta} \left[\frac{\theta(t)}{2\nu} \frac{d\theta}{dt} \right] = 0 \quad (8.34)$$

式 (8.34) が成立するためには、大括弧の中の項が時間 t を含まず一定 ($=c^2$) でなければならない。

$$\frac{1}{4\nu} \frac{d\theta^2}{dt} = c^2 \quad (\text{const}) \quad (8.35)$$

これより、粘性の及ぶ高さ $\theta(t)$ は次のように求まる。

$$\theta(t) = 2c \sqrt{\nu t} \quad (8.36)$$

ここで、 $f' = df/d\eta$ 、 $c^2 = 1$ とおけば、式 (8.34) は

$$f'' + 2\eta f' = 0 \quad (8.37)$$

と常微分方程式が得られる。これより

$$2\eta = -f''/f' = -d(\ln f')/d\eta \quad (8.38)$$

上式を積分すれば、

$$-\eta^2 + \text{const} = \ln f'$$

となる。これを变形整理して

$$\frac{df}{d\eta} = \alpha e^{-\eta^2}$$

を得る (ここに, $\alpha = e^c$, $c : \text{const}$). 上式をもう一度積分して、

$$f(\eta) = \alpha \int_0^\eta e^{-\eta'^2} d\eta' + \beta \quad (8.39)$$

(β : 積分定数). 上式に対する境界条件

$$f = 1 \quad (\eta = 0 : y = 0, u = U_0) \quad (8.40 a)$$

$$f = 0 \quad (\eta \rightarrow \infty : y \rightarrow \infty, u \rightarrow 0) \quad (8.40 b)$$

を代入すれば、積分定数 α, β が定まり

$$u(y, t) = U_0(1 - \text{erf } \eta) \quad (8.41)$$

ここに、 $\text{erf } \eta$ は誤差関数

$$\text{erf } \eta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\eta'^2} d\eta' \quad (8.42)$$

(注 8.1) 熱伝導型偏微分方程式の解法

この型の偏微分方程式は、時間 t に関して一階の偏微分、距離 y に関して二階の偏微分となっており、熱の伝導や物質の分子拡散を記述する偏微分方程式と同じ形である。それゆえ、式 (8.18) は物理的には熱伝(導)型あるいは拡散型偏微分方程式と呼ばれ、また数学的には放物型偏微分方程式と呼ばれる。偏微分方程式を解く方法はさまざまであるが、最も一般的で形式的な解き方は変数分離法である。しかし、この場合の放物型偏微分方程式を変数分離法で解こうとしてもうまくいかないことは、式 (8.23), (8.24) に示す解の形を見てもすぐわかるであろう。もちろん、変数分離法で得た基本解を基にそれを变形してもこの問題の解は得られるが、大変な手間がかかる。同じく形式的な解法であるラプラス変換でも、式 (8.23) の解は容易に求まるが、ラプラス変換の変換公式を知らないと、やっかいである。

しかし、以上のように現象の物理的特性を考えれば解き方は意外に簡単である。この方法は数学的には相似変換法とも呼ぶべき方法である。式 (8.20)、あるいは式 (8.29), (8.36) の変数変換 ($\eta = y/\sqrt{\nu t}$) は Boltzmann 変換と呼ばれる。

(注 8.2) レイリー問題について

静止状態から動き始める無限平板上の非定常流れは、レイリー問題と呼ばれることがある。しかし、この問題は 1851 年という早い時期に (というのはストークスがナビエ-ストークス方程式を発表するのは 1845 年であるから)、ストークス (1851) により最初に解かれている。にもかかわらず、この問題がレイリー問題といわれるのは、次のような事情による (谷, 1984)。

イギリスの Lanchester は 1907 年に “Aerodynamics” を著し、その中で摩擦力と境界層の運動量損失を比較して、平板の摩擦抵抗(平板の両面に働く抵抗)が $\rho\nu^{1/2}x^{1/2}U_0^{3/2}$ に比例することを示している。(これはすでに 1905 年に発表されたプラントルの結果 $1.1\rho\nu^{1/2}x^{1/2}U_0^{3/2}$ (この係数は、のちブラジウスにより 1.33 に修正された) を知らずに導かれたものである)。この Lanchester の著書はレイリーの関心と呼び、第 10 章に述べるプラントルの論文 (1905) やブラジウスの論文 (1908) がすでに発表されていた 1911 年に到って、静止から動き始める無限平板上の流れについてのストークスの解からの単純な類推として、かなり不正確な(プラントル, ブラジウスの約 2 倍の)抵抗則 ($2.26\rho\nu^{1/2}x^{1/2}U_0^{3/2}$) を発表している。このレイリーの論文にはプラントル (1905) の論文もブラジウス (1908) の論文も引用されていない。このことはプラントルとそのゲッチンゲンにおける協力者達の研究の受容がいかに遅かったかを示すものである。プラントルの境界層理論がゲッチンゲンの外に広がるのは、第一次世界大戦による 6 年間の空白を経て大戦後間もなくカルマン (Karman, 1921) が境界層方程式の積分から運動量方程式による近似解法を提案した 1920 年代からである。

8.5 振動平板による流れ

無限に長い平板がその面内で振動する際に生じる流れもまた非定常平行流である。運動方程式は同じく式 (8.18) であり、境界条件は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} u &= U_0 \cos \omega t & (y=0) \\ u &= 0 & (y=\infty) \end{aligned} \right\} \quad (8.43)$$

この問題の解 (steady-state solution) は

$$u(y, t) = U_0 e^{-\eta y} \cos(\omega t - \eta y) \quad (8.44)$$

$$\eta = y \sqrt{\omega/2\nu} = y/\delta \quad (8.45)$$

で与えられる。ここに、 $\delta = \sqrt{2\nu/\omega}$ 。

図 8.5 に示されるように、壁の運動の影響は壁面を遠去かるにつれて距離とともに指数的に減衰し、その距離に比例した位相 $\phi = y/\sqrt{\omega/2\nu}$ だけ少しずつ遅れて遠方に伝達される。われわれの脳の記憶が時間とともに徐々に薄れるように、あるいは口伝えの情報や噂が情報源を遠去かるにつれて遅れてしかもゆがんで伝わるように、粘性による壁面運動の伝達もだんだん弱くなっていく。レイリーの問題とも合わせ考えるとき、粘性の作用は正に “壁面効果のメ

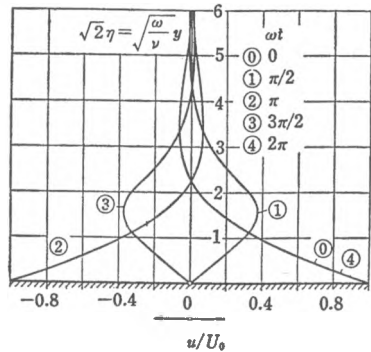


図 8.5 振動平板上の流速分布

メ

モリー”と呼ぶことができる。

波はなぜポテンシャル運動なのか

振動平板上の流れでは、図 8.5 や式 (8.44) から明らかなように十分長い時間が経過した後でも平板の運動の影響はある層 $\delta = \sqrt{2\nu/\omega}$ 内に限られる。(この層をストークス層 (Stokes layer) という。) これはどう考えればよいであろうか。

平板に接する流体は粘着条件により平板の振動とともに運動する。それに引きずられて上の流体も次々に運動を起こす。振動平板の x 軸方向の変位を $X(t)$ とすれば、 $dX/dt = u(0, t)$ であるから、平板が正の方向に運動しているときには (正確に計算すれば、後述の式 (8.59) で示されるように $(-3\pi/4) < \omega t < \pi/4$ には) 正の渦が作られ、平板の運動が逆転すると (正しくは式 (8.60) から $\pi/4 < \omega t < 5\pi/4$) 負の渦が作り出される。これらの渦は粘性の拡散作用により平板から徐々に遠くに広がる。しかし、正負の渦が互いに打ち消し合う結果、粘性の効果は平板からある高さの層内に閉じ込められその範囲外には及ばない (図 8.6)。

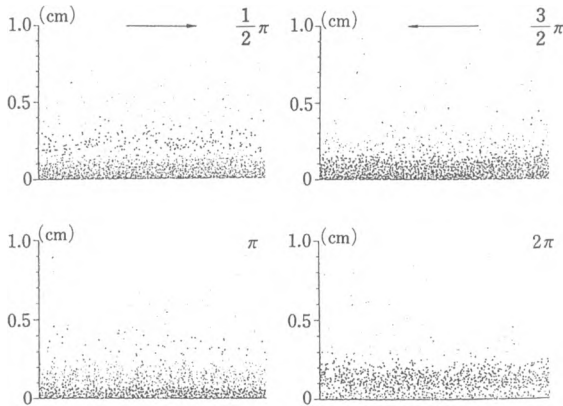


図 8.6 振動流における渦素子の空間分布 (大きい点が正の渦, 小さい点が負の渦) (難岡・八木による, 1991)

水の波の運動に渦なしの完全流体の理論 (ポテンシャル理論) がよく適合するのは、底面の影響が底面近傍のきわめて薄い層内に閉じ込められて水が波動運動をする流体内部に及ばないことによる。いま一つの理由は、自由表面に働く圧力が渦度を発生しないことである。

解の導き方——流速分布

振動平板上の流れは、偏微分方程式の標準的解法である変数分離法で容易に解

くことができる。ここでは、物理的考察に基づいて、これを多少変形した方法を用いる。

平板は周期運動をしているから、平板が動き始めてから十分時間が経過し平衡状態に達してからは、流速も同じ周期で変化することが予想される。そこで、流速変化を周期的に変動する時間に関する成分 $\cos \omega t$ (数学的な演算を容易にするために、数学公式 $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$ の実数部をとることにして、 $e^{i\omega t}$ とおく) と、粘性の作用の及ぶ代表高さ (振動層厚さ) δ で無次元化した壁面からの距離 η に関する成分 $f(\eta)$ の積と考えて、次のように表す。

$$u(y, t) = U_0 e^{i\omega t} f(\eta) \quad (8.46)$$

ここに、

$$\eta = y/\delta \quad (8.47)$$

この代表高さ δ はいまのところ未知量としておく。ここで、式 (8.18) の各項を計算すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= i\omega U_0 e^{i\omega t} f(\eta) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= U_0 e^{i\omega t} \frac{d^2 f}{d\eta^2} \cdot \frac{1}{\delta^2} \end{aligned}$$

となる。したがって、式 (8.18) は次式となる。

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} + \left(-\frac{i\omega\delta^2}{\nu} \right) f(\eta) = 0 \quad (8.48)$$

式 (8.48) から未知であった振動層 (Stokes layer) 厚さ δ は、式 (8.48) を簡単にするように

$$\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}} \quad (8.49)$$

と定まり、解くべき方程式は式 (8.50) となる。

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} + (-2i) \cdot f(\eta) = 0 \quad (8.50)$$

この微分方程式は、係数が虚数 $(-2i)$ となっているだけで、単振動の方程式と全く同形である。そこで、上式の解として次式を仮定する。

$$f(\eta) = e^{(\alpha+i\beta)\eta} \quad (8.51)$$

これより

$$f''(\eta) = (\alpha+i\beta)^2 e^{(\alpha+i\beta)\eta} \quad (8.52)$$

これらを式 (8.50) に代入すれば

$$(\alpha + i\beta)^2 + (-2i) = 0 \quad (8.53)$$

すなわち,

$$\alpha^2 - \beta^2 = 0, \quad \alpha\beta = 1 \quad (8.54)$$

の関係が得られる。したがって、 $\alpha = \beta = 1$ であり、最終的に $u(y, t)$ は

$$u(y, t) = U_0 e^{-\eta} \cdot e^{i(\omega t - \eta)} \quad (8.55)$$

となる。初めの約束により実数部を取り出すと振動流の流速分布として次式が得られる。

$$u(y, t) = U_0 e^{-\eta} \cdot \cos(\omega t - \eta) \quad (8.56)$$

渦度の分布

次に、平板上の振動流の渦度 ω_z を求める。 $v \equiv 0$ であるから、

$$\omega_z(\eta, t) = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

である。式 (8.55) より $\partial u / \partial y = du / d\eta \cdot \partial \eta / \partial y = (1/\delta) du / d\eta$ は

$$\frac{du}{d\eta} = -(1+i) U_0 e^{-\eta} e^{i(\omega t - \eta)}$$

ここで、 $(1+i) = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$ の関係を考慮すれば、

$$\omega_z(\eta, t) = \frac{\sqrt{2} U_0}{\delta} e^{-\eta} \cos\left(\omega t - \eta + \frac{\pi}{4}\right) \quad (8.57)$$

である。 $y=0$ では、

$$\omega_z(0, t) = \frac{\sqrt{2} U_0}{\delta} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) \quad (8.58)$$

したがって、半周期ごとに平板上で作り出される渦の符号は正負に交代する。

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_z(0) > 0 \quad \left(-\frac{3\pi}{4} < \omega t < \frac{\pi}{4}\right) \end{array} \right. \quad (8.59)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_z(0) < 0 \quad \left(\frac{\pi}{4} < \omega t < \frac{5\pi}{4}\right) \end{array} \right. \quad (8.60)$$

壁面で作られる渦の符号の正負は、壁面速度 $\dot{X}(t) = U_0 \cos \omega t$ と $\pi/4$ の位相差がある。これは、流体の慣性のために、壁面近傍の流れが壁面の運動より遅れるためである。

ハーゲン—榮譽をのがした下水道技師

(Gotthilf Heinrich Ludwig Hagen, 1797—1884)



現在ヨーロッパの都市を訪ねる人は誰でもみごとにゆったりと設計された清潔な街並みに感心するであろう。もっともパリの犬のフンを除けば、しかし、こうした街並みは19世紀に入って以来整備されたもので、中世のヨーロッパ都市の不潔さは現在からは想像もできないくらいであったらしい。水溜りを馬車が走る、窓からは汚ない水が捨てられる（だから男性は女性と歩くとき窓際を歩くのがエチケットであった）、ぬかるみもひどく足駄のようなものをつけて歩く人もいた。当然ながら疫病はしょっちゅう蔓延した。しかし、やがて経験から下水道を整備し清潔にすることの必要性がわかり、18世紀の終り頃から徐々に大規模

な下水道網が完備されてゆく。もっともペストやコレラが細菌によるものであることは、19世紀も半ばを過ぎてからドイツの医学者コッホ（1876）とフランスの化学者パスツール（1877）によって発見され、これ以後伝染病の予防は急速にすすむ。

ところで、こうした19世紀前半に下水道網設計の仕事を通じて、精密な管路の抵抗則および流れの状態の区分—今日でいう層流と乱流—についての仕事を残したのがドイツのハーゲンである。彼は層流管路の抵抗則をポアズイユ（1841）と独立にしかも2年早く（1839）見出しているし、ずっと後にレイノルズ（1883）の行った層流と乱流の区別や遷移域での層流状態と乱流状態の間欠交代現象を実験的に見出している。いわば、ポアズイユとレイノルズ2人分の仕事をしたわけであるが、彼の名はほとんど忘れ去られている。“ハーゲンの業績は不当に低く扱われている。もっと評価すべきではないだろうか”と谷一郎は最近述べているが、同様のことをプラントル（1934）も書き残している。

では、これほどの仕事が忘れられかけているのはなぜだろうか。ハーゲンの論文があまり広く読まれていないプロシヤの雑誌“Poggendorffs Annalen”（1839）に、しかも特殊なプロシヤの度量衡（プロシヤ・オンス、パリ・インチ）で記されているのもその一因らしい。しかし、いま一つには同国人の仕事の評価しないというドイツの後進性にあったのではないだろうか。イギリスのマックスウェルとともに統計力学の創始者であるボルツマンを自殺にまで追い込む旧守派の頑迷さ、物理学に新世界を開いたアインシュタインを追放する偏狭さとも共通のものであるのではないだろうか。