

18. 乱流の発生

18.1 なぜポアズイユ流れの理論式が成立しないか？

さきに14章で述べたように、管路の流れは無次元数であるレイノルズ数が約2000以上になると流れの状態は層流から乱流に移り、8章で導いた管路のハーゲン-ポアズイユ流れの理論式が成立しなくなる。ハーゲン-ポアズイユ流れの理論の展開には、なんらの省略や近似が用いられてはいないし、またレイノルズ数が小さい場合といったことも仮定されていないのに、なぜこの理論式の関係が成立しなくなるのであろうか。理論の展開過程にその理由が見つからないとすれば、それ以前の仮定の中に検討すべき事項があると考えなければならない。その仮定とは

- (i) 管はまっすぐで径は一様である。
- (ii) 管の上下流端に働く圧力は時間的に変わらない。
- (iii) したがって、流れは定常である。
- (iv) 流れは流下方向に一様である。

このいずれをとってみても、流れのレイノルズ数が大きいにせよ、小さいにせよ一見実際の管路流の状態を述べているように思われる。しかし、この中の(iii)と(iv)は時間的平均流速については成立していても、レイノルズ数の大きい乱流状態の各瞬間瞬間の流速については成り立っていないのである。そのときの各点の流速はある平均値のまわりに不規則な変動を繰り返す乱流と呼ばれる状態となっている。

結局、ハーゲン-ポアズイユ流れでは上の(i)と(ii)の条件から管内の流れも常に定常・一様で、流速は半径方向の位置のみの関数で、時間にも流下距離にも無関係と仮定したが、それは誤りで実際には「レイノルズ数の大きい流れではそのような流れは実際には存在せず、流速は管内の位置のほかに、時間の関数ともなっている。」と考えなければならないことがわかる。理論の展開にあたっての

仮定・前提のわずかの隙間に過誤が入り込んだわけである。つまり外的に与えられる条件が定常だから管の中の流れも定常であると考えたところに論理の飛躍があったのである。いい換えると、流れのレイノルズ数がある値以上ではナビエ-ストークスの方程式は一種の多価性をもつようになる。このような乱れは外部からの微弱な擾乱（じょうらん）が引き金となって発生する。

逆に、高いレイノルズ数のもとでも特別な注意を払えば、ポアズイユ流つまり層流が作れるかもしれないと考えられる。事実、地下室のような外部からの振動の影響のない室に水槽をおき、十分長い時間放置して水中の乱れが消滅した状態のもとで実験を行い、数 1000 ないし 24000 (V.W. Ekman, 1910) という高いレイノルズ数でも流れを層流に保ちえたという報告がある。しかしながら、どんなに攪乱を与えてもレイノルズ数が約 2000 以下では流れは乱流状態を持続しえず層流状態になってしまう。

管路流に限らず一般に流体の流れは、レイノルズ数とその流れに特有な限界値を超えると、層流状態を維持することはできず周囲からの擾乱の影響により乱流状態に移移する。

18.2 平板に沿う層流境界層の安定問題

a. オア-ゾンマーフェルトの方程式

さて、この問題を最も基本的な流れの一つである平板に沿う二次元流れについて考察する。レイノルズ数が十分大きいとすると、この流れは § 10.1 で示したように層流境界層流れであり、流速分布はブラジウス分布形で与えられる。平板に沿う層流境界層は流下方向 (x) に層の厚さが増加し、厳密には管路流のような平行流ではないが、その程度は y 方向の変化に比べて小さいので平均流速 \bar{u} は壁からの高さ y のみの関数と考える。このとき、連続の関係から、 y 方向の時間的平均流速について $\bar{v} \approx 0$ を仮定できる。したがって、各瞬間の流速および圧力は平均値と変動分の和として

$$\left. \begin{aligned} u &= \bar{u}(y) + u'(x, y, t) \\ v &= v'(x, y, t) \\ p &= \bar{p} + p'(x, y, t) \end{aligned} \right\} \quad (18.1)$$

と書ける。これをナビエ-ストークス方程式 (7.11) に代入し、 u' 、 v' 、 p' が微小量であるから、それらの二次以上の項を省略できることを考慮すれば、変動成分

に関する方程式が次のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{d\bar{u}}{dy} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} &= \nu \nabla^2 u' \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} &= \nu \nabla^2 v' \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (18.2)$$

ここで、外乱を種々の波長・波速の波の集合と考える。すなわち、

$$\sum_n a_n \sin(\alpha_n x - \beta_n t)$$

あるいは、 $e^{iX} = \cos X + i \sin X$ の関係を考慮し複素数表示により

$$\sum_n a_n e^{i(\alpha_n x - \beta_n t)} \quad (18.3)$$

と考える。ここに、 $\alpha_n (=2\pi/L_n, L_n: \text{波長})$ は波数、 $\beta_n (=2\pi/T_n, T_n: \text{周期})$ は角振動数である。複素数表示の場合には、実際上物理的に意味をもつのは実数部のみとする。基礎方程式 (18.2) は線型であり、重ね合わせによる解が許されることを考慮すれば、種々の振動成分のうちの一成分のみについて考えればよい。流れの場合には外乱に刺激されて同じ波数の微小振幅の波が生じると考えよう。したがって、それぞれの変動成分を

$$\left. \begin{aligned} u'(x, y, t) &= \bar{u}(y) e^{i(\alpha x - \beta t)} \\ v'(x, y, t) &= \bar{v}(y) e^{i(\alpha x - \beta t)} \\ p'(x, y, t) &= \bar{p}(y) e^{i(\alpha x - \beta t)} \end{aligned} \right\} \quad (18.4)$$

と表す。ここに、波数 α は実数、角振動数 β は複素数とする。

$$\beta = \beta_r + i\beta_i \quad (18.5)$$

したがって、式 (18.4) 中の $e^{i(\alpha x - \beta t)}$ の項は

$$e^{i(\alpha x - \beta t)} = e^{i(\alpha x - \beta_r t)} \cdot e^{\beta_i t} \quad (18.6)$$

と書き直される。上式の右辺の $e^{i(\alpha x - \beta_r t)}$ は x 方向に波速 $c_r = \beta_r / \alpha$ で伝わる波長 $L = 2\pi / \alpha$ の波を表し、 $e^{\beta_i t}$ はこの波の時間的な増幅 ($\beta_i > 0$) あるいは減衰 ($\beta_i < 0$) の様子を表す。 $\beta_i = 0$ は微小変動が増幅も減衰もしない中立状態に対応する。

さて、式 (18.4) を式 (18.2) に代入すれば、 \bar{u} 、 \bar{v} 、 \bar{p} に関する三つの常微分方程式が得られる。さらにこれらの式から \bar{u} と \bar{p} の項を消去すれば、 $\phi(y) (= \bar{v}(y) / \bar{u}_\infty)$ あるいは $\Psi(x, y, t) = (i\bar{u}_\infty / \alpha) \phi(y) \exp(i(\alpha x - \beta t))$ で表される流関数中の項 $\phi(y)$ に関して次の常微分方程式が得られる。

$$(U-c)(\phi'' - \alpha^2\phi) - U''\phi = -\frac{i}{\alpha Re^*}(\phi'''' - 2\alpha^2\phi'' + \alpha^4\phi) \quad (18.7)$$

の関係が得られる。ここに、

$$c = c_r + ic_i = \beta/\alpha \quad (18.8)$$

また、 $Re^* = \bar{u}_\infty \delta^*/\nu$ 、 δ^* は排除厚さ、 $\bar{u}_\infty = u(\delta)$ は層流境界層外縁の流速、 $U = \bar{u}(y)/\bar{u}_\infty$ 、微分は無次元化した独立変数 (y/δ^* ; これを改めて y とする) に関するものである。さらに、パラメーターは $\alpha\delta^*$ 、 $\beta\delta^*/\bar{u}_\infty$ 、 $c = \beta/(\alpha\bar{u}_\infty)$ を改めて α 、 β 、 c と変えてある。前式の左辺は慣性項および圧力項によるものであり、右辺は粘性項に関するものである。式 (18.7) は外乱の影響による流れの微小変動が増幅するか減衰するかを求める基本方程式で、オア (Orr, 1906~7) とゾンマーフェルト (Sommerfeld, 1908) により独立に導かれ、オア-ゾンマーフェルト方程式と呼ばれる。この方程式の境界条件は、 $u' = v' = 0$ ($y=0$)、 $u' = v' = 0$ ($y=\infty$) を ϕ について表した以下のようなものである。

$$\phi = \phi' = 0 \quad (y=0), \quad \phi = \phi' = 0 \quad (y=\infty) \quad (18.9)$$

b. レイリーの変曲点不安定定理

オア-ゾンマーフェルト方程式の解析解を求めることは、かなり高度な問題であるが、この方程式の一つの極限である $Re \rightarrow \infty$ 、つまり非粘性流体の安定条件は容易にしかも一般的な形で求まる。結論を先に述べると、“非粘性流体の流れが攪乱に対して不安定となるためには、流速分布に変曲点がないといけない”、“流速分布に変曲点がないければ、非粘性流体流れは微小攪乱に対して中立である”ということである。この定理は、「微小攪乱の発達による乱れの発生」という考え方の提案者であるレイリー (Rayleigh) により、O-S 方程式に先立って 1880 年に導かれた。

流速分布に変曲点をもつということは、スパン方向の渦度 $\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ に極値 (極大または極小) があること $\left(\frac{\partial \omega_z}{\partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\right)$ である。もし、ここで渦度の絶対値が極大値となるならば、流れの場に渦度の集中した層が存在していることに相当している。したがって、レイリーの変曲点不安定定理は、§18.4 に述べるケルビン-ヘルムホルツ型 (K-H 型) 不安定とも関連しており、不安定の結果として流れの場に渦列が発生する。

レイリーの変曲点不安定定理は非粘性流体について導かれたものであるけれども、現実の流体の場合にも流速分布に変曲点をもつ流れである後流や噴流あるいは



図 18.1 変曲点不安定の例 (二次元平板の後流の渦列)
平板の長さ (25mm) に基づくレイノルズ数, 約 7000.

は境界層の剝離による混合層などの自由剪断流の不安定化は変曲点不安定によっている。また、最近では穂波も変曲点不安定による現象であるとの指摘 (池田, 1991) もある。変曲点不安定現象の著しい特徴は、図 18.1 や図 21.1 に示すように、波動型攪乱が孤立渦に発達し渦列が規則的に配列することである。

〔証明〕 オア-ゾンマーフェルト方程式において、 $Re \rightarrow \infty$ とすると、この安定問題の基本方程式はレイリー方程式

$$\phi'' - \left(\alpha^2 + \frac{U''}{U-c} \right) \phi = 0 \quad (18.10)$$

となる。境界条件は上下の壁面上で $v=0$ となることである。

$$\phi = 0, \quad (y = y_1, y_2) \quad (18.11)$$

式 (18.10) に ϕ の共役関数 ϕ^* を掛けて $y = y_1$ から y_2 まで積分する。このとき

$$\int_{y_1}^{y_2} \phi'' \phi^* dy = [\phi' \phi^*]_{y_1}^{y_2} - \int_{y_1}^{y_2} \phi' \phi'^* dy \quad (18.12)$$

の関係を考慮すれば、次の式を得る。

$$\int \left\{ |\phi'|^2 + \left(\alpha^2 + \frac{U''(U-c)^*}{|U-c|^2} \right) |\phi|^2 \right\} dy = 0 \quad (18.13)$$

攪乱の波速 c が複素数

$$c = c_r + ic_i \quad (18.14)$$

であることから、式 (18.13) の虚数部を取り出すと

$$c_i \int_{y_1}^{y_2} \frac{U''}{|U-c|^2} |\phi|^2 dy = 0 \quad (18.15)$$

式 (18.15) の関係が満たされるためには、

$$U'' > 0 \text{ または } U'' < 0 \quad (y_1 < y < y_2) \text{ の場合 } c_i \equiv 0 \quad (18.16)$$

でなければならない。すなわち、流速分布に変曲点がない場合には、流れは中立である。もしくは

$$c_i \neq 0$$

であるためには、積分の区間内で U'' が符号を変えなければならない。つまり、流速分布に変曲点 y_{inf} をもつ必要がある。(変曲点の前後で U'' の符号が変わる

ので、式 (18.15) の積分は 0 となりうる.)

$$\left. \begin{aligned} U'''(y_1 < y < y_{inf}) &> 0 && (\text{または} < 0) \\ U'''(y = y_{inf}) &= 0 \\ U'''(y_{inf} < y < y_2) &< 0 && (\text{または} > 0) \end{aligned} \right\} \quad (18.17)$$

なお、同じような考え方で、攪乱の波速 c_r について

$$U_{\min} < c_r < U_{\max} \quad (18.18)$$

の関係が導かれる (Rayleigh, 1915; Tollmien, 1935).

c. 平板に沿う層流境界層の安定問題

オア-ゾンマーフェルト方程式 (18.7) および境界条件式 (18.9) は四階の常微分方程式の境界値問題を構成する。この問題では一般解は四つの独立な基本解 $\phi_i(y; \alpha, \beta, Re)$ ($i=1, \dots, 4$) の和 $\phi(y) = \sum_{i=1}^4 a_i \phi_i(y)$ で表され、これに四つの境界条件 (式 (18.9)) を課するとき、一般に α, β, Re の間に

$$F(\alpha, \beta, Re) = 0 \quad (18.19)$$

で定まる関係が生じる。このとき、摂動波数 α とレイノルズ数 Re を任意の与えられた値にとると、残りのパラメーターである複素角振動数 $\beta = \beta_r + i\beta_i$ は勝手な値をとることはできず、いわゆる固有値でなければならない。

変曲点不安定と同様な一般的証明法によって導かれるスクワイア (Squire, 1933) の定理は、主流に斜めに進行する三次元波の安定問題の限界レイノルズ数は二次元波の限界レイノルズ数を越えないことを教える。

式 (18.7), (18.9) の解を具体的に求めることは、数学的にかなり高度な問題であるので、結果のみを図 18.2 に示す。この図はあるレイノルズ数 Re の層流境界層流れに (a) 無次元波数 $\alpha\delta^* = 2\pi\delta^*/L$ (b) あるいはある振動数 β の微小攪乱が加えられるとき、その攪乱が増幅する (不安定) か、減衰する (安定) か、中立かの範囲を示すものである。安定理論によれば、平板に沿う層流境界層は $\alpha\delta^* = 0.34$ の摂動波動に対して最も低いレイノルズ数 Re

$$(Re^*)_{\text{crit}} = \left(\frac{U_\infty \delta^*}{\nu} \right)_{\text{crit}} = 420^{\dagger} \quad (18.20)$$

で不安定となる (Lin, 1945).

[†] Jordinson, R. (1970), *J. Fluid Mech.*, Vol. 43, p. 801, $(Re^*)_{\text{crit}} = 520$. 流れの非平行効果を考慮すれば, $(Re^*)_{\text{crit}} = 420$, Saric and Nayfeh (1975), *Phy. Fluids*, Vol. 18, p. 945.

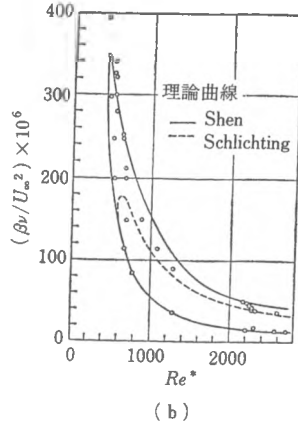
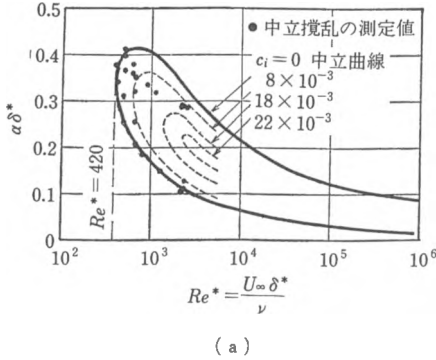


図 18.2 平板に沿う層流境界層の安定曲線

この限界状態の中立擾乱波の波長は

$$L = \frac{2\pi\delta^*}{0.34} = 18.5\delta^* \approx 6\delta \tag{18.21}$$

であり、境界層厚さに比べて非常に長い。また、式 (18.20) の限界条件は、 $\delta^* = 1.73\sqrt{\nu x/U_\infty} = 1.73x/\sqrt{Re_x}$ の関係を用いれば、平板の先端からの距離に関するレイノルズ数が

$$\left(\frac{U_\infty x}{\nu}\right)_{crit} = 5.9 \times 10^4 \tag{18.22}$$

となる点に相当する。また、波数が $\alpha\delta^* = 0.42$ より高い (波長の短い) 外乱に対しては、すべてのレイノルズ数範囲に対して流れは安定であることがわかる。

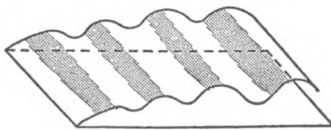


図 18.3

このような二次元層流境界層の安定問題の理論はトルミエン (Tollmien, 1929) とシュリヒティング (Schlichting, 1933) により詳しく研究されたので、 $v'(x, y, t) = \{\bar{v}(y)e^{\beta i t}\} \cdot e^{i(\alpha x - \beta t)}$ で表される二次元的な擾乱波をトル

ミエン-シュリヒティング波と呼ぶ (図 18.3)。

18.3 乱流への遷移

流れは種々の擾乱源よりあらゆる波長範囲の外乱波の影響を受けると考えられるから、流れはこの限界レイノルズ数で特定波長の外乱波に選択的に励起されて増幅し不安定となる。しかし、層流境界層が不安定になったからといって、すぐ

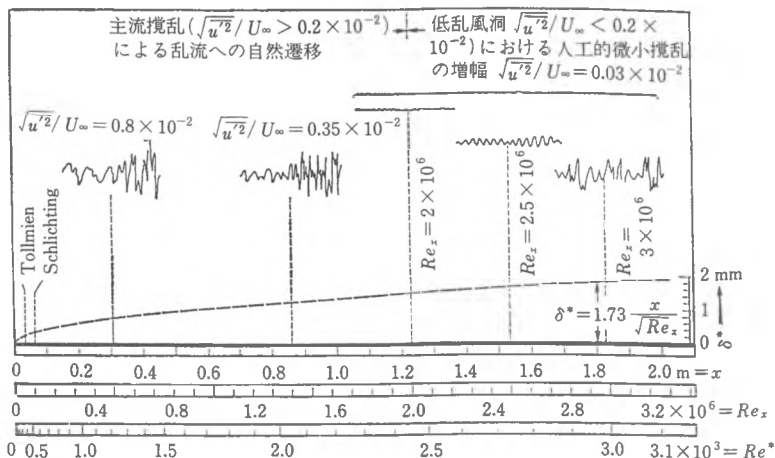


図 18.4 擾乱の成長：Tollmien, Schlichting と記された平板の先端近くで式 (18.22) の不安定条件に達した擾乱が徐々に乱れに発達する (Tietjens による)。

この点で乱流状態に変化するのではなく、流下につれて変動が徐々に増幅され、非線型増幅・干渉、擾乱の三次元化、偶然化などの複雑なプロセス (図 18.13(a) 参照) を経て限界レイノルズ数に達した点よりも遙か下流の

$$Re_x = \frac{U_\infty x}{\nu} = 3.5 \sim 5 \times 10^6 \quad (18.23)$$

の位置で完全な乱流状態となる。

図 18.4 は平板に沿う各位置での乱れの増幅成長を Schubauer と Skramstad (1943, (1947)) の実験に基づいて模式的に示したものであり、図 18.5 は各 x 点での流速変動のシグナルを示している。

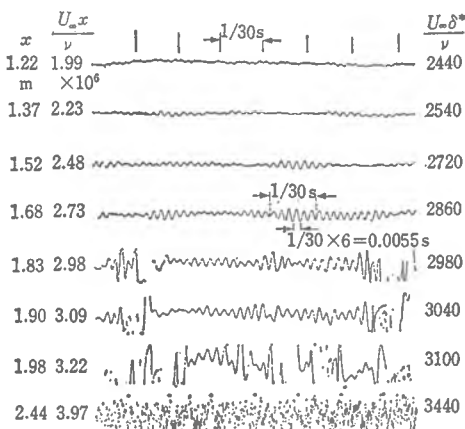


図 18.5 平板に沿う各位置での擾乱波のシグナル

図 18.6 は与えられた微小振幅の擾乱が不安定領域のレイノルズ数域で増幅し、その発達が不十分であれば (上のシグナル・トレースのように) 再び安定領域に入って減衰に向かい、また不安定域で十分に発達すれば (下のトレースのように)

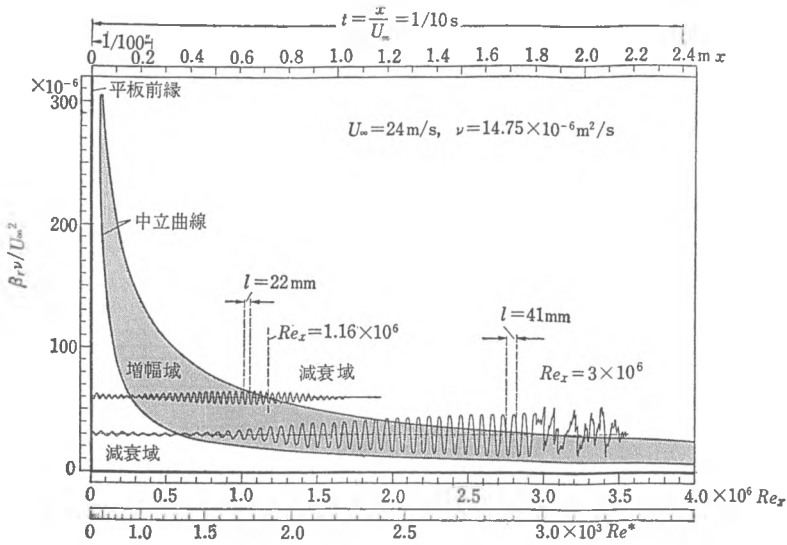


図 18.6 振動数 β_r の攪乱波の増幅・減衰過程 (Tietjens による)

乱流となることを図 18.2 (b) の安定不安定曲線の上に重ねて模式的に示したものである。

a. 平板境界層の乱流への遷移

層流が乱流となることを示すためには、単に層流の流れが微小攪乱に対してある条件下で線型的に不安定になるというだけでは不十分であって、微小攪乱の三次元(構造)化さらに、非線型領域における乱れの発達や偶然化のプロセスも説明しなくてはならない。

流れの安定限界レイノルズ数を論じるには、スクワイアの定理により問題を二次元として取り扱えば十分であるが、流れが乱れへと遷移するためには(レイリーの変曲点不安定定理が要求するように)、まずスパン方向の渦度の集中が(局部的に)起こり、それが三次元的に歪み変形していくことが必要である。

平板に沿う境界層の乱流への遷移過程はよく研究されており、次のようである。

(i) **T-S 波動の成長**: トルミエン-シュリヒティングの理論が示すように、二次元的に(流れを横切る x 軸方向-スパン方向に一樣に)攪乱波動が不安定化し、線型的に発達する。

(ii) **二次不安定(波動の三次元発達, 高剪断層の形成)**: 二次元的な波動型

攪乱 (T-S 型) の強さがある程度の大きさ (振幅の実効値が約 1% 以上) になると, これによって主流の流速分布が周期的な変形を受け, この新たな流れ場が微小な三次元攪乱に対して線型的に不安定化し, 斜行波が成長する. これによって流速場は流速変動振幅の大きい位置と小さい位置がスパン方向に周期的に並ぶピーク・ヴァレー構造 (図 18.7(c) の P と V) を形成し, ピーク位置に頂点をもつ Λ 形渦が現れる. 図 18.7 にこの過程の u' 変動の三次元的波動のパスを示す. これに時間・空間の二重フーリエ分解を行うと, 三次元波動 (図 18.8(a)) が基本波である二次元 T-S 波動 (図 18.8(b)) と斜行波対 (図 18.8(c), (d)) から成り立っていることが示される. このような三次元化の機構を説明する理論を二次不安定と呼んでいる (オルシャック・パテラ (Orszag and Patera), 1983; ハーバート (Herbert), 1984) (攪乱が乱れに遷移する第二段階は, 従来は複数の成分波の相互干渉として弱い非線型理論によって論じられたが, 最近はこの新しい型の二次不安定機構の必然性が認められている.)

(iii) 三次元不安定 (あるいは高周波二次元不安定—ヘアピン渦の発生). この三次元の波動系は Λ 渦の両脚が縦渦対として働くことにより, 壁面近くでは流体が吹き上げられ, 壁から離れた所では渦の伸長効果によりスパン方向に軸をもつ渦が強化され, ピーク位置で高剪断層が顕著に発達する. この強い変曲点型の瞬間流速分布 (高剪断層) (図 18.9) は変曲点不安定化し孤立的なよりスケールの小さなヘアピン型の渦へと成長する (図 18.10). これを等剪断線 ($(h/Uc)\partial(U+u)/\partial y = \text{一定}$) で対称面に関して手前側

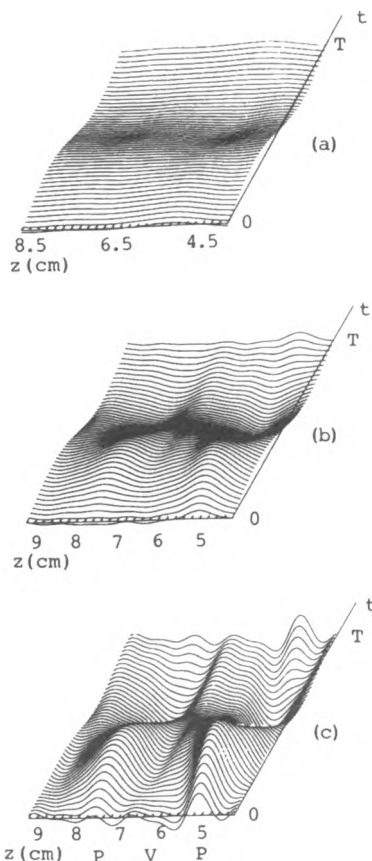


図 18.7 T-S 波動, u' 変動の三次元化. u' 変動の実効値が約 1% を超すと, 0.6% 状態の (a) に見られるわずかな歪みが 1.8% の (b), 3.0% の (c) のごとく増幅され, 遷移過程が始まる. $Re=5000$, $2\pi f_{TSH}/U_c = 0.337$. (Nishioka and Asai, 1985)

半分を示したのが図 18.11(a) である

(iv) 乱れへの破断 (スパイクの発生) : 高剪断層は先頭部から細かく分かれへアピン渦 (Hama and Nutant, 1963 ; 松井・奥手, 1985) によって細かく破

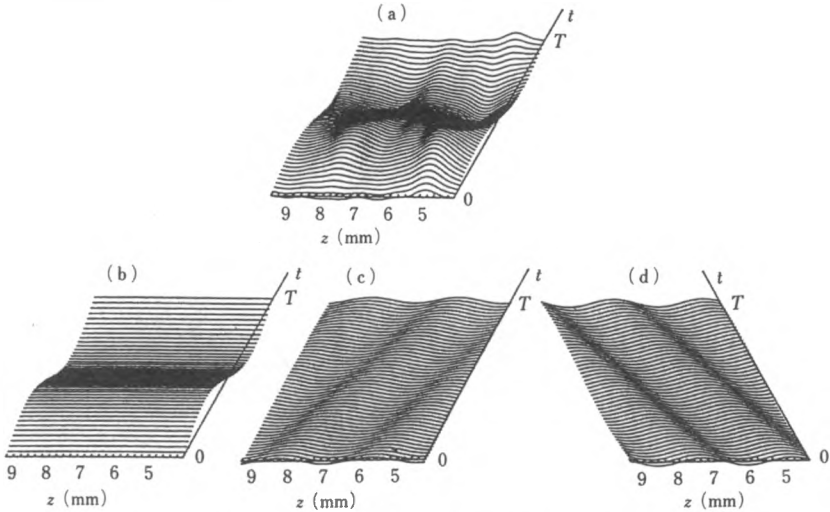


図 18.8 遷移に導く波動系 (西岡通男, 1990)
 $Re=5000, 2\pi f_T sh/U_c=0.337.$

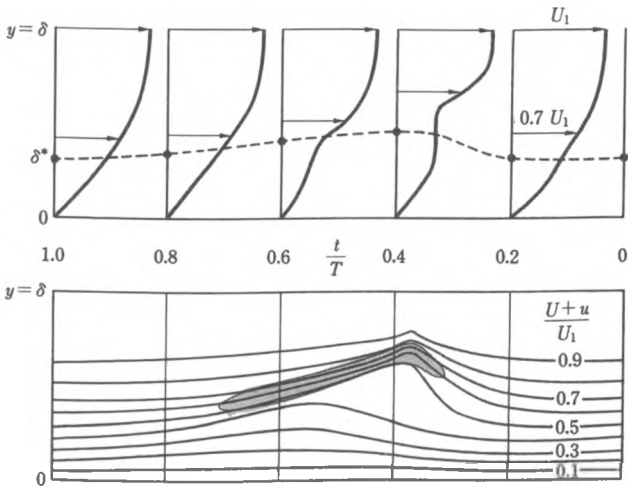


図 18.9 ピーク位置での高剪断層の出現

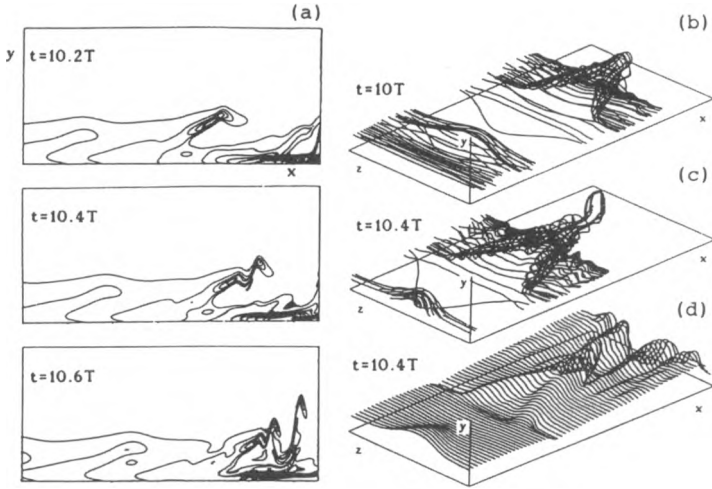


図 18.10 平板上境界層の遷移における高剪断層の形成とその破断
 (a) スパン方向の渦度の等値線表示, (b), (c) タイムライン表示, (d) 渦線表示. 図 18.12 の 2-スパイク状態にほぼ対応する (ただし T は攪乱波動の周期). (Rist, Konzelman and Fasel, 1988)

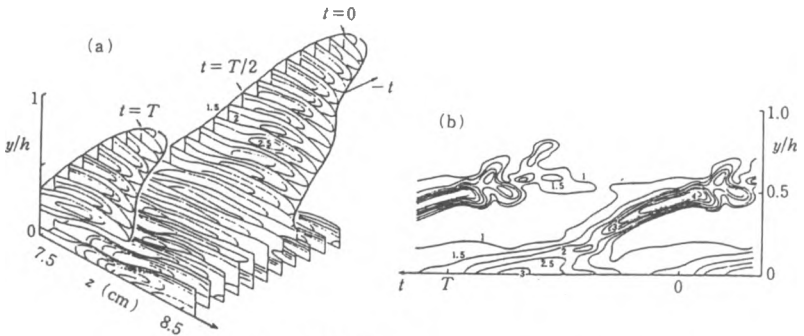


図 18.11 $\frac{h}{U_c} \cdot \frac{\partial(U+u)}{\partial y} = \text{const}$ の線 (Nishioka and Asai, 1984)

断され、小さな渦が次々に発生して局所的乱流状態となる (図 18.11(b))。ヘアピン渦 (これも変曲点不安定によると解釈されている) が現れると、高周波変動が成長して流速変動波形にスパイク波が生まれる (図 18.12) あちこちにできる局所的乱流が乱流斑点となり、流れ場全体を埋め尽くすと乱流境界層が形成される

b. 後流の乱流への遷移

平板の後流について、流れの不安定化・乱流への遷移の過程を見よう。自由剪

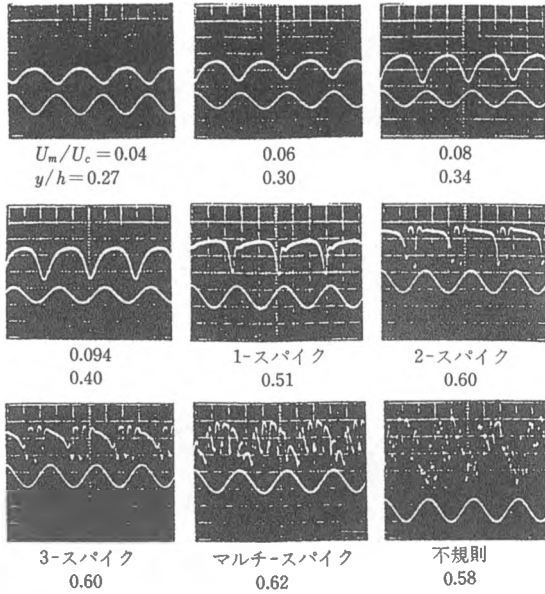


図 18.12 平面ポアズイユ流の乱流遷移-速度 (u) の変動波形の特徴的な変化
この遷移は、二次元 T-S 波動の振幅 (最大実効値 u'_m/U_c) が約 1% を超すと
始まる。V 字波形は三次元波動 (斜行波対) が成長して高剪断層が生まれるこ
とに対応し、また、下向き鋭いスパイク波形は高剪断層が細かく破断されて
小さいスケールの渦が形成されることに対応する。(西岡, 1990)

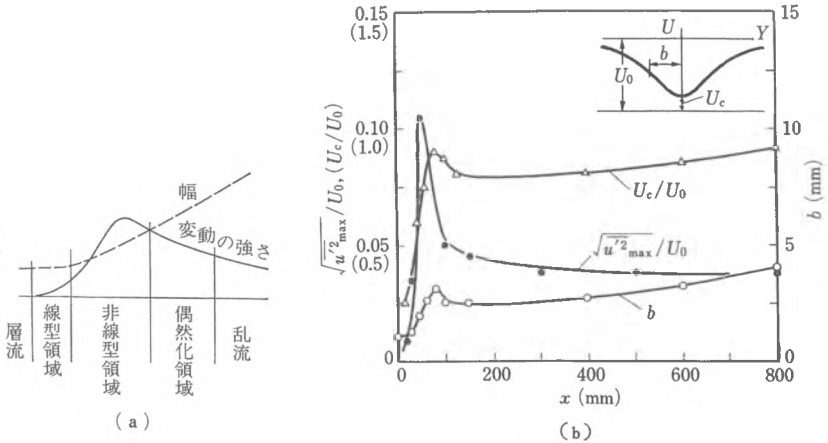


図 18.13 後流の中心速度 U_c と半値半幅 b および速度変動の強さ
 $\sqrt{u'^2_{max}}$ の変化, x は下流にとった距離, 原点は平板後
縁 (佐藤, 1988)

断流の遷移のメカニズムは固体壁をもつ剪断流の場合と著しく異なっている。また、自由剪断流の場合は、レイノルズ数が大きいと粘性の効果は少なく、安定問題はオーブンマーフェルト方程式で $\nu=0$ とおいた二階微分のレイリー方程式にしたがうと考えてよい。

後流の乱れのエネルギーは線型領域から非線型領域へと流下方向に増幅を続け、一度オーバー・シュートしたのち、平衡状態へと移っていく(図 18.13)。同図において $x=50\sim 150\text{mm}$ の範囲では、後流の中心速度は流下方向に減少し、後流の幅も小さくなるという不思議な現象が見られる。これは、非線型干渉により平均流速分布の変化が急激にすすんで“行きすぎ”(overshoot)を起こし、基本波の生長率が減少してゼロから負となったためであろう。主流に垂直な断面内の流速の変動を成分波に分解すると、流れの中心で基本波の変動エネルギーは小さく、高調波の変動エネルギーはここでピークとなっている(図 18.14)。

このような最も成長率の高い基本波の変動のエネルギーが高調波および分調波の変動のエネルギーへと移行する機構は、流れの非線型干渉によって行われる。

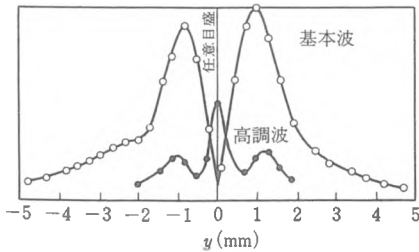


図 18.14 後流の乱れの基本波と高調波成分の横方向 y への分布(佐藤, 1988)

この機構によって変動周波数の和および差の周波数の所にまず変動のエネルギー・スペクトルのピークが現れ、ついでそれらの中間の周波数の乱れのエネルギーが徐々に増加し、ずっと下流で乱れのエネルギー・スペクトルは滑らかになる(図 18.15)。周波数の低い変動へのエネルギーの移行は流れの可

視化によって認められる渦の融合合体(マージング)の過程に対応している。

構造化: 乱流の特性を流れの時間的場所的偶然性の点のみではなく大きな拡散能と大きなエネルギー消散の点でとらえようとするならば、乱流への遷移には同時に乱れの三次元構造化の過程を見る必要があり、これは第 21 章に述べる乱流の大規模構造・秩序運動とも関連してくる。

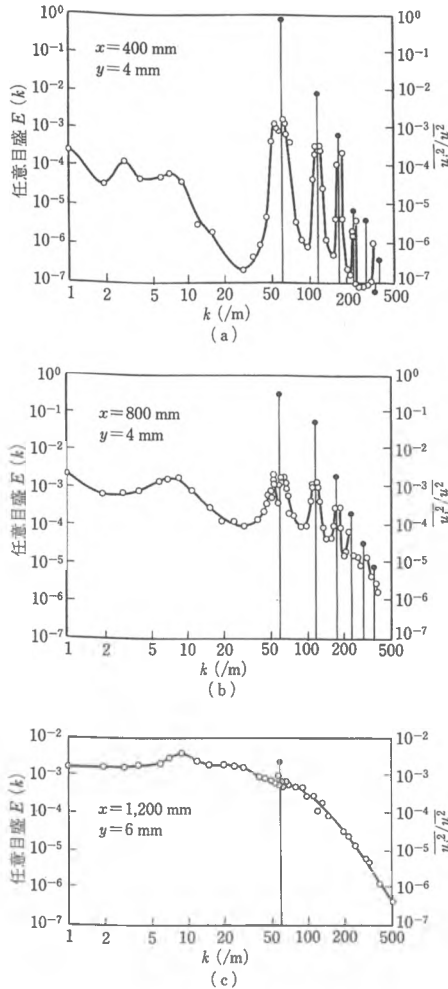


図 18.15 後流中の乱れのエネルギー・スペクトル (600Hzの音で励起した場合) (佐藤, 1988)

18.4 ケルビン-ヘルムホルツの安定問題

一つの境界面を境にして上下の流れの流速分布が不連続な流れは、境界面の微小変化に対して不安定である。この種の問題をケルビン-ヘルムホルツ (Kelvin-Helmholtz) の安定問題という。風により水面に生じる波は水と大気の境界面の

不安定の結果発生するもので、ケルビン-ヘルムホルツ型の不安定（略してK-H不安定という）の一種である。

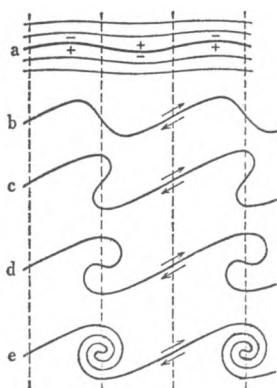


図 18.16

いま、二流体（完全流体）の境界面に微小振幅の変動が重ね合わされたとする。上の流体の流線の変形を考えると、境界面の峰の所では流線が少し密になりしたがって流速が増加する。これに反し、境界面の谷の位置では流線はやや粗になり、したがって流速が減少する。その結果ベルヌーイの定理により、上の流体の圧力は峰の位置で低く谷で高くなる。下の流体では境界面の峰で逆に流線が粗になりしたがって圧力は増加し、境界面の谷の所の圧力は減少する。その結果、境界面の峰の所はますます上に移動しようとし、谷はますます

す深くなろうとする。

境界面の変形が大きくなるにつれて、境界面の峰や谷が内側に巻き込み渦に成長する。このような境界面の変形は、円柱や角柱のような鈍い形の物体の背後に発生する後流の渦列としても見ることができる。このような流れでは物体表面から剝離した薄い境界層を介して、上下の流速分布が不連続的に変わっておりケルビン-ヘルムホルツの安定問題に対応する状態となっている。

また、「流れの世界」図 21 に示すように、長い水槽にまず塩水を注ぎその上に淡水層を作ってから、水槽全体を少し傾けると、重力の作用で塩淡水境界面を界に逆方向の流れができ、界面に一瞬にして K-H 波 (billow という) が発生して二つの層の混合が起こる。

18.5 テイラー渦とゲルトラー渦

中心軸を共有する二つの同軸回転円筒間の狭い間隙の間の流れもまた、典型的な流体力学的安定の問題である。

図 18.18 は、円筒間の流れを軸方向から見た図である。いま、外側の円筒を静止させ、内側の同筒のみを回転させる。また、二つの円筒間の間隙は円筒の径に比べて小さいものとすれば、円筒間の流れは単純な剪断流 (クエット流) となり、これが基本流である。流れの中のある粒子塊を考えれば、この粒子塊には遠心力

V^2/r が外向きに働いており、これとバランスするように周囲の流体の圧力の合力 ($\partial p/\partial r$) が内向きに作用している。

いまなんらかの原因で、この流体塊が外側(あるいは内側)にほんの少し δr だけ移動したとしよう。流体塊は慣性によりもとの位置の流速で円周方向に運動するが、周囲の圧力はもともとその位置 ($r+\delta r$) にいた流速 $V(r)+(dV/dr)\delta r$ で円運動する流体塊に働く遠心力

$$\frac{(V+V'\delta r)^2}{r+\delta r} \approx \frac{V^2}{r} + \frac{2VV'\delta r}{r}$$

とつりあうように働くから、差し引き ($2VV'/r$) δr だけ周囲の圧力が変化する。

いま、内側円筒が回転し外側円筒は静止していると仮定したから $V' < 0$ である。したがって、もし流体がほんの少し外側に移動したのなら、この流体塊に働く遠心力と周囲の圧力のアンバランスの結果、内向きの力が減少し流体塊はますます外側に移動しようとする。逆に、流体塊が内側にほんの少し移動しても、ますますその移動を助長するようになる事情は同じである。つまり、内側の円筒が外側の円筒より速く回転している場合、その間隙の流れは常に不安定である。実際には、流体塊の移動を妨げる力として粘性力が考慮されなければならない。また、円筒壁で半径方向の流れは上または下に方向を変えなければならないので、

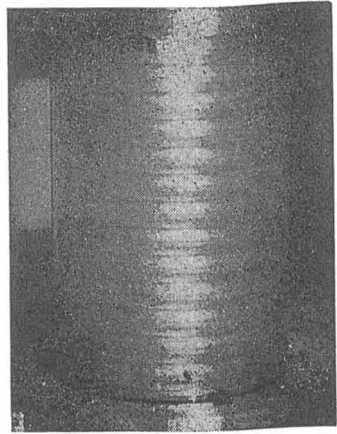


図 18.17 テイラー渦

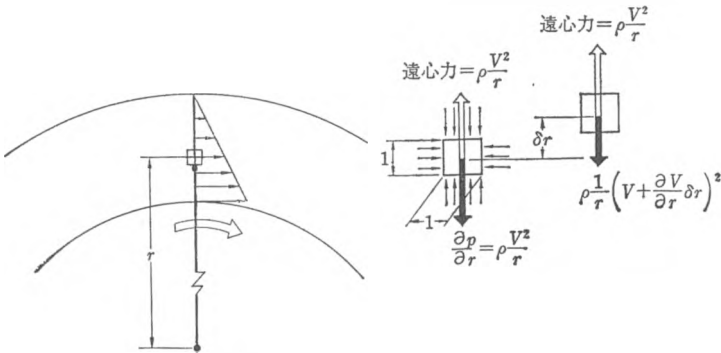


図 18.18 テイラー渦およびゲルトラー渦発生のメカニズム

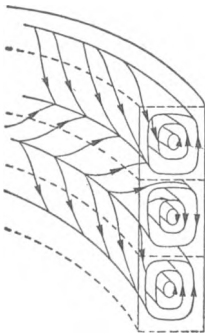


図 18.19 同軸回転円筒間の渦細胞

円筒の軸を含む断面でみると、図 18.19 のような細胞構造となる。軸方向の細胞の長さ(波長)がどうなるかは § 18.2 に述べたと同様な考え方によりどの波長で一番擾乱の不安定性が高いかの計算をすればよい。(なお、この問題は流体の輪の角運動量保存則からも説明することができる。)

この問題はテイラー (Taylor, 1923) により最初に解かれたので、この渦細胞をテイラー渦と呼ぶ。ここでは、外側の円筒が静止しているとしたが、二つの円筒がともに回転している一般的な場合についても取り扱われている。図 18.20 はその理論結果と実験結果である。(ここに、 R は円筒半径、 Ω は回転角速度、添字 1, 2 はそれぞれ同軸円筒の内側と外側を意味する。)

凹型曲面に沿う流れにも全く同じ原理によって流れ方向に軸をもつ交互に逆方向に回転する縦渦構造が形成される。この渦をゲルトラー (Goertler, 1940)

渦と呼ぶ。また、この種の不安定をテイラー-ゲルトラー型不安定と称すること

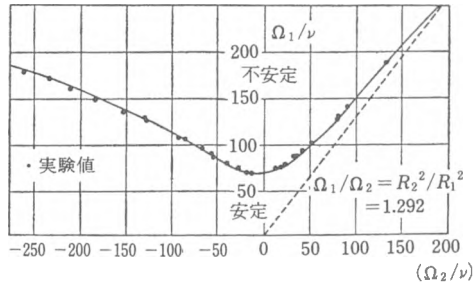


図 18.20 テイラー渦の発生限界

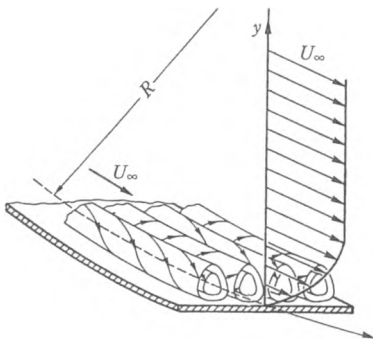


図 18.21 ゲルトラー渦 (Goertler, 1940)

で層流状態に留まり、やがて乱流となる流れの例としては、熱による対流現象などがある。

円筒の回転数をさらに上げて行くときに見られる渦細胞の複雑な挙動は、流体におけるカオス現象の典形である。

がある。

テイラー渦は、前に述べた層流境界層や二流体の境界面の不安定とは異なり、不安定擾乱の成長がすぐには乱流への遷移とならず、より複雑な別の安定した層流状態に変わるだけである。このように基本流の不安定により、別の安定層流へと移行し、その現象を支配するパラメーターの広い範囲

で層流状態に留まり、やがて乱流となる流れ

寺田寅彦

(1878~1935)

たいぶ以前のことであるが、ある学会の総会の記念講演で「流体力学の巨人達」という題の話をしたところフロア（聴衆者の一人）から「日本人の流体力学への貢献はどうか」という質問があった。私は「いまお話ししたのは1930年くらいまでのことであって、日本人が流体力学の分野で活躍するのはこれ以後のことです」と答えておいた。河川・港湾技術にまで流体力学の範囲を広げると、江戸時代やそれに先立つ戦国時代にも優れた独自の業績をあげた人々をあげることができるが、正統的意味での流体力学者の活躍はやはりもう少し後の時代になってからである。事実、1940年に刊行された名著「流体力学」（共立出版）の序文において著者の友近晋先生は、「欧米における同時代のテイラー、ゴールドシュタイン、プラントル、トルミエン、シュリヒティン、カルマンら多士済々の活躍に比べ、わが国の流体力学研究者の層の薄さ」を嘆いている。そして、「わが国における流体力学的研究が外国のそれに比べて遜色のないようなものになる日の一日も速く到来せんことを希望」している。



ところで、1974年にドイツのカールスルーエ大学（現在ドイツにおいて流体力学特に水理学の研究が最も盛んな大学で、四つの流体力学系研究所をもつ）のナウダッシャ（Naudascher）教授が主催した水力弾性振動（flow-induced structural vibration）に関する国際会議に出席したときのフェアウェル・ディナーの席上、たまたま隣に座ったイギリス人から「自分は原子力工学者で流体力学のことはあまり知らないが、日本人の流体力学者の名前をただ一つ知っている。その名はテラダだ」と話しかけられた。私は当時活躍中の研究者をあれこれ思い浮かべたが、どうしてもテラダという名の著名な研究者は思いつかなかった。それでよくよく尋ねてみたら対流の研究者だというので、それなら彼のいうテラダは寺田寅彦のことだとわかった。その研究は下面を熱した平行平板の間に流体を流すと流れの方向に軸をもつ回転方向が交互に変わる縦渦が発生するというもので、戦前の1927年（昭和2年）に行われたものである¹⁾。対流現象としてはよく知られた代表的なものであるが、当り前になりすぎて、現在ではむしろ最初の発見者が寺田寅彦であることが忘れられがちである。流力的不安定による対流を扱った Chandrasekhar の大著（1961）にも、密度流現象を広く紹介した Turner（1973）の著書にも Terada の論文の引用はない（Chandrasekhar の p. 342 に Terada and Hattori（1926）が単に関連

文献としてあげられているが、これはテイラー渦に関する文献。

寺田の流体力学におけるいま一つの業績としては、江戸初期の土佐藩の家老であり、また優れた河川・港湾技術者でもあった野中軒山が築港した港を改修したところかえって港の機能が低下したことにヒントを得て1907—08(明治40—41年)に行われた研究²⁾がある。この研究は港湾に防波堤を設置するとかえって湾内の波高が高まることもあることを理論的に示したものである。この理論は後に Miles & Munk が1961年に発表した“Harbor Paradox”の理論(Proc. ASCE, J. Waterways and Harbors Div., vol. 87, no. WW3)にはかならず、彼らに先立つこと50年以上も前である。後に椎貝博美氏³⁾(筑波大)がMITのIppen先生に Harbor Paradox についてはすでに寺田の理論があることを紹介したところ、Terada (1962)として引用されたということである。1907年という早い時期に日本人がこういう立派な仕事をしたとは信じられず、1962(0は6に、7は2に似ている)のミスプリントと思ったのであろうか。あるいは1961年の Miles and Munk の先であるはずがないとも思ったのであろうか。

さて、寺田寅彦の名はよく知られているが一応簡単に紹介すると、彼は1878年(明治11年)土佐(高知県)出身者を父母として東京に生まれ、熊本の第五高等学校(ここで英語の教師をしていた夏目漱石の弟子となり、知遇を受ける)を経て、東京帝国大学へすすんだ。その後、東京帝大教授(物理学科、後に東大地震研究所)を務め、同付属航空研究所および戦前の日本における科学研究のメッカであった理化学研究所の職を兼務した。そして1935年(昭和10年)12月58歳で病没。今日からみるとあまりにも早い死であった。

彼は文豪・夏目漱石を取り巻く漱石山脈の主要なメンバーとして漱石の信頼も厚く、「わが輩は猫である」の理学士水島寒月のモデルといわれる。「猫」の中に日中の震動を避けて深夜ガリバナメーターを使って寒月が実験をする話があるが、これは漱石が寅彦から聞いた話を折り込んだものであろう。また「三四郎」の中の田舎から上京した主人公(野々宮宗八)の中にも寅彦のキャラクターの射影を見ることができる。寺田寅彦は優れたエッセイストとしても著名であり、広い寅彦ファンもっている。彼のこの面での著作に刺激されて、科学の道へとすすんだ人も少なくない。

彼の若い頃の業績には学士院恩賜賞を受賞した(1917, 大正6)ラウエ写真による結晶構造の研究のような当時の物理学の最先端をゆく研究があるが、やがて彼の研究の対象は地学的自然現象や身近の事象の方へと重点が移っていった。旧日本海軍の飛行船が飛行中に霞ヶ浦上空で炎上爆発した事故の原因調査として行われた放電によるガス爆発の研究、関東大震災のときの下町の火災の原因を解明しようとした火事や火災旋風の研究、海鳴りの研究、割れ目の研究、偶然現象の周期性の研究、地球磁気の脈動の研究、魚群探知機の着想等々である。また、寺田は、1960年代から地球物理学に革命を起こしたプレートテクトニクスの魁ともなったウェーゲナー(1912)の大陸漂移説を最も早く全面的に認めていた。(もっともウェーゲナー説は発表当時こそ話題になったものの当時の地球物理学のオーソリティー達の総反撃を食い、またウェーゲナー自身が北極圏グリーンランドの調査で事故死したこともあり、間もなく学界からは長い間異端視され忘れられることになる。)多くの俊

才を育て、科学愛好者を増やしたにもかかわらず、彼の研究はいわゆる正統派の物理学者達からは「小屋掛けの物理学」と冷笑されてきたのは残念なことである。

「災害は忘れた頃にくる」という言葉は彼の警句として知られているが、彼の著作にその文はないとのことである。しかし、この言葉は観察の深い名文家であった彼の言にいかにもふさわしい。

1) Terada, T. and Tamano, M. (1930) : Further studies on periodic columnar vortices produced by convection, *Proc. Imp. Acad.*, **VI**, 150.

1a) Terada, T. (1927) : Formation of periodic columnar vortices by convection, *Proc. Imp. Acad.*, **III**, 503.

1b) Terada, T. and Tamano, M. (1929) : Further researches on periodic columnar vortices produced by convection, *Rep. Aeron. Res. Inst.*, **IV**, 477.

1c) 寺田寅彦・玉野光男 (1929) : 対流に因る周期的柱状渦の生成に関する実験, 航空研究所彙報, **6**, 715.

2) Honda, K., Terada, T., Yoshida, Y. and Ishitani, D. (1908) : Secondary undulations of oceanic tides, *J. of College of Science, Imperial University*, **24**, 1.

2a) — (1907) : On the secondary undulations of oceanic tides (An abstract), *Proc. Tokyo Math. Phys. Soc.*, **IV**, 79.

2b) — (1908) : *Philosophical Magazine*, **XV**, 88.

2c) — (1908) : On the secondary undulations of oceanic tides, *Publ. Earthq. Inv. Com.*, **XXVI B**, 1.

3) 椎貝博美 (1982) : 土木学会誌, 12月号, 77-79.

注) 底面を水平にしておいた容器に浅く液体を満たし、底面を一樣に加熱するときに、(対流)セルによる規則的な平面模様が見られることは、ベナール (Bénard, 1900) により発見された。これを Bénard cell (または convection) という。しかし、ベナールの実験の場合には自由表面における表面張力の変化の影響が支配的であることが最近明らかにされた。

水平な流体層の下面を高温に上面を低温に保つときに浮力の効果によって発生する規則的な対流セルに関する微小攪乱不安定理論は、レイリー (1916) により提出された。それゆえ、この種の対流現象は、レイリー-ベナール型対流と呼ばれ、非線形領域でのカオス的な振舞いが最近の流体力学の対象となっている。

地球物理学・地質学を一新したプレートテクトニクスにおけるプレート移動の原動力として、マグマ内のレイリー-ベナール対流が考えられている。なお最近では、プレート自身の重さを沈み込みの原動力と考えるテーブル・クロス説が有力である。