

11. 平板に沿う層流境界層方程式の ブラジウス解

11.1 境界層方程式の解析解

プラントル (1904) により導入された境界層方程式を具体的に解くことは、ブラジウス (1908) により一様流中の平板に沿う流れについて行われた。定常な一様流中に流れに沿っておかれた平板上の層流境界層方程式および境界条件は次式のようなのである。

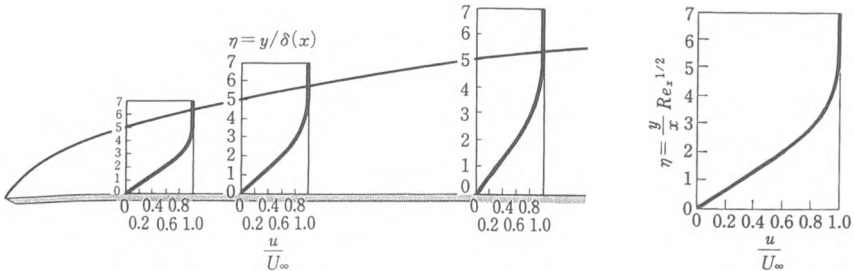
$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (11.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (11.2)$$

$$u = v = 0 \quad (y = 0) \quad (11.3)$$

$$u = U_\infty \quad (y = \infty) \quad (11.3 a)$$

プラントルの境界層方程式 (11.1), (11.2) はナビエ-ストークスの方程式に比べて単純化され、2変数に関する2方程式である。とはいうものの、第一式 (運動方程式) (11.1) は依然として非線型偏微分方程式であり、流体運動における数



(a) 流れに平行におかれた平板上の境界層の発達と流速分布

(b) 無次元流速分布——相似性により一本の分布曲線となる

図 11.1

学的呪詛から逃れられない。そこで、境界層方程式を導くに当たって物理的考察を行ったと同様に、方程式の解法についても物理的考察を行い、有効な解法を見出すことにしよう。ブラジウスの解は、次のような考え方により組み立てられている。

• 流速分布の相似性の仮定により、独立変数 x, y を一つの変数 $\eta = y/\delta(x)$ にまとめる。

• 流関数 ψ の導入により、従属変数 u, v を一つの従属変数 Ψ にまとめて、偏微分方程式を常微分方程式に直す。

• 得られた非線型常微分方程式の非線型二点境界値問題を解く。これには、壁近くでは、級数展開法により解を求める。ただし、級数解の収束範囲では積分に当たって必要な三つの境界条件のうち、二つしか壁面上で与えられていないので、この形の解は一つの未定数を含む。壁面より遠い所では、一種の摂動近似による漸近解を求め、最後に、級数展開解と摂動解を中間領域で接続させる。

具体的な手続きは以下のようにすすめる。

(i) 常微分方程式化：すでにレイリー問題 (§8.4) で述べたように、粘性の影響は流体が壁の存在を感知してからの経過時間 t と動粘性係数 ν に関係し、 $\sqrt{\nu t}$ だけ遠方に伝わる。したがって、流体が平板の先端から距離 x だけすすんだ場所では、壁の影響は粘性により $\delta \sim \sqrt{\nu x/U_\infty}$ 程度外側に及んでいるであろう (注 11.1)。さらに、レイリー問題でこの長さ δ に関して流速分布の無次元表示ができたと同じように、境界層内の流速分布も、境界層外縁の流速と境界層厚さを基準として

$$\frac{u}{U_\infty} = f_n\left(\frac{y}{\sqrt{\nu x/U_\infty}}\right) \quad (11.4)$$

あるいは

$$\frac{u}{U_\infty} = f_n(\eta) \quad (11.5)$$

$$\eta = \frac{y}{\sqrt{\nu x/U_\infty}} = \frac{y}{x} Re_x^{1/2} \quad (11.6)$$

$$Re_x = \frac{U_\infty x}{\nu} \quad (11.7)$$

のように仮定することができるであろう。この仮定により独立変数を x, y から η 1 個だけに減らすことができる。

流速分布が無次元距離 η に関して表示しうることより、流関数もまた η のみの関数を含むであろうと考えられる。事実、 $u = \partial\Psi/\partial y$ であるから式 (11.5) を y に関して積分すれば

$$\begin{aligned}\Psi &= \int u \, dy + c(x) = U_\infty \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \int f_n(\eta) \, d\eta + c(x) \\ &= \sqrt{\nu U_\infty x} \int f_n(\eta) \, d\eta + c(x)\end{aligned}\quad (11.8)$$

となる。上式を $v = -\partial\Psi/\partial x$ に代入すれば、 $y=0$ で $v=0$ の条件が満たされるためには $c(x)=0$ とすればよいことがわかる。よって、 $\int f_n(\eta) \, d\eta$ を $f(\eta)$ と書けば、流関数 Ψ は次のように書ける。

$$\Psi(x, y) = \sqrt{\nu U_\infty x} f(\eta) \quad (11.9)$$

流関数の導入により従属変数も u, v の 2 個から $f(\eta)$ 1 個に減らすことができ、微分方程式も境界層の運動方程式 1 個となった。

流関数 Ψ (式 (11.9)) と新たな独立変数 η により、境界層方程式 (11.1) の各項を表すと、

$$\left. \begin{aligned}u &= \frac{\partial\Psi}{\partial y} = \frac{\partial\Psi}{\partial\eta} \frac{\partial\eta}{\partial y} = U_\infty f'(\eta) \\ v &= -\frac{\partial\Psi}{\partial x} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U_\infty}{x}} \{ \eta f'(\eta) - f(\eta) \} \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial\eta} \frac{\partial\eta}{\partial x} = -U_\infty f''(\eta) \frac{\eta}{2x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial\eta} \frac{\partial\eta}{\partial y} = U_\infty f''(\eta) \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{d}{d\eta} \left\{ U_\infty f''(\eta) \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \right\} \frac{\partial\eta}{\partial y} = \frac{U_\infty^2}{\nu x} f'''(\eta)\end{aligned}\right\} \quad (11.10)$$

これらの関係を、境界層の運動方程式 (11.1) に代入すれば、結局、解くべき微分方程式として

$$2f''' + ff'' = 0 \quad (11.11)$$

が得られる。

境界条件は、壁面における流速が零という条件と、壁面から十分遠い所では主流流速 U_∞ に漸近することより

$$\left. \begin{array}{l} \eta=0 : u=0 \quad \text{すなわち} \quad f'=0 \\ \quad \quad v=0 \quad \quad \quad f=0 \\ \eta=\infty : u=U_\infty \quad \quad \quad f'=1 \end{array} \right\} \quad (11.12)$$

である。

微分方程式 (11.1) は非常に単純化されて式 (11.11) となり、一見簡単に解けそうに見えるが、実はそれほど楽に解けるわけではない。なぜかといえば、一つには式 (11.11) の $f \cdot f''$ という項のため、この式には非線型性は相変わらず残っているし、また、境界条件が $\eta=0$ と ∞ という離れた二点で与えられているからである。後者は二点境界値問題といわれている。これらの難点を解決するためには、次に述べるように級数展開法と摂動法および解の接合という手法を使う。

(ii) 壁面近傍の解：まず、 $f(\eta)$ を壁面 $\eta=0$ の点でべき級数に展開すると

$$\left. \begin{array}{l} f(\eta) = A_0 + A_1\eta + \frac{A_2}{2!}\eta^2 + \frac{A_3}{3!}\eta^3 + \dots \\ f'(\eta) = A_1 + A_2\eta + \frac{A_3}{2!}\eta^2 + \frac{A_4}{3!}\eta^3 + \dots \end{array} \right\} \quad (11.13)$$

などとなる。

$\eta=0$ での境界条件より、 $A_0=0$ 、 $A_1=0$ でなければならないことがわかる。 $f(\eta)$ のべき級数表示を式 (11.11) に代入し、 η の等べきの項ごとにまとめると

$$2A_3 + \eta 2A_4 + \frac{\eta^2}{2!}(A_2^2 + 2A_5) + \frac{\eta^3}{3!}(4A_2A_3 + 2A_6) + \dots = 0 \quad (11.14)$$

上式が成立するためには、 η^n ($n=1, 2, \dots$) の各項の係数が恒等的に 0 でなければならない。これより、 A_2 を残して各係数 A_n が次のように求まる。

$$\left. \begin{array}{l} A_3=0, \quad A_4=0 \\ A_5 = -\frac{1}{2}A_2^2, \quad A_6=0, \quad A_7=0 \\ A_8 = -\frac{11}{2}A_2A_5 = \frac{11}{4}A_2^3, \quad \dots \end{array} \right\} \quad (11.15)$$

式 (11.13) の形の解は $\eta \rightarrow \infty$ まで延ばせないから、そこでの境界条件に対応する未定数として $\alpha = A_2$ を含んで、 f は次のように表される。

$$f(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{\alpha^{n+1} C_n}{(3n+2)!} \eta^{3n+2} \quad (11.16)$$

ここに、

$$C_0=1, \quad C_1=1, \quad C_2=11, \\ C_3=375, \quad C_4=27, 897, \quad C_5=3, 817, 137$$

(iii) 無限遠での漸近解：次に $\eta = \infty$ での漸近解として、 f を摂動表示する。すなわち、あるパラメーター ε のべきに関して f を次のように表現する（一般に ε には式に含まれる微小定数をとるが、ここではこのような補助定数がないので、 ε を単に漸近解の次数識別の目印と考え、最後の段階で $\varepsilon \rightarrow 1$ とする）。

$$\left. \begin{aligned} f &= f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \varepsilon^3 f_3 + \dots \\ f'' &= f_0'' + \varepsilon f_1'' + \varepsilon^2 f_2'' + \varepsilon^3 f_3'' + \dots \\ f''' &= f_0''' + \varepsilon f_1''' + \varepsilon^2 f_2''' + \varepsilon^3 f_3''' + \dots \end{aligned} \right\} \quad (11.17)$$

ここに、 f_i は η に関する未知関数である。(ii) の級数解では級数の係数 A_i を求めることが問題であったが、漸近解ではまず第 0 近似解 f_0 がわかったとして、それに対する補正の未知関数 $f_0(\eta) > f_1(\eta) > f_2(\eta) > f_3(\eta) > \dots$ を次々と求める問題となる。

これらの関係式 (11.17) を式 (11.11) に代入して、 ε の等べきの項ごとにまとめると $\varepsilon^0(2f_0''' + f_0'''f_0) + \varepsilon(2f_1''' + f_1'''f_0 + f_1f_0''') + \varepsilon^2(\dots) + \dots = 0$ となる。ここで、 ε の等べきの各項を 0 とおく。なぜならば、これらの各項は大きさ（オーダー）が違って、相互に比較や差し引きができないから。その上、この展開式はなるべく少ない項数で打ち切ってしまいたいからである。したがって、

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon^0 &: 2f_0''' + f_0'''f_0 = 0 \\ \varepsilon^1 &: 2f_1''' + f_0f_1'' + f_0''f_1 = 0 \\ \varepsilon^2 &: 2f_2''' + f_0f_2'' + f_0''f_2 = -f_1^2 \end{aligned} \right\} \quad (11.18)$$

を得る。 f が η が大きい所での流関数であり、 $\eta \rightarrow \infty$ で $f' = 1$ ($u \rightarrow U_\infty$) となることを考慮すれば、上の第一式を満たす第 0 近似の関数 f_0 として、

$$f_0 = \eta - \beta \quad (11.19)$$

ととるのが適当であろう。これを f_1 に関する微分方程式に代入すれば

$$\begin{aligned} 2f_1''' + (\eta - \beta)f_1'' &= 0 \\ \frac{f_1'''}{f_1''} &= \frac{1}{2}(\beta - \eta) \end{aligned} \quad (11.20)$$

これを積分すれば

$$\ln f_1'' = \frac{1}{2}\beta\eta - \frac{1}{4}\eta^2 + c \quad (11.21)$$

となる。 γ を新たな積分定数として $c = -\beta^2/4 + \ln \gamma$ と書けば、 f_1'' は

$$f_1'' = \gamma e^{-(1/4)(\eta-\beta)^2} \quad (11.22)$$

となる。境界条件

$$f'(\infty) = f_0'(\infty) + f_1'(\infty) + \dots = 1 + f_1'(\infty) + \dots = 1 \quad (11.23)$$

すなわち

$$f_1'(\infty) = 0 \quad (11.23a)$$

を考へて f_1'' をもう一度積分すれば

$$f_1' = -\gamma \int_{\eta}^{\infty} e^{-(1/4)(\eta-\beta)^2} d\eta \quad (11.24)$$

となる。上式をさらに積分し、 f_0 との和を作れば (もともと $\varepsilon=1$ であるから)、 $f(\eta)$ は次のようになる。

$$f(\eta) = \eta - \beta + \gamma \int_{\eta}^{\infty} d\eta \int_{\eta}^{\infty} e^{-(1/4)(\eta-\beta)^2} d\eta \quad (11.25)$$

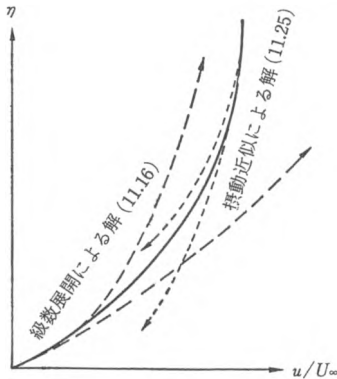


図 11.2 解の接合

さらに漸近解の精度を高めるには、 f_2 を求めればよいが、実用上その必要はほとんどない。

(iv) 解の接合: $\eta = \infty$ では一つの境界条件しか与えられていないから、残る二つの未知の境界条件に対応して、解 (11.25) は二つの積分定数 β, γ を含んでいる。この解は η の大きな範囲で成立するもので β, γ をいろいろ変えるとさまざまな曲線となる。一方、式 (11.16) は η の小さな所でしか成立しない

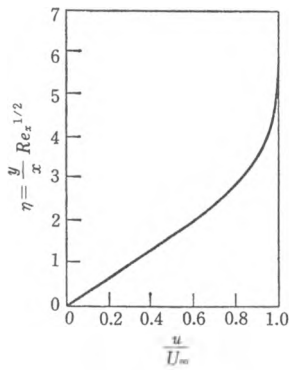
$$\alpha = 0.332, \quad \beta = 1.73, \quad \gamma = 0.231 \quad (11.26)$$

である。解の精度を高めることはブラジウス以後多くの人々により試みられている。表 11.1 にハワース (Howarth) により求められた流関数 f 、流速 $f' = u/U_{\infty}$ 、および f'' の値を載せる。

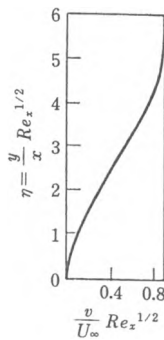
式 (11.10) より η と f, f' の表を用いて、流速の y 成分 v が計算される。図

表 11.1 L. Howarth による f, f', f'' の表

| $\eta = y \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}$ | f | $f' = \frac{u}{U_\infty}$ | f'' | $\eta = y \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}$ | f | $f' = \frac{u}{U_\infty}$ | f'' |
|--|---------|---------------------------|---------|--|---------|---------------------------|---------|
| 0 | 0 | 0 | 0.33206 | 4.6 | 2.88826 | 0.98269 | 0.02948 |
| 0.2 | 0.00664 | 0.06641 | 0.33199 | 4.8 | 3.08534 | 0.98779 | 0.02187 |
| 0.4 | 0.02656 | 0.13277 | 0.33147 | 5.0 | 3.28329 | 0.99155 | 0.01591 |
| 0.6 | 0.05974 | 0.19894 | 0.33008 | 5.2 | 3.48189 | 0.99425 | 0.01134 |
| 0.8 | 0.10611 | 0.26471 | 0.32739 | 5.4 | 3.68094 | 0.99616 | 0.00793 |
| 1.0 | 0.16557 | 0.32979 | 0.32301 | 5.6 | 3.88031 | 0.99748 | 0.00543 |
| 1.2 | 0.23795 | 0.39378 | 0.31659 | 5.8 | 4.07990 | 0.99838 | 0.00365 |
| 1.4 | 0.32298 | 0.45627 | 0.30787 | 6.0 | 4.27964 | 0.99898 | 0.00240 |
| 1.6 | 0.42032 | 0.51676 | 0.29667 | 6.2 | 4.47948 | 0.99937 | 0.00155 |
| 1.8 | 0.52952 | 0.57477 | 0.28293 | 6.4 | 4.67938 | 0.99961 | 0.00098 |
| 2.0 | 0.65003 | 0.62977 | 0.26675 | 6.6 | 4.87931 | 0.99977 | 0.00061 |
| 2.2 | 0.78120 | 0.68132 | 0.24835 | 6.8 | 5.07928 | 0.99987 | 0.00037 |
| 2.4 | 0.92230 | 0.72899 | 0.22809 | 7.0 | 5.27926 | 0.99992 | 0.00022 |
| 2.6 | 1.07252 | 0.77246 | 0.20646 | 7.2 | 5.47925 | 0.99996 | 0.00013 |
| 2.8 | 1.23099 | 0.81152 | 0.18401 | 7.4 | 5.67924 | 0.99998 | 0.00007 |
| 3.0 | 1.39682 | 0.84605 | 0.16136 | 7.6 | 5.87924 | 0.99999 | 0.00004 |
| 3.2 | 1.56911 | 0.87609 | 0.13913 | 7.8 | 6.07923 | 1.00000 | 0.00002 |
| 3.4 | 1.74696 | 0.90177 | 0.11788 | 8.0 | 6.27923 | 1.00000 | 0.00001 |
| 3.6 | 1.92954 | 0.92333 | 0.09809 | 8.2 | 6.47923 | 1.00000 | 0.00001 |
| 3.8 | 2.11605 | 0.94112 | 0.08013 | 8.4 | 6.67923 | 1.00000 | 0.00000 |
| 4.0 | 2.30576 | 0.95552 | 0.06424 | 8.6 | 6.87923 | 1.00000 | 0.00000 |
| 4.2 | 2.49806 | 0.96696 | 0.05052 | 8.8 | 7.07923 | 1.00000 | 0.00000 |
| 4.4 | 2.69238 | 0.97587 | 0.03897 | | | | |



(a)



(b)

図 11.3 平板上の境界層内の無次元流速分布

11.3 に無次元流速分布のグラフを載せた。壁面に垂直な方向の流速成分 v は境界層の外縁でも 0 ではなく、

$$v_{\infty} = 0.8605 U_{\infty} \sqrt{\frac{\nu}{x U_{\infty}}} \quad (11.27)$$

である。これは、壁面に沿う境界層が下流に行くにつれて厚くなり、流体が外方に排除されるためと解釈される。流れの方向に平行におかれた平板は、周囲のポテンシャル流れに対しては薄い楔のように働く。

11.2 境界層方程式の数値解

この問題は境界条件が初めと終わりの二つの境界に分かれて与えられている。この種の問題は数学的には非線型二点境界値問題といわれるものである。二点境界値問題でも、問題が線型ならば適当な初期値問題の解を重ね合わせるにより解が求められるから特に困難さはない。しかし、非線型問題では境界条件の一部が欠落している一方の境界から、初期値問題として積分を行って重ね合わせにより解を求めるわけにはいかない。非線型二点境界値問題の解法には、準線型化法 (quasilinearization) や不変埋め込み法 (invariant imbedding) があるが、平板に沿う境界層の問題の場合の数値解はより容易に次のように求められる。

いま、 $F(\eta)$ がブラジウスの微分方程式 (11.11) の解であるとする。ただし、 $\eta \rightarrow \infty$ における第三の境界条件 $F'(\infty) = 1$ は用いず、

$$F''(0) = 1 \quad (11.28)$$

を $\eta = 0$ での初期条件に加えてある。このとき、

$$f(\eta) = aF(a\eta) \quad (a: \text{任意の定数}) \quad (11.29)$$

もまた式 (11.11) の解である。

ところで、 $\eta \rightarrow \infty$ における f' , F' の間には

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} f'(\eta) = a^2 \lim_{\eta \rightarrow \infty} F'(a\eta) = a^2 \lim_{\eta \rightarrow \infty} F'(\eta) \quad (11.30)$$

の関係がある。それゆえ、 $\eta \rightarrow \infty$ における第三の境界条件 $f'(\infty) = 1$ を満たすための a は

$$a = \left\{ \lim_{\eta \rightarrow \infty} F'(\eta) \right\}^{-1/2} \quad (11.31)$$

である。一方、式 (11.29) より

$$f''(0) = a^3 F''(0) \quad (11.32)$$

したがって、 $f'(\infty)=1$ を満たすための第三の初期条件は式 (11.32) に式 (11.28) および式 (11.31) を代入し

$$f''(0) = \{F'(\infty)\}^{-3/2} \quad (11.33)$$

である。以上のことから、微分方程式 (11.11) の数値解は次の 2 ステップで求められる。

(i) 初期条件

$$F(0) = F'(0) = 0, \quad F''(0) = 1 \quad (11.34)$$

のものと解を η の十分大きな範囲にまで求める。これより定数 a が式 (11.31) より求まる。

(ii) 次に初期条件

$$f(0) = f'(0) = 0 \quad (11.35 a)$$

$$f''(0) = \{F'(\infty)\}^{-3/2} \quad (11.35 b)$$

より、境界条件 (11.12) を満たす式 (11.11) の数値解を直接的に求める。

もっとも、すでに求めた $F(\eta)$ から式 (11.29) で $f(\eta)$ に変換してもよい。

11.3 境界層厚さ

流速 u が主流 U_∞ の 99% に達する位置で境界層厚さ $\delta(x)$ を定義し、

$$\frac{u}{U_\infty} = f'(\eta) = 0.99 \quad (11.36)$$

となる無次元高さ η を表 11.1 より求めると、 $\eta = 4.91 \approx 5.00$ である。したがって、式 (11.6) より

$$\begin{aligned} \delta(x) &\approx 5.0 \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \\ &= 5.0 x Re_x^{-1/2} \end{aligned} \quad (11.37)$$

あるいは

$$Re_\delta = 5.0 Re_x^{1/2} \quad (Re_\delta = U_\infty \delta / \nu) \quad (11.38)$$

境界層厚さは流れの下流方向への距離 x の 1/2 乗に比例して増加する。また、流速 U_∞ の 1/2 乗に逆比例して成長し、流速が速いほど境界層厚さは薄くなる。

実験より境界層の厚さを求めようとする場合には、上のような定義ではあいまいさが伴うし、物理的意味もはっきりしないので、次のような排除厚さ δ^* や運動量厚さ θ を境界層厚さの尺度として使用することが多い。

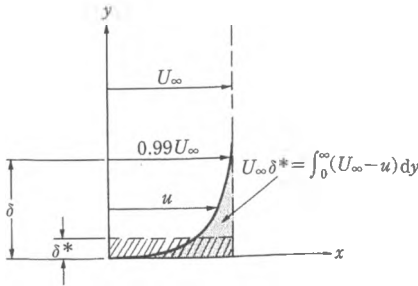


図 11.4

(1) 排除厚さ δ^* 壁面近くでは粘性の作用のためポテンシャル流に比べて流速が遅くなっており、そのため壁面に垂直な面を通る流量は単位幅あたり

$$\Delta q = \int_0^{\infty} [U_{\infty} - u(y)] dy \quad (11.39)$$

だけ少なくなっている。 $\Delta q = U_{\infty} \delta^*$ とおけば、これは、壁面がある距離 δ^*

$$\delta^* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U_{\infty}}\right) dy \quad (11.40)$$

だけ外側にせり出したためとみなしうる。この長さ δ^* を排除厚 (displacement thickness) という。式 (11.6), (11.10) より、 δ^* は

$$\begin{aligned} \delta^* &= \sqrt{\frac{\nu x}{U_{\infty}}} \int_0^{\infty} [1 - f'(\eta)] d\eta \\ &= \sqrt{\frac{\nu x}{U_{\infty}}} [\eta - f(\eta)]_{\eta=0}^{\infty} \end{aligned} \quad (11.41)$$

ところが、漸近解より $f(\eta) = \eta - \beta + f_1(\eta)$ であるから、式 (11.23 a) を考慮すれば、 $[\eta - f(\eta)]_{\eta=\infty} = [\beta - f_1(\eta)]_{\eta=\infty} = \beta = 1.73$ である。したがって、

$$\delta^* = \beta \sqrt{\frac{\nu x}{U_{\infty}}} = 1.73 \sqrt{\frac{\nu x}{U_{\infty}}} \quad (11.42)$$

$$= \frac{1.73x}{Re_x^{1/2}} \quad (11.42 a)$$

式 (11.37) と式 (11.42 a) より、99%境界層厚さと排除厚の比は約3である。

$$\delta^* \cong 0.35\delta \quad \text{または} \quad \delta = 2.9\delta^* \quad (11.43)$$

(2) 運動量厚さ 同様にポテンシャル流に比べて境界層内での運動量の欠損率は $\rho \int_0^{\infty} u(U_{\infty} - u) dy$ で表される。したがって、これを ρU_{∞}^2 で割って、運動量厚さ θ (momentum thickness) が定義される。

$$\theta = \int_0^{\infty} \frac{u}{U_{\infty}} \left(1 - \frac{u}{U_{\infty}}\right) dy \quad (11.44)$$

$$= \sqrt{\frac{\nu x}{U_{\infty}}} \int_0^{\infty} f'(1 - f') d\eta \quad (11.45)$$

あるいは、

$$\begin{aligned}\theta &= 0.664 \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \\ &= \frac{0.664x}{Re_x^{1/2}}\end{aligned}\quad (11.46)$$

11.4 壁面に働く粘性摩擦力

壁面での剪断応力 $\tau_0(x)$ は、式 (11.10) と式 (11.16) を用いて

$$\tau_0(x) = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \rho \nu U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} f''(0) \quad (11.47)$$

$$= \alpha \rho U_\infty \sqrt{\frac{\nu U_\infty}{x}} \quad (\alpha = 0.332) \quad (11.48)$$

となる。無次元の局所摩擦係数 c_f を

$$\tau_0 = c_f \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 \quad (11.49)$$

により定義すれば、

$$c_f = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}} \quad (11.50)$$

あるいは、式 (11.38) により

$$c_f = \frac{3.32}{Re_x} \quad (11.51)$$

となる。ここに、

$$Re_x = \frac{U_\infty x}{\nu}, \quad Re_\delta = \frac{U_\infty \delta}{\nu} \quad (11.52)$$

長さ l 、幅 b の平板の片面に働く摩擦抵抗 $D(l)$ はこれを片面全体にわたって積分して

$$D(l) = b \int_0^l \tau_0 dx = \alpha \mu b U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu}} \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{x}} \quad (11.53)$$

$$\begin{aligned}&= 2\alpha b U_\infty \sqrt{\mu \rho l U_\infty} \\ &= 0.664 b \sqrt{\mu \rho l} \cdot U_\infty^{3/2}\end{aligned}\quad (11.54)$$

式 (11.54) とクリーピング流れの結果を比較すると、後者では平板の抵抗力が流速 U_∞ に比例するのに反し、層流境界層の抵抗は流速 U_∞ の $3/2$ 乗に比例している。また、それは板長の $1/2$ 乗に比例している——すなわち、平板の先端より遠去かるにつれて境界層は厚くなり、壁面での剪断応力は減少する。平板全面

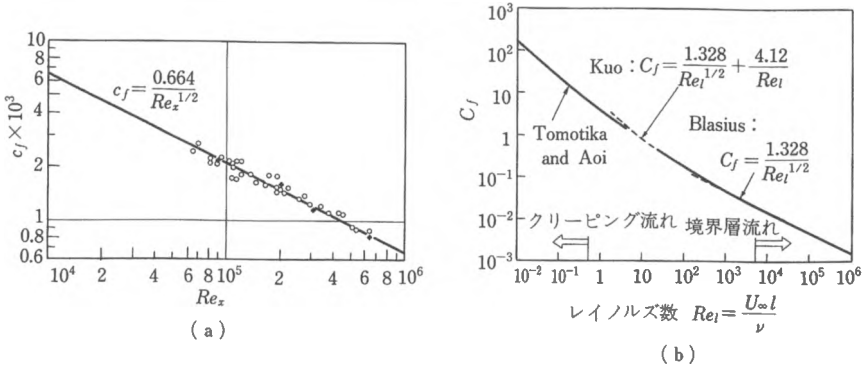


図 11.5 平板に働く摩擦抵抗とレイノルズ数の関係 (Daily-Harleman, Addison-Wesley より)

に対する無次元の抵抗係数を

$$C_f = \frac{D(l)}{(1/2)\rho A U_\infty^2} \quad (A=bl) \quad (11.55)$$

により定義すれば,

$$C_f = \frac{1.328}{\sqrt{Re_l}} \quad (11.56)$$

となる。ここに、 $Re_l = U_\infty l / \nu$ 。

境界層理論の適用範囲

式 (11.50), (11.56) が成立するのは、決して層流域の全体ではない。平板の先端から ν/U のオーダーの距離の範囲内 (レイノルズ数 $Ux/\nu \leq 1$) では、境界層の厚さ δ は距離 x に比例して増加するので、境界層理論は成立しない。プラントルの境界層の仮定が許容しうるのは、あくまでも $\delta \ll x$ あるいは $\delta \ll l$ となる範囲の $Re_l = 10^3 \sim 5 \times 10^5$ である。 Re_l がこの範囲より大きいと第 16 章に述べる乱流境界層の理論により解が導かれ、 Re_l が小さいクリーピング流れの領域では球の抵抗のストークス解的な方法により抵抗係数が求められる。

(注 11.1) プラントルの境界層とレイリー問題

一様な流れの中に平行におかれた平板上の流れは、模型的には次のような流れと考えることができる。無限に広い領域の一様な流れの中に、突然ある時刻 $t=0$ に流れに平行に無限に長い平板が挿入された場合、あるいはこのような流れの中に粘性による摩擦の働かない平板が存在し、ある時刻から突然粘性が作用し始めると考えよう。このとき、平板上では流れの速度は急に零となり、次第にその効果が粘性の拡散作用によって平板から遠方に及んでいく。これは境界条件を変え

たレイリー問題 (§ 8.4) にほかならない。レイリー問題の基礎方程式は線型であるから、解の重ね合わせが可能である。つまり、一様流速 U_0 の流れと、平板が x 軸の負の方向に $-U_0$ の速度で動き出すときのレイリー問題の解 $-U_0(1-\text{erf } \eta)$ を重ね合わせると、一様流中の平板のレイリー問題の解は

$$u(\eta, t) = \text{erf } \eta = \text{erf}(y/2\sqrt{\nu t}) \quad (11.57)$$

となる。この式は平板による粘性の影響が徐々にポテンシャル流域に及ぶことを示している。

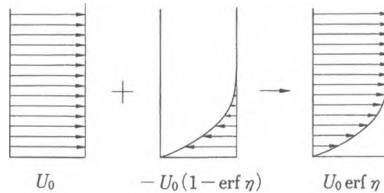


図 11.6

一様流中の半無限長さの平板上の流れでは、近似的にこの問題の独立変数である時間 t を流体が平板の存在を感知してからの経過時間 x/U_0 におき換えて

$$\eta = y/2\sqrt{\nu x/U_0} \quad (11.58)$$

とすればよいであろう。しかし、この考えは厳密には正しくない。

上述の議論から導かれたように、平板近傍の流れ（境界層流れ）の流速分布は確かに相似形となり、その無次元高さ η は上式に示すように $\sqrt{\nu x/U_0}$ に比例する境界層厚さと y との比で表される。しかし、流速分布形は上の簡単な類推から得られる $\text{erf } \eta$ ではないし、境界層厚さの発達程度も異なる。というのは、§ 9.3.a で指摘したように、レイリー問題は平行流で非線型加速度項 ($u\partial u/\partial x$, $v\partial u/\partial y$) を省略でき過度はもっぱら粘性の拡散作用によって行われたが、平板に沿う流れの問題ではこの項を無視しえず、渦度の移流効果が働くためである。参考のために、レイリー問題の流速分布と層流境界層の ($t=x/U_0$ とした場合の) 流速分布の比較 (a) と、 $u(y)=U_0/2$ となる y ($=\delta_{1,2}$) で無次元化した流速分布形の比較 (b) を図 11.7 に示す。同じように、平板に働く摩擦応力もすでに § 8.4 で指摘したように、レイリー問題の抵抗係数 c_f は一様流中の平板の境界層の c_f の値とはかなり異なり、その約 2 倍となる。このことは境界層厚さの発達の仕方に関連しており、次章に述べる境界層の運動量方程式による解の形 (式 (12.13))

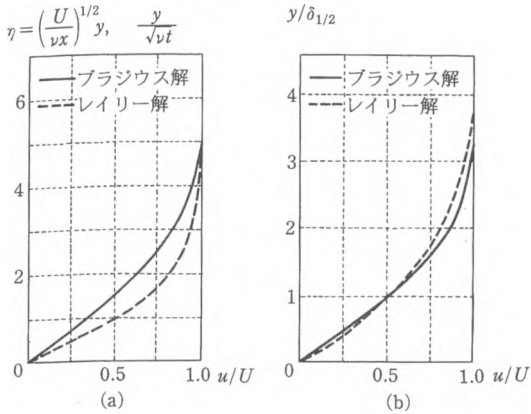


図 11.7

によっても理解しうる。

このように考えると、静止から急に動き始める無限平板上の流れの問題は、単にナビエ-ストークス方程式の厳密解が求まる例題の一つとだけ考えるべきではなく、流体力学を一新したプラントルの境界層概念に達する一里塚であったことがわかる。もっとも、プラントル自身が境界層概念を着想する際に、すでに1850年にストークスによって解が求められていた（後にレイリー問題と呼ばれることになる）この流れをどの程度思考の足がかりにしていたかは、私にはわからない。谷（1984）によれば、プラントルが大学卒業後勤めた工場で彼が設計した風洞の拡散筒が不具合で、その原因である流れの剝離問題への疑問にこだわり続けたことが、境界層理論を生み出す誘因であったという。

ついでながら、19世紀の中葉に船舶抵抗の試験水槽を製作し、相似則に名を残しているフルード（Froude, 1872）も摩擦抵抗は平板の長さを増すとき、それに比例するよりも小さな割合でしか増加しないことを知っており、このことの解釈として後方に行くほど平板に引きずられる部分（つまり境界層）が厚さを増すためと考えた（式（12.13）参照）。また、ランキン（Rankine, 1864）は船の必要動力を推定する過程で船体の側壁から発生する渦列から境界層概念の粗形（祖形）を考えついていたともいわれる。もっとも、それは曖昧模糊としたものでプラントルのような現象の明確な理解には程遠いものであった。しかし、ランキンのこの観察にしる、レイリー問題の上述のような解釈にしる、今日の立場からこのようにいえるのであって、そのことはプラントルの偉大さをなんら減ずるものではない。