10. 層流境界層

10.1　境界層概念の成立

前章では非線型偏微分方程式であるナビエ-ストークスの方程式の近似解法としての線型近似の方法について述べた．この解法は，レイノルズ数 Re が1以下の小さな値であることを前提としていた．しかし，実際に問題となる多くの流れの場のレイノルズ数は，これよりも遥かに大きくて 10^3 以上である．したがって，もはや線型近似法という数学の常套手段は放棄しなければならなくなる．

ところで，Re が大きいということはナビエ-ストークスの方程式の粘性項の影響が小さいことであり，その極限 $Re\to\infty$ での流れはポテンシャル流にほかならない．しかし，すでに§4.6.aで見たように，定常な非粘性ポテンシャル流れ中の物体には抵抗が働かない（いわゆるダランベールのパラドックス）から，一見ナビエ-ストークスの方程式が矛盾を含んでいるように見える．しかし，実はポテンシャル流では物体の壁面上での法線流速が0という条件だけで解が求まり，壁面での滑りなし（接線流速成分が0）の条件[†]は満たされていない．このことは $Re\to\infty$ により，偏微分方程式の最高階の項が消えて，境界条件の数が少なくてもよいことに対応している（§9.3.c参照）．すなわち，$Re\to\infty$ の極限の方程式を解いても実在流体の壁面上での境界条件を満たしていないので，パラドックスは当然である．いかに，Re が高くとも実在の粘性流体は物体の表面で流速は0であり，壁近くではこの状態から急激にポテンシャル流の状態に移るわけで，ここでは流体の剪断変形 $\partial u/\partial y$ を無視するわけにはいかない．Re の大きい流れでは，このように壁の近くに剪断変形速度の大きい，したがって粘性の作用の無視しえないごく薄い層が存在し，その外側では流れは非粘性流と考えてもよい（図10.1）．こ

[†] 固体壁での滑りなしの条件は分子論的に次のように説明される．流体の分子は，あらゆる方向に不規則な運動をしており，その平均がマクロないわゆる流体の流速である．こうした自由に運動する流体分子が固体の空間に飛び込み固体分子と衝突すると前進速度を失い，乱反射される．その結果，壁面の流体の速度はこれらの分子速度の平均として0となる．

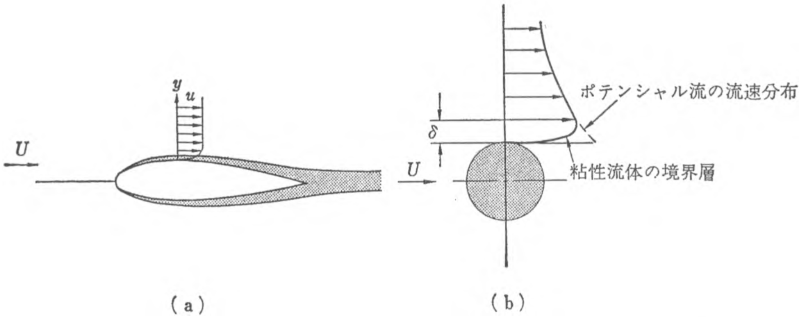

図 10.1　レイノルズ数の大きな流れの境界層と外部のポテンシャル流

の層内で流速成分が急激に変化することは，ここでの渦度の z 成分 $\omega_z=\partial v/\partial x-\partial u/\partial y\cong-\partial u/\partial y$ が大きいことを意味する．したがって，これを渦の層とみなすことができる．この渦の層が，いわばコロの働きをして，上下の流速の不連続的な変化の接続域を作っている．このことはすでに§5.4で述べた（図5.8参照）．

考えてみれば，ダランベールのパラドックスに対して最初に提出されたキルヒホッフ理論——死水領域の理論——にもすでに§5.4で述べたように渦層の概念が含まれている．つまり，このモデルでは分離流線を境にして流速が有限の値から0に不連続的に変化しているが，これは渦層にほかならない．ところで，ヘルムホルツの渦定理により完全流体中では渦は発生も消滅もしないはずであるから，死水理論は完全流体の仮定と矛盾しているように見える．実際には壁体の前面で粘性のために薄い渦の層（境界層）が発生し，これが壁体面の端から離れて自由流線にのって下側に流されていると考えるべきである．ヘルムホルツの渦定理は“流体の内部”での渦の不生不滅をいっているだけであり，境界面の現象についてはなんらふれていない．つまり，完全流体であっても物体表面からの渦の補給は禁じられているわけではない．

プラントル (Prandtl, 1904) はこの物体の表面近くの粘性の作用を無視しえない薄い層を**境界層** (Grenzschicht, boundary layer, couches limites) と名づけた．この境界層概念の成立こそ，20世紀の幕開けとともに始まる近代流体力学の出発点であり（もっとも境界層理論の具体的応用はさらに遅れてブラジウス (Blasius, 1908) の平板層流境界層の理論の発表をまたなければならないが），またこれに続く半世紀以上にわたる華々しい（航空）流体力学と航空機との相助的進歩と発達のはじまりである．ときあたかもライト兄弟により初飛行（正確には

人類初の有人動力飛行）が行われた年（1903 年 12 月）の翌年であった.

しかし，谷 (1984) の指摘するように，境界層の概念が他の研究者達に知られ，それが受容されるのは遅々としていた. 1920 年代後半に至り，プラントルの主宰したドイツのゲッチンゲン研究所以外の研究者もやっとその有用性に気づくとき，境界層理論の爆発的流行が始まる. 谷は，プラントルの境界層理論について，完全に成熟した形での新しい概念の孤立的創始，遅い受容，新しい問題点の種子まきの三つの特徴をあげている.

表 10.1　ナビエ-ストークス方程式の単純化と境界層方程式の位置づけ

ナビエ-ストークス方程式	(非　粘　性) ⟶	オイラーの方程式 ⟶ ラプラスの方程式（渦なし）	($Re\to\infty$)
	(境界層理論) ⟶	プラントルの境界層方程式（非線型）	($1\ll Re$)
	(オセーン近似) ⟶	オセーン方程式	($Re\ll 1$)
	(ストークス近似) ⟶	ストークス方程式	($Re\to 0$)

10.2　プラントルの境界層方程式の導出

プラントルは，1904 年にハイデルベルクで開催された国際数学学会において，このような境界層の考えを提案し，それに基づいてナビエ-ストークス方程式の単純化を行った. 彼のこのような考え方は，流体力学のみならず非線型方程式を解く方法に一般化され，後に特異摂動法 (singular perturbation method) と呼ばれる手法に発展した.

ここでは，前節に述べた境界層の概念により，レイノルズ数が十分大きい（が，しかし層流状態を保っている）場合の粘性流体の運動を定式化して論ずる. この場合，レイノルズ数 Re が無限大に近づいても，すなわち $\nu\to 0$ となっても，$\nu=0$ の完全流体とは異なる **“漸近的流体の運動方程式”** が存在するはずである. 境界層理論の考え方を明確にするために簡単な流れの場——平板に沿う非圧縮性の二次元流について考える. 以下に導く境界層方程式は層流境界層に関するものであるけれども，境界層の概念そのものと取扱い方は乱流境界層にもそのまま拡張できる.

境界層理論の考え方の概略を示せば，次のようになる.

（i） レイノルズ数が十分に大きい流れの場は，壁面に沿う速度勾配が大きく慣性項に比較して粘性項を無視しえない薄い層（境界層）と，その外側の粘性項

の影響を無視しうる粘性摩擦力の働かない完全流体とみなしうる領域，の二つより成り立っている．

（ii） レイリー問題（§8.4）より類推されるように，粘性効果の及ぶ範囲である境界層の厚さδは$\sqrt{\nu t}$に比例する．ここで時間tは，流れが物体の存在を感知してからの経過時間であるとみなせば，主流速Uと物体の先端からの距離xに関し，$t=x/U$と書ける．したがって，

$$\delta\approx\sqrt{\nu x/U} \tag{10.1}$$

（iii） 境界層厚さδと物体の大きさlあるいは物体の先端からの距離xとの比は，したがって，

$$\boxed{\frac{\delta}{x}\approx\frac{\delta}{l}=\sqrt{\frac{\nu}{Ul}}=Re^{-1/2}} \tag{10.2}$$

である．つまり，レイノルズ数Reが十分大きくなると，δはl（またはx）に比べて十分に小さく，$Re^{-1/2}$のオーダーとなる．

$$\delta\ll l \tag{10.3}$$

（iv） 流れの場の代表長さをx方向にl，y方向に境界層厚さの代表値δ_0，代表流速をx方向にU, y方向にVとするとき，ナビエ-ストークス式の第一式の各項についてオーダー比較を行う．たとえば，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{U}{l}\frac{\partial(u/U)}{\partial(x/l)}=\frac{U}{l}\frac{\partial u'}{\partial x'}=\frac{U}{l}O(1) \tag{10.4}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{U^2}{l}\cdot u'\frac{\partial u'}{\partial x'}=\frac{U^2}{l}O(1) \tag{10.5}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{U}{l^2}\frac{\partial^2(u/U)}{\partial(x/l)^2}=\frac{U}{l^2}\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}=\frac{U}{l^2}O(1) \tag{10.6}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{U}{\delta_0{}^2}\frac{\partial^2(u/U)}{\partial(y/\delta_0)^2}=\frac{U}{\delta_0{}^2}O(1)=\frac{U}{l^2}\left(\frac{l}{\delta_0}\right)^2 O(1) \tag{10.7}$$

ここに，

$$x'=\frac{x}{l},\qquad y'=\frac{y}{\delta_0}=Re^{1/2}\frac{y}{l},\qquad u'=\frac{u}{U}$$

である．したがって，式(10.6), (10.7)の比較から

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ll\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{10.8}$$

となり，ナビエ-ストークス方程式の第一式の粘性項から$\partial^2 u/\partial x^2$の項を省略できる．

（v） かつ，ナビエ－ストークス方程式の第一式が $Re\to\infty$ のときに，完全流体の方程式に漸近しないためには，粘性項 $\nu(\partial^2u/\partial x^2+\partial^2u/\partial y^2)\approx\dfrac{\nu U}{\delta_0{}^2}O(1)$ が $u\,\partial u/\partial x\approx\dfrac{U^2}{l}O(1)$ と同じオーダーとならなければならない．これからも，式(10.2) と同じことがいえる．すなわち，($\nu U/\delta_0{}^2\approx U^2/l$ より)

$$\begin{aligned}\delta_0&\approx l(\nu/Ul)^{1/2}\\&\approx lRe^{-1/2}\end{aligned}\tag{10.9}$$

あるいは，

$$\delta_0{}'=\delta_0/l=Re^{-1/2}\tag{10.9 a}$$

（vi） 次に連続式より $\partial u/\partial x=(U/l)\partial u'/\partial x'$ と $\partial v/\partial y=(V/\delta_0)\partial v'/\partial y'$ のオーダーが等しくなければならないことが要請される（ここに，$v'=v/V$）．したがって，y 方向の代表速度は

$$V=\delta_0U/l=URe^{-1/2}\tag{10.10}$$

である．

（vii） 上の関係を用いると，運動方程式の第二式（y 成分）は各項ともたかだか $\delta_0U^2/l^2=U^2Re^{-1/2}/l$ のオーダーであり，残りの項 $(1/\rho)\partial p/\partial y=(U^2/\delta_0)\partial p'/\partial y'$ ($p'=p/\rho U^2$) も同じオーダーでなければならないから，

$$\frac{\partial p'}{\partial y'}\sim\delta_0{}'^2\tag{10.11}$$

これを 1 に比べて $\delta_0{}'^2=Re^{-1}$ オーダーの項として省略しうる．すなわち，境界層内の圧力は y 方向に変化がなく，外側のそれと同じであり，

$$p'\sim1\tag{10.11 a}$$

したがって，境界層内の圧力は外部ポテンシャル流より与えられる．このことは，境界層の厚さが薄いことの結果にほかならない．結局，境界層方程式の第二式は不要となる．

以上の式を整理すれば，二次元流の境界層方程式は次のようになる．

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\tag{10.12}$$

$$0=-\frac{\partial p}{\partial y}\tag{10.13}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0\tag{10.14}$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial x}\tag{10.15}$$

この方程式は，**プラントルの境界層方程式**として知られている．第四式は境界層に沿う圧力分布を自由流（主流）U より決める式である．また境界条件は

$$u=0,\ \ v=0 \qquad (y=0) \tag{10.16 a}$$

$$u \to U(x) \qquad (y \to \infty) \tag{10.16 b}$$

である．

境界層概念を定式化した式 (10.12)～(10.15) はもとのナビエ-ストークス方程式に比べて，従属変数としての圧力 p がなく，運動方程式の第二式が不要となって，著しく簡単化されている．しかし，第一式の左辺には非線型慣性項が残されていることに注意されたい．

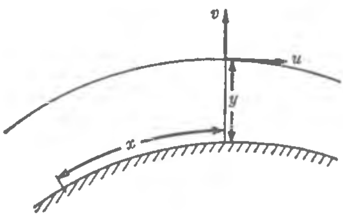

図 10.2

主流の流れの場は，物体まわりのポテンシャル流れとして求められる．境界層は厚さが物体の大きさに比べてきわめて薄いから，主流場に大きな影響を与えないが，境界層方程式を解いて得られた影響分（後に述べる排除厚分）だけ物体が厚くなったとして主流解の精度を高めるとよい．

物体が平板ではなく曲面である場合にも，その曲率半径が物体の代表的長さに比べて大きい場合には x を物体表面に沿う距離，y を壁面からの垂直距離にとれば，境界層方程式 (10.12), (10.14) はそのまま成立することが証明されている．ただし，境界層内の圧力分布は曲りによる遠心力とつりあうために

$$\frac{\partial p}{\partial y}=\lambda \rho u^2 \tag{10.17}$$

となる．ここに，λ：物体表面の曲率（$\lambda \leq 1/l$ でなければならない）．

10.3　プラントルの境界層方程式への変換が意味する流れの性質の変化（楕円型から放物型へ）

ところで，上の第一式 (10.12) は運動方程式の x 成分であるが，もともとのナビエ-ストークスの方程式のそれと比べるとき，右辺から $\nu\,\partial^2 u/\partial x^2$ の項が消えただけで形の上では大した変わりはないように見える．しかし，式の物理的数学的性質は大きく変化している．ナビエ-ストークスの方程式は x, y 方向の最高次の微分はともに二階で，数学的には楕円型の偏微分方程式と呼ばれるもので，流

れ場は無限遠の上流および下流の影響を受ける．ところが，プラントルの境界層方程式は $\partial^2 u/\partial x^2$ の項を欠き，x 軸方向の最高次の微分は一階で，y 軸方向の最高次微分が二階の**放物型の偏微分方程式**といわれるものである．つまり，流れは上流の影響で決まり，一方向に積分をすすめることができる．このことは問題の解法を非常に有利にしている．この点については次節でもより具体的にふれる．

von Mises (1927) はこのことを式の変換により，一層明確に示した．(プラントル自身すでにそれより以前にこの変換を行っていたが，未発表であったといわれる．)

y のかわりに流関数 ψ を新たな独立変数として用いて，独立変数を (x, y) から (x, ψ) に変数変換すれば，プラントルの境界層方程式は，

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\nu u\frac{\partial}{\partial\psi}\left(u\frac{\partial u}{\partial\psi}\right) \tag{10.18}$$

となる．さらに，従属変数として u のかわりに全水頭 $(\times\rho g)$

$$h=p+\frac{\rho}{2}u^2 \tag{10.19}$$

を導入し，これに関して式 (10.18) を書き換えると，

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial x}=(\mu u)\frac{\partial^2 h}{\partial\psi^2}} \tag{10.20}$$

を得る．これはまさしく熱伝導や拡散を表す放物型の偏微分方程式である．

ルードウィッヒ・プラントル

(Ludwig Prandtl, 1875—1953)

プラントルは 1875 年大学教授の子としてミュンヘンに生まれ，機械工学を修め，梁の座屈理論で博士号を受けた．しかし，機械工場で実務に携わって，流体力学における理論と実際の隔りの大きさを痛感し，これを埋める必要性を強く感じた．1901 年，彼はハノーヴァの工科大学に移り研究生活のスタートを切る．

1904 年 8 月，ハイデルベルクにおいて開催された第 3 回国際数学学会に，プラントルは，流体力学に関するごく短い論文を提出している．それは流体運動に関する非線型微分方程式の解法について，今日境界層理論と呼ばれている新しい考え方を導入したものであったが，ゲッチンゲン大学の数学者クライン (Felix Klein) を除いて誰一人注目する者はいなかった．しかし，クラインだけはプラントルの論文の

重要さと斬新さを直ちに認め，いまだ20歳代のこの青年をいきなり大数学者ガウス以来の伝統をもつゲッチンゲン大学の教授，応用力学研究所所長に任じた．ときあたかもライト兄弟が人類初の有人動力飛行に成功し(1903年12月)，航空機の発達と流体力学の進歩とが車の両輪のごとく歩み始めた時代であった．

現代の流体力学は，プラントルの登場なしには考えられない．そして，プラントルは彼自身が巨峰であっただけではなく，カルマン，ブラジウス，トルミエン，シュリヒティングなど，多くの人材を発掘育成した．

プラントルの研究の特質は，物理現象を鋭い洞察によって理解する天才的な直感力と，巧みに本質をとらえて比較的単純な式形に表す才能にあった．彼は「式を解くことなしに答のわかった人（ハイゼンベルク)」であった．

しかし，巨人プラントルといえども無誤謬の人ではなかった．カルマン渦の発見も，もとはといえばプラントルの指導でヒーメンツ（Hiementz）が行っていた円柱からの境界層の剝離の実験にある．この実験ではどんなに注意深く実験しても円柱が振動するのを，プラントルは円柱の仕上げ精度の悪さに問題があると考えて，手直しに時間を費している間に，当時，助手をしていたカルマン（1911）は，師の先を越して円柱の後流に特有の現象として解析をすすめてしまった．