

4. 二次元ポテンシャル流れ

4.1 複素速度ポテンシャル

流れの場が渦なし ($\omega=0$) であれば、流速ベクトルの成分はあるスカラー量 (このスカラー量を速度ポテンシャルという) ϕ の各成分方向への偏微分から導かれること; 流れが「渦なし」ならば速度ポテンシャルは必ず存在し、逆に速度ポテンシャルをもつ流れは「渦なし流れ」であること、したがって「渦なし流れ」と「ポテンシャル流れ」とは同義であること; 速度ポテンシャルはラプラスの方程式を満たすことについては、すでに述べた。

二次元の渦なし流れ (ポテンシャル流れ) については、関数論 (複素変数関数論) における等角写像の理論が応用できて、さまざまな流れの場をさまざまな数学手法を用いて巧妙に解くことができる。

現実の流れが渦なしのポテンシャル流れとして取り扱えるためには、壁面から供給される渦の影響が流れの場全体に及ばないことが必要である。振動流、水の波、流線形翼まわりの流れ、広い水域からの噴流、ダム頂部の流れ、堰からの自由落下流 (ナップ) などポテンシャル流れとして取り扱える現象は少なくない。逆に、管路内の流れ、水路内の流れや物体近傍の流れなど壁面の影響を受ける流れ (内部流, internal flow) では粘性の影響を考慮した理論による解析が必要である。

a. 複素平面

一般に平面上の点を表すには、平面上に直交座標系を導入してその点の座標により (x, y) と表す。ところで、実数と虚数とが交じり合わないという性質を利用して、これを

$$(x, y) = x + iy \quad (4.1)$$

と表すことができる。 $x + iy$ は複素数であるから、これを一つの変数 z で代表することができる。

$$z = x + iy \quad (4.2)$$

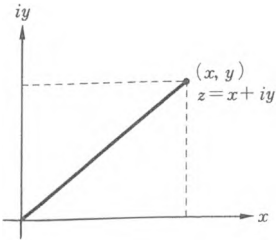


図 4.1 複素平面 (アルガン表示)

このようにして表示された平面を複素数平面 (あるいは複素平面, ガウス平面) と呼ぶ。また, 実数部を横軸に, 虚数部を縦軸とする複素表示をアルガン (Argand) 表示という (図 4.1)。

複素平面上の点の極座標表示: 平面上の点 (x, y) は極座標系では原点からその点までの距離 (動径) r と横軸と動径のなす角 θ を用いて, (r, θ)

と表される。 r を z の絶対値, θ を偏角という。これらの間には

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (4.3)$$

の関係がある。一方, オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (4.4)$$

を用いれば, z は

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ &= r(\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= r e^{i\theta} \end{aligned} \quad (4.5)$$

と記することができる。

b. 複素速度ポテンシャル

一般に一つの点 x に別の空間の点 (あるいは値) w を対応させることを関数といい, $w = f(x)$ と書く。これを複素数の領域にまで拡張して, 一つの複素数 (あるいは複素平面上の点) $z (= x + iy)$ に別の複素平面上の点 W を対応させる関係式を複素関数と呼ぶ。

$$W = f(z) \quad (4.6)$$

速度ポテンシャル Φ と流関数 Ψ は, ともに (x, y) すなわち複素平面上の点 z の関数であるから, これらをそれぞれ実部および虚部とする複素数を W

$$W(x, y) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y) \quad (4.7)$$

あるいは,

$$W(z) = \Phi(z) + i\Psi(z) \quad (4.7a)$$

とすれば, W は複素数 z を独立変数とする複素関数である。このように速度ポテンシャル Φ と流関数 Ψ により定義された複素関数 W を複素速度ポテンシャルという。

c. コーシー-リーマンの関係式——複素関数の微分と正則関数——

複素関数 $W(z)$ の微分を考える。これは形式的には dW/dz と書けるが、二次元平面 (x, y) 上の微分であるから、微分の方法が問題となる。 x 方向の微分と y 方向への微分はそれぞれ次のように書かれる。

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (4.8)$$

および

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dz} &= \frac{\partial W}{i \partial y} = \frac{1}{i} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + i \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) \\ &= -i \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \end{aligned} \quad (4.9)$$

複素関数の微分がその微分の方法によらないとき、この関数は正則であるという。このためには式 (4.8), (4.9) より次の関係が成立しなければならない。この関係をコーシー-リーマン (Cauchy-Riemann) の関係式 (あるいは、微分方程式) という。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \frac{\partial \Psi}{\partial y} (=u) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x} (=v) \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

この関係はすでに述べた流関数および速度ポテンシャルと速度成分 (u, v) の関係 (式 (3.10), (3.25) および式 (3.52)) にほかならない。換言すれば、コーシー-リーマンの関係式は、流体力学的には速度ポテンシャルの存在・渦なし流れの条件式であり、数学的には複素関数 W が正則であるための条件である。

表 4.1 コーシー-リーマンの関係式の意味

コーシー-リーマン の関係式	}	流体力学的：渦なし条件，(速度ポテンシャル・流関数の定義) 等ポテンシャル線と流線の直交性
		数学的：正則条件

式 (4.10) から、 Φ もしくは Ψ を消去すれば、 Φ あるいは Ψ に関するラプラスの式を得る。

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (4.11)$$

$$\nabla^2 \Psi = 0 \quad (4.12)$$

ラプラスの方程式の解である関数を調和関数 (harmonic function) という。

d. 速度ベクトル

速度ベクトル v は

$$v = u + iv \quad (4.13)$$

と複素数表示をすることができる。速度ベクトルの絶対値を $q = |v|$, 流速ベクトルと x 軸のなす角度を θ とすれば,

$$v = qe^{i\theta} = q \cos \theta + iq \sin \theta \quad (4.14)$$

のように表示することもできる。

式 (4.8) あるいは式 (4.9) と式 (4.10) より

$$\frac{dW}{dz} = u - iv \quad (4.15 a)$$

$$= \bar{v} \quad (4.15 b)$$

$$= qe^{-i\theta} \quad (4.15 c)$$

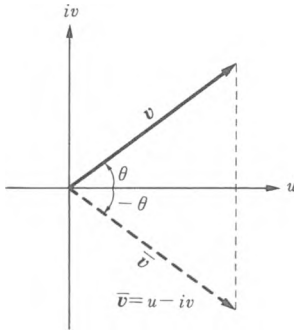


図 4.2 速度ベクトルの複素数表示

となる (図 4.2). ここに \bar{v} は v の共役数。また、流速の絶対値の二乗は上式より

$$q^2 = \left(\frac{dW}{dz} \right) \left(\frac{\overline{dW}}{\overline{dz}} \right) \quad (4.16)$$

となる。複素速度ポテンシャルを z に関して微分すれば、流速の共役ベクトル \bar{v} となり、1 回の微分操作で流速の x, y 成分が求められる。

4.2 等角写像

a. 等ポテンシャル線と流線の直交条件

等ポテンシャル線 $\Phi(x, y) = \text{const}$ の全微分をとると、

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot dy = 0 \quad (4.17)$$

となる。ここに、 (dx, dy) は $\Phi = \text{const}$ の微分であるから等ポテンシャル線上の接線ベクトルである。上式はこの接線ベクトル (dx, dy)

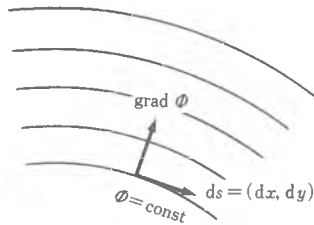


図 4.3 等ポテンシャル線と $\text{grad } \Phi$

とベクトル $\text{grad } \Phi = (\partial \Phi / \partial x, \partial \Phi / \partial y)$ が直交していることを表している (図 4.3). 同様に、 $\text{grad } \Psi$ は流線 ($\Psi = \text{const}$) に垂直なベクトルを表す (§ 3.3 参照).

等ポテンシャル線 $\Phi = \text{const}$ および流線 $\Psi = \text{const}$ に垂直なベクトル

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) = \text{grad } \Phi \quad (4.18 \text{ a})$$

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) = \text{grad } \Psi \quad (4.18 \text{ b})$$

の内積を作ると、式 (4.10) を用いて

$$\begin{aligned} \text{grad } \Phi \cdot \text{grad } \Psi &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ &= \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial y} \equiv 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

となる。したがって、コーシー・リーマンの関係はとりもなおさずこの二つのベクトル、し

たがって、 z -面 (物理面) 上で等ポテンシャル線と流線とが直交する条件である (図 4.4)。

(注 4.1) 同じことであるが、次のようにもいえる。等ポテンシャル線 $\Phi(x, y) = \text{const}$ は陽形式で $y = f(x)$ と表されるとする。 $\Phi = \text{const}$ を x で微分すると

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

である。したがって、等ポテンシャル線への接線の勾配は

$$dy/dx = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} / \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

となる。これを書き直すと、式 (4.17) となる。

b. フロー・ネット

流れの境界形状が与えられると、等ポテンシャル線と流線とが直交する性質を利用して、フロー・ネット (flow net) (等ポテンシャル線と流線で作られる網目図) をフリー・ハンドで画くことができる。フロー・ネットからは流れの様子がわかるだけでなく、流量や流速・圧力分布を図式計算により意外に正確に求めることができる。この方法については水理学や土質力学の教科書を参考にされたい。

c. 等角写像

点 z を複素平面上の点として表したのと同様に、複素数 $W = \Phi + i\Psi$ を Φ を実軸、 Ψ を虚軸とする複素平面 (W -面) 上の点として表す。 (x, y) 平面 (物理面) 上の等ポテンシャル線 $\Phi = \text{const}$ は複素平面 W 上の Φ 軸に垂直な曲線群を表し、

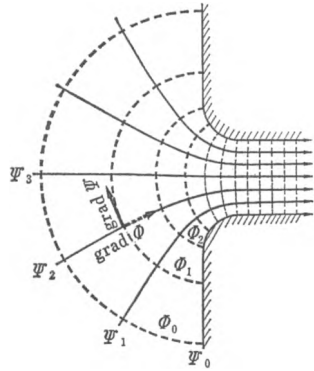


図 4.4 等ポテンシャル線と流線の直交

(x, y) 平面上の流線 $\Psi = \text{const}$ は複素平面 W 上の Ψ 軸に垂直な曲線群をなしている。このように流線と等ポテンシャル線は、物理面 z 上でも、また写像平面 W 上でも直交している (図 4.5)。

より一般的に、複素関数 $W(z)$ が正則であれば、 z -面上の任意の二本の曲線の交わる角度は、 W -面上への写像によっても変わらない (図 4.6)。この対応関係を等角写像 (conformal mapping) という。

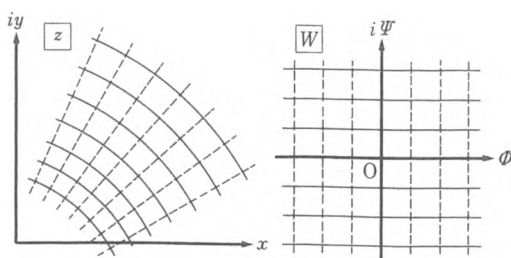


図 4.5

(注 4.2) z -面上の点 P に対応する W -面上の点を Q とする。 P 点とその近傍の 2 点 P_1 , P_2 の作る小三角形の W -面への写像を Q, Q_1, Q_2 とする。微小距離ベクトル $\overrightarrow{PP_1}$ を Δz_1 , $\overrightarrow{PP_2}$ を Δz_2 , $\overrightarrow{QQ_1}$ と $\overrightarrow{QQ_2}$ をそれぞれ ΔW_1 , ΔW_2 とするとき (図 4.6), 関数 $W(z)$ が正則であれば, dW/dz は微分方向に無関係であるから,

$$\frac{\Delta W_1}{\Delta z_1} = \frac{\Delta W_2}{\Delta z_2} \quad \text{あるいは} \quad \frac{\Delta z_2}{\Delta z_1} = \frac{\Delta W_2}{\Delta W_1} \quad (4.20 \text{ a, b})$$

の関係が成立する。いま, $\Delta z_1 = |\Delta z_1| e^{i\theta_1}$, $\Delta z_2 = |\Delta z_2| e^{i\theta_2}$ (ここに, θ_1, θ_2 は x 軸と $\overrightarrow{PP_1}$, $\overrightarrow{PP_2}$ のなす角度) と書けば,

$$\frac{\Delta z_2}{\Delta z_1} = \frac{|\Delta z_2|}{|\Delta z_1|} e^{i(\theta_2 - \theta_1)} \quad (4.21)$$

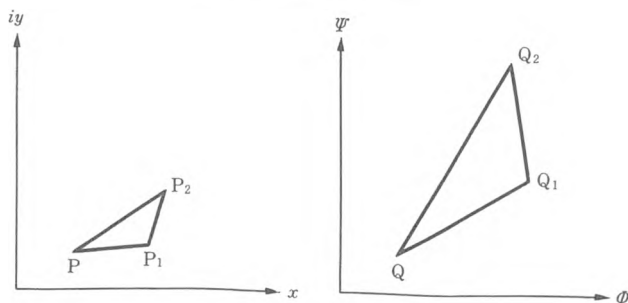


図 4.6 等角写像

同様に

$$\frac{\Delta W_2}{\Delta W_1} = \frac{|\Delta W_2|}{|\Delta W_1|} e^{i(\theta_2' - \theta_1')} \quad (4.22)$$

である。ここに、 θ_1', θ_2' は \vec{QQ}_1, \vec{QQ}_2 の偏角。したがって、式(4.20b), (4.21), (4.22)より

$$\theta_2 - \theta_1 = \theta_2' - \theta_1' \quad (4.23)$$

$$\frac{|\vec{QQ}_1|}{|\vec{PP}_1|} = \frac{|\vec{QQ}_2|}{|\vec{PP}_2|} = \left| \frac{dW}{dz} \right| \quad (4.24)$$

したがって、 z 平面上の二曲線のなす角度（点Pでの両曲線への接線の間の角度）は、 W 平面上の対応する二曲線のなす角度に等しい。また、 $|dW/dz|$ を写像の倍率という。なお上の関係は、 dW/dz が有限の場合に成立する。これが0または ∞ となる点（特異点）では等角写像は成立しない。

4.3 複素関数で表される基本的な流れ

これまで述べたことにより、二次元渦なし流れが正則な複素関数で表されることがわかった。そこで問題は二つある。一つは任意の複素関数がどんな流れを表すかということであり、いま一つはこれと逆の問題で、任意の流れを表す複素関数を求めることである。

① 複素関数 → どんな流れか？

② ある流れ → 複素関数？

ここではまず第一の問題から始めよう。以下に示すように簡単な複素関数が重要な基本的な二次元渦なし流れ場を表しており、またこの基本的な流れ場である複素関数を組み合わせることにより、重要な流れ場を新しく作ることができる。以下にその基本的なものをあげる。

a. 一様流

最も簡単な複素関数として

$$\left. \begin{aligned} W(z) &= Uz \\ z &= x + iy \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

を考える。上式を実数部と虚数部に分解すれば

$$W(z) = Ux + iUy \quad (4.26)$$

となる。したがって、速度ポテンシャル Φ および流関数 Ψ として次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x, y) &= Ux \\ \Psi(x, y) &= Uy \end{aligned} \right\} \quad (4.27)$$

これは $u = \partial\Phi/\partial x = U$, $v = \partial\Phi/\partial y = 0$ の x 軸に平行な一様流を表す（図 4.7）。

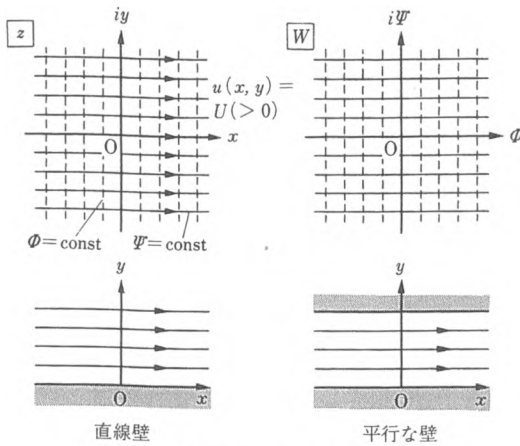


図 4.7 一樣な流れ

b. 角を回る流れ

次に

$$W(z) = Az^n \quad (4.28)$$

を考える. z を極座標表示して

$$z = re^{i\theta}$$

とし, 式 (4.28) に代入すれば

$$\begin{aligned} W(z) &= Ar^n e^{in\theta} \\ &= Ar^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) \end{aligned} \quad (4.29)$$

となる. これより, 速度ポテンシャルおよび流関数はそれぞれ上式の実数部 ($\mathcal{R}(W) = \Phi$) と虚数部 ($\mathcal{I}(W) = \Psi$) をとって次のようになる.

$$\Phi(r, \theta) = Ar^n \cos n\theta \quad (4.30 a)$$

$$\Psi(r, \theta) = Ar^n \sin n\theta \quad (4.30 b)$$

また, 複素速度ベクトルは式 (4.15) より

$$\bar{v} = \frac{dW}{dz} = Anz^{n-1} \quad (4.31)$$

$$= Anr^{n-1} e^{i(n-1)\theta} \quad (4.32)$$

その大きさは

$$q = \left| \frac{dW}{dz} \right| = Anr^{n-1}$$

たとえば, $n=2$ ならば流関数は

$$\begin{aligned}\Psi(x, y) &= Ar^2 \sin 2\theta \\ &= 2Ar^2 \sin \theta \cos \theta\end{aligned}\quad (4.33)$$

である。これはさらに直交座標系により

$$= 2Axy = \text{const} \quad (4.34)$$

となり、図 4.8 の実線で示す双曲線群となる。また、等ポテンシャル線は

$$\Phi(x, y) = Ar^2 \cos 2\theta \quad (4.35)$$

$$= A(x^2 - y^2) = \text{const} \quad (4.35 a)$$

となる。これは流関数に直交する破線で示す双曲線群である。

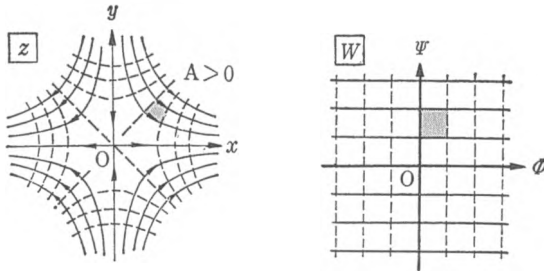


図 4.8 $W(z) = Az^2$ の表す流れ。物理面 z の曲線群と複素速度ポテンシャル面の対応。 z -面の図形の W -面への写像

流速の x, y 成分は、式 (4.31) の実数部と虚数部より、あるいはポテンシャル Φ (式 (4.35 a)) の偏微分より直接に次のようになる。

$$u = 2Ar \cos \theta = 2Ax \quad (4.36)$$

$$v = -2Ar \sin \theta = -2Ay \quad (4.37)$$

流れは壁面を突き破って流れることはないから、任意の流線を壁面とみなしてよい。いま、式 (4.30 b) において $\Psi = 0$ を一つの壁面に沿う流線とすると、この流線は物理面では $\sin n\theta = 0$ 、したがって $n\theta = m\pi$ すなわち、 $\theta = (\pi/n)m$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) になる。これは原点をはさむ角度 π/n の二面を表す。図 4.8 および図 4.9 (a) は $n=2$ の場合、つまり 90° 角の隅部を回る流れの物理面 z の流線と等ポテンシャル線および複素ポテンシャル面 W を示す。 $n > 1$ であればこの複素関数は隅 (スミ) (π より小さい内角で交わる壁の隅) を回る流れを表し (図 4.9 (a), (b)), $1/2 < n < 1$ ならば楔状の角 (カド) (突角; π より大きい内角で交わる壁の角) を曲がる流れを表す (図 4.9 (c))。曲がった流線の一部も壁面と考えてよいから、この関数の表す流れは図 4.9 (a) のように曲管中の流れとみなすこともできる。 $n=1/2$ の場合は、原点から x 軸の方向に伸びる半無限の厚さ

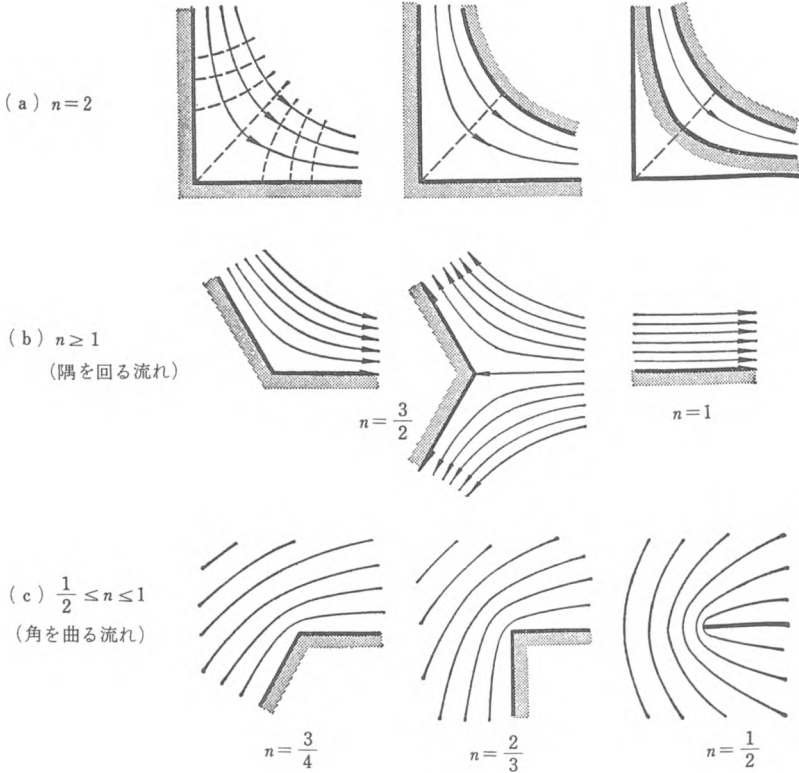


図 4.9 等角写像 $W(z)=Az^n$ により表される種々の流れ

のない平板を回る流れを表す。ついでながら、 $n=-1$ ($W=A/z$) は後に述べるように二重湧出しによる流れを表す。

表 4.2 ベキ数 n と流れ

$n > 1$: 壁の隅を回る流れ
$n = 1$: 一様流
$1/2 < n < 1$: 突角を回る流れ
$n = 1/2$: 原点から x 軸方向に伸びる半無限平板を回る流れ

角を回る流れのパラドックス

ところで、式 (4.32) によれば突角を回る流れ ($1/2 \leq n < 1$) においては、壁面の頂点 ($r \rightarrow 0$) で、速度が無限大 ($q \rightarrow \infty$) となる。一方、運動エネルギー ($q^2/2$) と圧力のエネルギー (p/ρ) の和が一定というベルヌーイの定理 (式 (2.1)) により、この点では $p \rightarrow -\infty$ 、すなわちマイナス無限大の負圧を生じなければなら

ない。

$$p \rightarrow -\infty \quad (r \rightarrow 0 : 1/2 \leq n < 1) \tag{4.38}$$

ところが、圧力は重さや長さあるいは温度などと同じく絶対零以下の負の値（負圧）をとることのできない物理量である（注 4.4）。圧力は普通（日常生活では）、大気圧を基準として正または負の量として表される（これをゲージ圧という）か

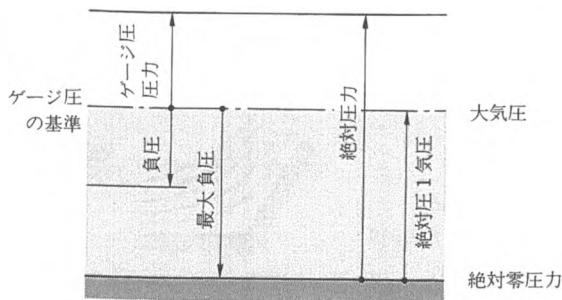


図 4.10 圧力の定義

ら、現実には -1 気圧以下の負圧は存在しない（図 4.10）。というのは、圧力とは気体の場合には、空間を満たす気体分子が、分子運動により壁面に衝突する際の壁面との運動量の交換による力である。重力場の液体や十分深い大気層の場合

には、これらの流体の重さが静水圧となって現れる。そして、何もない状態（真空）以下の圧力は存在しない。このことは角を曲がる実際の流れでは、式 (4.30 b) で表される流線は突角の頂点付近では実現されないことを意味している。壁面に沿って徐々に速度を速めつつ頂点に近づく流れは、頂点で剥離しその下流に

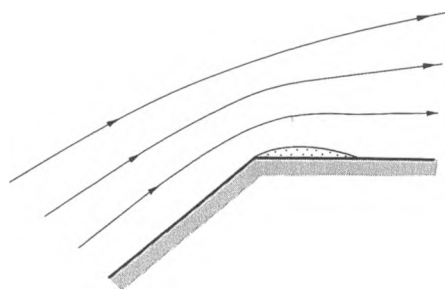


図 4.11 角を回る流れの剥離とキャビティの発生

小さな空洞（部）（キャビティ, cavity）を作ってから、再び壁面に沿って流れ（図 4.11）、キャビティの中の圧力は負圧（大気圧に対して）となっている。頂点に近づく流線が一度頂点で剥がれるのは、ちょうど人が全速で走ってきて角（カド）（たとえば、野球のベース）を曲がろうとしても、角で急に方向を変えることは無理で、一度まっすぐに行き過ぎてから弧を画いて角を回ると同じである。

これに対し、 $n > 1$ の隅（スミ）を回る流れでは、 $r \rightarrow 0$ のとき、 $q \rightarrow 0$

$$q \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow 0)$$

となるから、流線は剥離をせずに隅を回ることができる。人間が走る場合でも一

度立ち止まってからなら、進行方向の急転換は可能であるのと同じである。

流体力学は、「空間を一杯に満たし、かつ変形変位の自在な連続体」を仮想して導かれた基礎方程式の上に展開される理論体系であるが、このような仮想的な前提のために、仮定や近似を用いない基礎方程式の厳密解であっても、場合によっては現実と合わない結論が導かれるごく少数の例がある。これを流体力学におけるパラドックスという。(完全流体の一樣流中の物体には、抵抗が働かないというダランベールのパラドックス (§4.6.a) はよく知られている。) 否、むしろ、このような理想化された仮想物質の存在を仮定して導かれた少数の基礎方程式をもとに構築された理論体系が、現実の流れの現象をみごとに説明し、破綻を生じないのは驚きでさえある。

(注 4.3) 圧力の発見：17世紀にトリチェリー (1608—1647) は一端を閉じて水銀を満した管を水銀槽の中に倒立させたとき、管の中の水銀柱が水銀槽の表面からある高さ (760 mmHg) 以上には昇らないこと、それより上部に真空ができることを示し、ギリシャ哲学の教える「自然は真空を嫌う」という公理が誤りであることを示した (1643)。また、彼は「真空が吸引力をもつ」のではなく大気層の重さが大気圧として作用し、水銀柱を押し上げているものと推論した。パスカル (1623—1662) はこのトリチェリーの実験をヒントとして、大気圧が標高により異なることを実証した (1648)。

(注 4.4) 負圧について：「現実の流体の圧力は、絶対零以下には下らない」という点は、流体が液体の場合には少々注意が必要であり、必ずしも正しくはない。圧力が負ということは、液体に張力 (tension) が働くということであり、気体の場合とは異なり液体はある程度の張力に耐えうるのである。事実、キャビテーション現象では絶対零以下の負圧も生じる (Batchelor, 1967; Trevena, 1987)。さらに驚くべきことには、植物体内では植物の葉の気孔からの水分の蒸発 (これを蒸散という) に伴って大きな負圧が発生し、これによる圧力差により根から土壌中の水分が植物体内に輸送されている。夏の日中など蒸散作用の激しいときには負圧は -200 気圧にも達するという (田崎, 1978)。

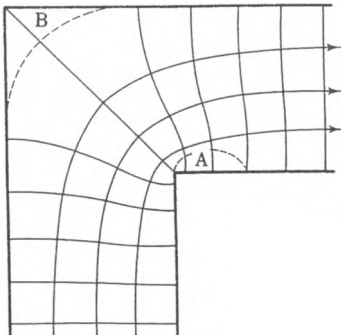


図 4.12 管の鋭角曲り部における完全流体のフロー・ネット(実線)と現実の粘性流体の流れ。現実の流れでは鋭角部のキャビティ(A)と隅角部における逆圧力勾配による剝離(B)(隅角部で流速は低下し、圧力は増加するため)が生じる。

(注 4.5) 逆圧力勾配の流れと剝離：完全流体の流れでは、壁面の間の角度が π 以下 ($n > 1$) ならば流線の剝離はない。しかし、隅部では速度は小さくなるが圧力は逆に増加するので、流れは圧力の低い所から高い所に流れる逆圧力勾配 (adverse pressure

gradient) の流れとなる。この圧力増加は運動エネルギーの圧力への変換により行われるが、実際の流れでは粘性のため壁面に沿って境界層が発達しエネルギーが消散されるので、運動エネルギーと圧力エネルギーの和 (ベルヌーイ和) は下流側に減少する。このとき、圧力増加に見合う運動エネルギーが不足すると、流れは隅部でも剝離する (図 4.12)。この現象は翼形の上面やディフューザーなどの壁面に沿う境界層の剝離と同じである。

c. 渦 糸

次のような複素関数の与える流れ場を考えよう。

$$W(z) = -iK \ln z \quad (K: \text{実数}) \quad (4.39 a)$$

$$= \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z \quad (\Gamma: \text{渦度}) \quad (4.39 b)$$

(上式の右辺にマイナス符号をつけたのは、循環の方向の定義を統一するため。)

この式に $z = re^{i\theta}$ を代入して、実数部と虚数部とに分けると

$$W(z) = -iK(\ln r + i\theta) \quad (4.40)$$

となる。これより速度ポテンシャル Φ と流関数 Ψ は

$$\Phi = K\theta \quad (4.41 a)$$

$$\Psi = -K \ln r \quad (4.41 b)$$

となる。上式から、流速の極座標による成分 (u_r, u_θ) を求めると

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \\ u_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \frac{K}{r} \end{aligned} \right\} \quad (4.42)$$

となる。これは原点を中心として K が正ならば反時計まわり (K が負ならば時計まわり) に回転している流れである (図 4.13)。

直交座標系による流速分布は、式 (4.41 b)

$$\Psi = -K \ln(x^2 + y^2)^{1/2} \quad (4.43)$$

より

$$u = \partial \Psi / \partial y = -Ky / (x^2 + y^2) \quad (4.44 a)$$

$$v = -\partial \Psi / \partial x = Kx / (x^2 + y^2) \quad (4.44 b)$$

となる。上式より渦度 $\omega = \partial v / \partial x - \partial u / \partial y$ が求められるが、これはすでに § 1.6, 例 1.2 および § 3.2, 例 3.5 で求めたように零である。

$$\omega \equiv 0 \quad (r \neq 0) \quad (4.45)$$

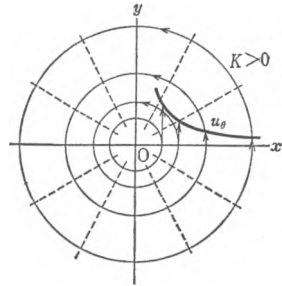


図 4.13 渦糸による流れ

原点を中心とする半径 r の積分経路 C に沿って、この流れの循環を求めると

$$\Gamma = \oint_C u_\theta r d\theta = 2\pi K \quad (4.46)$$

となる。したがって、式 (4.39) で表される流れは「大局的な渦」であるが、局所的には原点を除いて「渦なし」であり、特異点である原点に渦度が集中している流れ—渦糸—である。

ランキン渦

洗面槽や浴槽の排水口にできる渦、洗濯機の中の渦、自然界の大きな渦である竜巻や台風などわれわれが日常見かける渦は、たいていそれらの中心部を除けば渦糸による同心円の流れのように“渦なしのうず”，つまり流体力学的には渦とはいえない運動である。このように中心部の流体のみが剛体的に回転する渦で、それ以外が“渦なしのうず”である流れのモデルをランキン渦 (Rankine's combined vortex) と

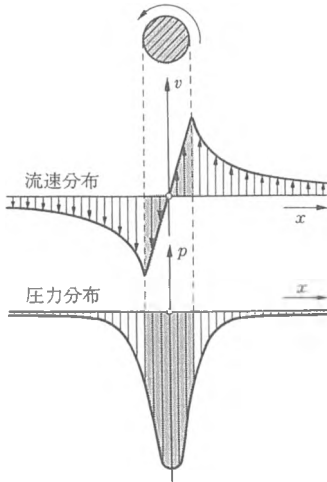


図 4.14 ランキン渦

いう (図 4.14, § 1.6 参照).

$$u_r = 0$$

$$u_\theta \begin{cases} = \frac{rK}{r_0^2} & (0 < r \leq r_0) \\ = \frac{K}{r} & (r_0 < r) \end{cases} \quad (4.47)$$

また、渦度 ω は、§ 1.6, 例 1.1, 1.2 より、

$$\omega \begin{cases} = 2K/r_0 & (0 < r \leq r_0) \\ = 0 & (r_0 < r) \end{cases} \quad (4.48)$$

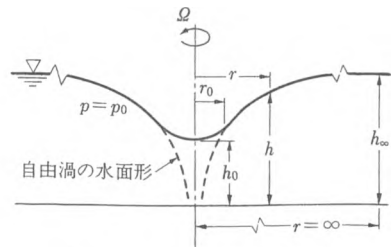


図 4.15 ランキン渦の水面形

中心の剛体的回転部分を強制渦 (forced vortex), 外側の領域を自由渦 (free vortex) という。中心の渦の部分では、圧力分布は静水圧分布で、遠心力 ($\rho u_\theta^2/r$) と圧力勾配 (dp/dr) とがつりあう条件から渦の水面形が決まる。その外側の領域はポテンシャル流であるから一般化されたベルヌーイの定理が成立し、これより水面形および圧力分布が決まる。

ランキン渦の水面形および圧力分布は

$$\begin{cases}
 h(r) \begin{cases} = h_0 + \frac{\Omega^2 r^2}{2g} & (0 < r \leq r_0) \\ = h_0 + \frac{\Omega^2 r_0^2}{g} \left(1 - \frac{r^2}{2r_0^2}\right) & (r_0 \leq r) \end{cases} \\
 p \begin{cases} = p_0 + \frac{\rho \Omega^2}{2} r^2 + \rho g (h_0 - z) & (0 \leq r \leq r_0) \\ = p_0 - \rho \frac{\Omega^2 r_0^2}{2} \cdot \frac{r^2}{r_0^2} + \rho g (h_\infty - z) & (r_0 \leq r) \end{cases}
 \end{cases}$$

あるいは、

$$= p_0 + \rho \Omega^2 r_0^2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{r^2}{r_0^2}\right) + \rho g (h_0 - z) \quad (r_0 < r)$$

ここに、 $\Omega = K/r_0^2$: 強制渦の回転の角速度.

d. 湧出し

次式の複素速度ポテンシャル

$$W(z) = K \ln z \quad (4.49)$$

では、渦糸の場合と Φ と Ψ が入れ換わって

$$\Phi = K \ln r, \quad \Psi = K\theta \quad (4.50)$$

となる. また、流速成分は

$$\left. \begin{aligned}
 u_r &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{K}{r} \\
 u_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (4.51)$$

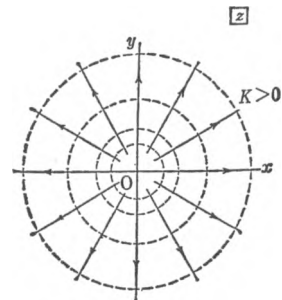


図 4.16 湧出し

となって、原点より放射状に流出する ($K > 0$; 湧出し (source)) かあるいは吸い込まれる ($K < 0$; 吸込み (sink)) 流れを表している (図 4.16). 原点より半径 r の円周上の湧出量を計算すると

$$Q = \int_0^{2\pi} u_r r \, d\theta = 2\pi K = \text{const} \quad (4.52)$$

となる.

e. 二重湧出し (ダブルット)

原点をはさんで x 軸方向に $2a$ だけ離れた二点 ($z = \pm a$) にそれぞれ同じ強さの湧出し ($z = a: K > 0$) と吸込み ($z = -a: -K < 0$) をおく (図 4.17). このとき、複素速度ポテンシャルは二つの複素速度ポテンシャルの和として、式 (4.49) より

$$\begin{aligned}
 W(z) &= K(\ln(z-a) - \ln(z+a)) \\
 &= K \ln \frac{z-a}{z+a}
 \end{aligned} \tag{4.53}$$

この右辺の \ln の中の分母分子に $(z-a)$ を掛けて変形すれば,

$$K \ln \frac{z^2 - 2az + a^2}{z^2 - a^2} = K \ln \frac{r^2 e^{i2\theta} - 2are^{i\theta} + a^2}{r^2 e^{i2\theta} - a^2}$$

となる。ここで、 a が十分小さいとすれば,

$$\begin{aligned}
 &\cong K \ln \left[1 - \frac{2a}{r} e^{-i\theta} \right] \\
 &\cong - \frac{2aK}{re^{i\theta}}
 \end{aligned}$$

したがって、 $2aK = \mu$ を一定に保って、 $a \rightarrow 0$ とするとき、複素速度ポテンシャルは

$$W(z) = -\frac{\mu}{z} \tag{4.54}$$

となる。このような流れ場を二重湧出し (doublet) という。これより、速度ポテンシャルと流関数はそれぞれ上式の右辺の実数部 \mathcal{R} と虚数部 \mathcal{I} をとって

$$\begin{aligned}
 \Phi &= \mathcal{R} \left(-\frac{\mu}{re^{i\theta}} \right) = -\mathcal{R} \left(\frac{\mu}{r} (\cos \theta - i \sin \theta) \right) \\
 &= -\frac{\mu}{r} \cos \theta = -\frac{\mu x}{r^2} = \frac{-\mu x}{x^2 + y^2}
 \end{aligned} \tag{4.55}$$

$$\Psi = \mathcal{I} \left(-\frac{\mu}{re^{i\theta}} \right) = \frac{\mu \sin \theta}{r} = \frac{\mu y}{x^2 + y^2} \tag{4.56}$$

となる。流線の方程式は

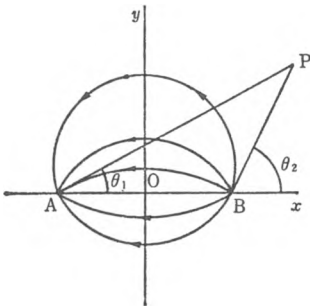


図 4.17 隣り合った湧出しと吸込み

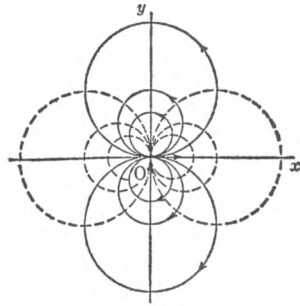


図 4.18 二重湧出し

$$\Psi = \frac{\mu y}{x^2 + y^2} = C$$

より

$$x^2 + y^2 - \frac{\mu}{C}y = 0 \quad (4.57)$$

となり、等ポテンシャル線は

$$x^2 + y^2 + \frac{\mu}{C}x = 0 \quad (4.58)$$

となる。等ポテンシャル線は x 軸上に中心をもち、原点において y 軸に接する円群であり、流線は y 軸上に中心をもち、原点で x 軸に接する円群である (図 4.18)。

f. 循環と湧出し

速度ポテンシャル Φ が存在する場合、循環 Γ は次のように表される。

$$\begin{aligned} \Gamma(C) &= \oint_C v_s ds = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \oint_C \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz \right) \\ &= \oint_C d\Phi = [\Phi]_C \end{aligned} \quad (4.59)$$

一方、二次元場の流れの場合には流関数 Ψ が存在するから、閉曲線 C の内から外への流量 (湧出し) は

$$\begin{aligned} Q(C) &= \oint_C v_n ds = \oint_C \frac{\partial \Psi}{\partial s} ds \\ &= \oint_C d\Psi = [\Psi]_C \end{aligned} \quad (4.60)$$

と表される (§ 3.3. b 参照)。

二次元のポテンシャル流れの場合には、複素速度ポテンシャル $W(z) = \Phi(z) + i\Psi(z)$ ($z = x + iy$) に関して次の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{dW}{dz} dz &= \oint_C dW = \oint_C d\Phi + i \oint_C d\Psi \\ &= \Gamma + iQ \end{aligned} \quad (4.61)$$

閉曲線 C の内部で dW/dz が正則であれば、上の積分は 0 であって、循環も湧出しもないことに相当する。流れの中に循環を伴う物体や、渦運動の部分があったり、あるいは湧出しや吸込みがある場合には、上の積分は 0 とはならない。

4.4 完全流体中の円柱

a. 一様流中の円柱

まず、完全流体の一様流中におかれた円柱のまわりの流れについて述べる。この問題を解く正攻法的なやり方は、速度ポテンシャルに関するラプラスの方程式を境界値問題として解いて、解を求めるものである。この方法は、ややめんどろで数学的すぎるので、ここでは前節の等角写像で述べた基本的な流れの組合せとして、解を発見することにする。

いま一様流 $W_1(z) = Uz$ の中に、一つの湧出し $W_2(z) = K \ln z$ をおくと、複素速度ポテンシャルは

$$W(z) = Uz + K \ln z \quad (4.62)$$

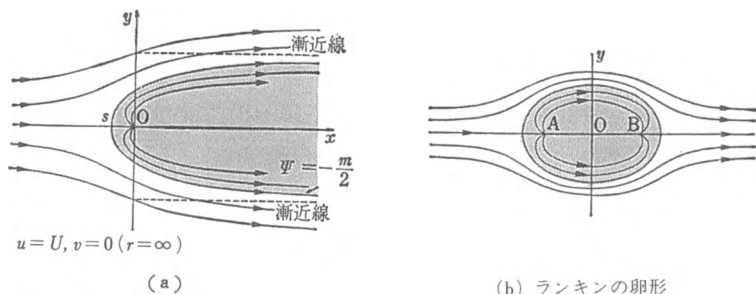


図 4.19 (a) 一様流中におかれた湧出し、および (b) 隣り合った湧出しと吸込み

となり、その表す流れの状況は直感的な想像どおりの図 4.19(a) のようになる。つまり湧出しからの流れが一様流に吹き流されたかっこうである。そこで、この吹き流された流れの中に湧出しと同じ強さの“吸込み”を配置してみたらどうであろうか。結果は図 4.19(b) に示すように、一様流中に卵形の湧出し-吸込みの流体域が取り込まれる。これをランキンの卵形 (Rankine's oval) という。

そこで、この一組の湧出し点と吸込み点を無限に接近させて、ダブレットとしたらどうであろうか？ すなわち、 x 軸の方向の一様流とダブレットの和は式 (4.54) を用いて (ただし、ダブレットの向きは式 (4.54) とは逆の x の負の方向とする)、

$$W(z) = Uz + \frac{Ua^2}{z} \quad (4.63)$$

この流れは $z \rightarrow \infty$ のとき $W \rightarrow Uz$ となり一様流を表す。

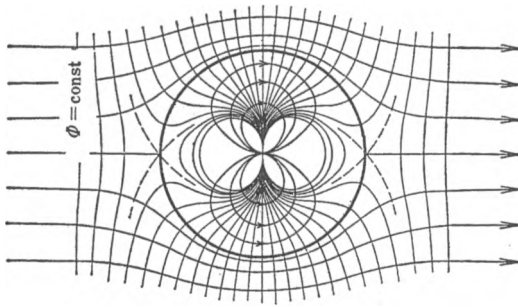


図 4.20 一様流中におかれた二重湧出し (=一様流中の円柱まわりの流れ)

一方, 半径 a の円周上 $z = ae^{i\theta}$ では

$$W(z)|_{z=ae^{i\theta}} = Ua(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = 2Ua \cos \theta \quad (4.64)$$

となる. ここで, W の実数部と虚数部をとって Φ と Ψ を求めると,

$$\Phi = 2Ua \cos \theta, \quad \Psi = 0 \quad (4.65)$$

となる. それゆえ, 半径 a の円周は一つの流線 ($\Psi = 0$) であり, 円の表面とみなすことができる. また, この円周上の接線方向の流速は

$$v_\theta = -\frac{\partial \Phi}{a \partial \theta} = 2U \sin \theta \quad (4.66)$$

となり, 円の前面 $\theta = 0$ と後方 $\theta = \pi$ の点は速度 0 のよどみ点である. したがって, 最初の予想どおり, 式 (4.63) は完全流体の一様流中におかれた円柱まわりの流れの複素速度ポテンシャルを表す.

b. 循環を伴う円柱まわりの流れ

式 (4.63) によって表される流れの原点にさらに強さ Γ_* の渦糸 (式 (4.39)) をおき, 時計まわりの循環を与える. 循環の正負の方向を明確にするために, 時計まわりを正とする循環を Γ_* と書く. 本書では反時計まわりの循環を正としているので, $\Gamma = -\Gamma_*$ である.

$$W = U \left(z + \frac{a^2}{z} \right) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z \quad (4.67 a)$$

$$= U \left(z + \frac{a^2}{z} \right) + i \frac{\Gamma_*}{2\pi} \ln z \quad (4.67 b)$$

上式を z で微分して, 共役速度ベクトルを求めると次のようになる.

$$\frac{dW}{dz} = u - iv = U \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) + i \frac{\Gamma_*}{2\pi} \frac{1}{z} \quad (4.68)$$

速度0のよどみ点の位置は $dW/dz=0$ の条件より

$$\frac{z}{a} = -i \frac{\Gamma_*}{4\pi Ua} \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\Gamma_*}{4\pi Ua}\right)^2} \quad (4.69)$$

となる。循環 Γ_* の強さに応じて、流れの様子は次の三つのケースに分けられる (図 4.21)。

(i) $\Gamma_* < 4\pi Ua$: この場合には円柱の上流側と下流側の対称な二点によどみ点ができる (図 4.21(a))。

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{a} &= \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\Gamma_*}{4\pi Ua}\right)^2} \\ \frac{y}{a} &= -\frac{\Gamma_*}{4\pi Ua} \end{aligned} \right\} \quad (4.70)$$

(ii) $\Gamma_* = 4\pi Ua$: この場合には二つのよどみ点は円柱の下面の一点に集まる (図 4.21 (b))。

(iii) $\Gamma_* > 4\pi Ua$: 循環が十分大きくなると、速度0の点の z は純虚数となり y 軸上に移る (図 4.21 (c))。

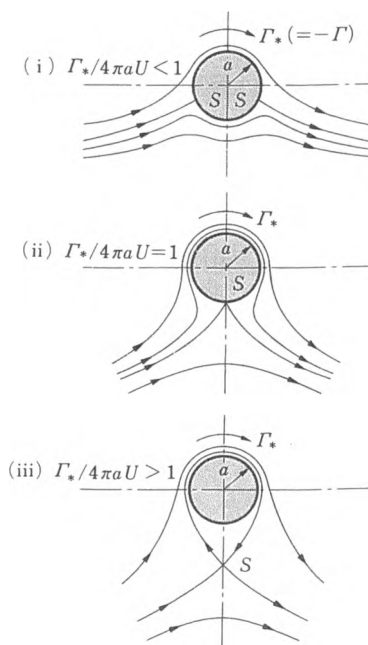


図 4.21 一様流中におかれた循環を伴う円柱まわりの流れ。Sはよどみ点

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{a} &= 0 \\ \frac{y}{a} &= -\frac{\Gamma_*}{4\pi Ua} (+) \sqrt{\left(\frac{\Gamma_*}{4\pi Ua}\right)^2 - 1} \end{aligned} \right\} \quad (4.71)$$

二点のうち一点は円柱の中の点である。

c. 静止した完全流体中を運動する円柱

一様な流れの中の円柱まわりの流れは $W(z) = U(z + a^2/z)$ という複素速度ポテンシャルをもつことを上に述べた。それでは、今度は静止した完全流体中を運動する円柱による流れを考える。これには、一様流と逆向きの運動 $W_1(z) = -Uz$ を流れ全体に与えればよい。そのときの複素速度ポテンシャルは

$$W(z) = \frac{a^2 U}{z} \quad (4.72a)$$

となり、 x 軸上を負の向きに U の速度で進む円柱の中心が原点と一致したときの（あるいは円柱の中心に原点をとったときの）流れを表す。逆に、 x 軸上を正の向きに U の速度で円柱が進む場合は

$$W(z) = -\frac{a^2 U}{z} \quad (4.72b)$$

これはすでに述べたように強さ $a^2 U$ の二重湧出し（吸込みから湧出しへは x 軸の正の方向）の複素速度ポテンシャルである。このことは一見きわめて奇妙に思われる。はたしてそうであろうか？ そのために円柱表面での流速ベクトルを式 (4.72b) より求めてみる。

$$v = \left(\frac{dW}{dz} \right) = \left(\frac{a^2 U}{z^2} \right) \quad (4.73)$$

ここで、 $z = ae^{i\theta}$ とおけば、円柱表面の流速ベクトルは

$$v_{r=a} = Ue^{i2\theta}$$

となる。これより半径方向および円周方向の速度成分を求めるには、 $v_{r=a}$ を半径方向の単位ベクトル $i_r = e^{i\theta}$ に関して表せばよい。そこで、 $v_{r=a}$ を i_r で除して位相角を θ だけ差し引き、その実数部 \mathcal{R} および虚数部 \mathcal{I} を求めればよい。すなわち

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \mathcal{R} \{ v_a \cdot e^{-i\theta} \} = \mathcal{R} \{ Ue^{i\theta} \} = U \cos \theta \\ u_\theta &= \mathcal{I} \{ v_a \cdot e^{-i\theta} \} = U \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (4.74)$$

一方、円柱の表面の各点は x の正の方向に U の速度で動いている。この半径方

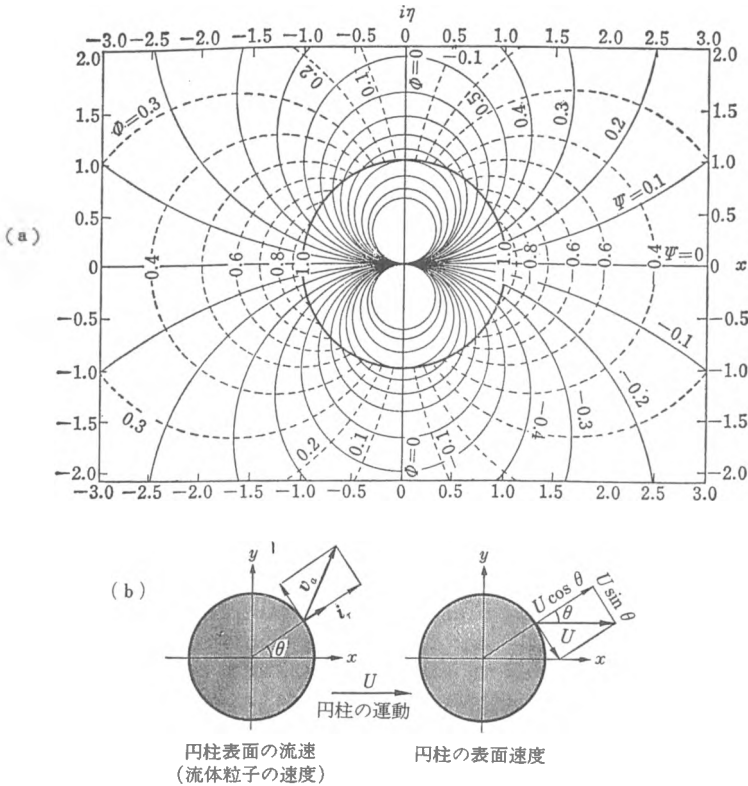


図 4.22 静止した完全流体中を x 軸の正の方向に運動する円柱まわりの流れ
(=ダブレットによる流れ)

向および円周方向の成分は、同じく U を i_r で割ってその実数部と虚数部から

$$\left. \begin{aligned} u_r &= U \cos \theta \\ u_\theta &= -U \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (4.75)$$

となる。

円柱表面では完全流体の流体粒子は円周に沿って滑ることはできるが、円柱表面を突き抜けることはできない。つまり、半径方向の流体粒子の速度は円柱表面の半径方向の移動速度と一致していなければならない。上の式 (4.74), (4.75) はこの条件が満たされていることを示している。したがって、“静止した完全流体中を運動する (必ずしも一定速度でなくてよい) 円柱のまわりの流れは、円柱中心の位置におかれた円柱の進行方向に向けた二重湧出し (doublet) の作る流れ

と同一である” ことがいえた。実在の流体は粘性をもっているのに、上に述べたことは一般には成立しないが、円柱が静止状態から加速度運動を始めた瞬間では粘性の作用は円柱の表面に限られて遠くまで及ばないので、ダブレットによる流れの場を見ることができる。

4.5 ミルン-トムソンの円定理

さまざまな流れの中に円柱をおいた場合の新しい流れの場を、もとの流れの複素速度ポテンシャルから簡単に求める一般的方法として、次のようなミルン-トムソン (Milne-Thomson) の円定理がある。

“複素速度ポテンシャル $W_0(z)$ で表される無限に広い流れの場に、原点を中心とする半径 a の円柱をおくとき、新しい流れの場の複素速度ポテンシャルは

$$\begin{aligned} W(z) &= W_0(z) + \overline{W_0\left(\frac{a^2}{z}\right)} \\ &= W_0(z) + \overline{W_0\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right)} \end{aligned} \quad (4.76)$$

で与えられる。”ここに、 $\overline{W_0(z)}$ は z に共役数 \bar{z} を入れ換えたものの共役関数を意味する。すなわち、複素関数 $W_0(z) = \Phi_0(z) + i\Psi_0(z)$ に対して、共役な複素関数 $\overline{W_0(z)} \equiv \overline{W_0(\bar{z})}$ は、次のように定義される。

$$\begin{aligned} \overline{W_0(\bar{z})} &= \Phi_0(\bar{z}) - i\Psi_0(\bar{z}) \\ &= \Phi_0(x-iy) - i\Psi_0(x-iy) \end{aligned} \quad (4.77)$$

また、式 (4.76) 中の a^2/\bar{z} を、

$$z^* = \frac{a^2}{\bar{z}} \quad (4.78)$$

とおけば、 z^* は半径 a の円に関する z の鏡像である (図 4.23)。点 P と原点 O を結ぶ直線上の $\overline{OP} \times \overline{OQ} = a^2$ となる点 Q は、点 P の円に関する鏡像 (相反点) と呼ばれる。

ミルン-トムソンの円定理を証明するには、円柱の表面 $z_a = x_a + iy_a$ を横切る流れがないこと、および無限遠でもとの流れであることを示せばよい。円柱の表面は $x_a^2 + y_a^2 = z_a \bar{z}_a = a^2$ である。この関係を考慮すれば、式 (4.76) の右辺の第二項のアーギュメントは $\overline{a^2/z_a} = a^2/\bar{z}_a = z_a$ となる。したがって、円柱表面では $\overline{W_0(a^2/z_a)} = \overline{W_0(z_a)}$ であるから、 $W = \Phi + i\Psi$ は

$$W(z_a) = W_0(z_a) + \overline{W_0(z_a)} = 2\Re\{W_0(z_a)\} \quad (4.79)$$

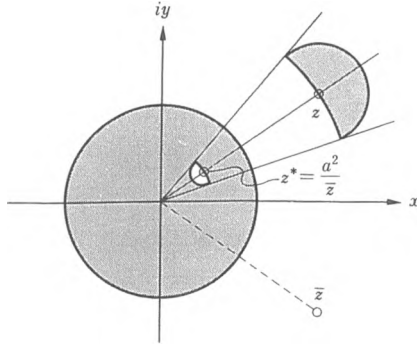


図 4.23 点 $z^* = \frac{a^2}{\bar{z}}$ は点 z の鏡像

より実数である。つまり、 W の虚数部である流関数 ψ は、円柱の表面では $\psi = 0$ であり、円柱表面は一つの流線となっている。

また、 $|z| \rightarrow \infty$ では、

$$W(z) \longrightarrow W_0(z) + \text{const} \quad (|z| \rightarrow \infty) \quad (4.80)$$

となる。ここに、 $\text{const} = \overline{W_0}(0)$ で定数項は省略できるから、上式は無限遠では $W(z)$ はもとの流れと一致することを示している。

たとえば、一様流は $W_0(z) = Uz$ であり $\overline{W_0}(a^2/z) = \overline{U(a^2/\bar{z})} = Ua^2/z$ であるから、一様流中に円柱をおいた場合の流れは $W = U(z + a^2/z)$ となり、確かに上に示した円のまわりの流れ(式(4.63))を表している。ミルン-トムソンの定理の応用例を次に示す。なお、§4.9.a.(2)にいま一つの応用例がある。

(1) 円のまわりの渦糸の作るポテンシャル流

円の周囲に渦糸を配置した場合、円の表面を貫く流れはないという境界条件を満たす流れ場をミルン-トムソンの定理によって求めることができる。いま、点 $P(z_0)$ に強さ Γ の渦糸があるとすると、その複素速度ポテンシャルは

$$W_0(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - z_0) \quad (4.81)$$

である。これに対し、まず上式右辺で $z \rightarrow a^2/\bar{z}$ とおき換えると上式は

$$\frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(a^2/\bar{z} - z_0) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \{ \ln(\bar{z} - a^2/z_0) (-z_0/\bar{z}) \} \quad (4.82a)$$

$$= \frac{\Gamma}{2\pi i} \left\{ \ln \left(\bar{z} - \left| \frac{a}{z_0} \right|^2 \bar{z}_0 \right) - \ln \bar{z} + i\pi \ln z_0 \right\} \quad (4.82b)$$

上式右辺の最後の定数は複素速度ポテンシャルからは無視してよいから、再び上

式の共役形をとれば，ミルノートムソンの定理により求める複素速度ポテンシャルは次のようになる。

$$W(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \left\{ \underbrace{\ln(z-z_0)}_{z_0 \text{ 点の渦糸}} - \underbrace{\ln(z-z_0^*)}_{\substack{\text{鏡像点の逆回} \\ \text{転の渦糸}}} + \underbrace{\ln z}_{\substack{\text{回転の} \\ \text{中心の} \\ \text{同方向} \\ \text{渦糸}}} \right\} \quad (4.83)$$

ここに， $z_0^* = \gamma z_0$ ($\gamma = |a/z_0|^2$) は z_0 の鏡像である。式 (4.83) は「円近傍の点 P に渦糸をおくとき，円表面の境界条件を満たす複素速度ポテンシャルは，点 P の鏡像 Q (z_0^*) に強さが同じで逆回転の渦糸と，円の中心に同じ強さの渦糸を配置すればよい」ことを示している。

(2) 円近傍の湧出しの作るポテンシャル流

円の近くの点 z_0 に強さ K の湧出し

$$W_0(z) = K \ln(z-z_0) \quad (4.84)$$

を配置する場合の複素速度ポテンシャルも，上と同様にミルノートムソンの定理により次のように求まる。

$$W(z) = K \{ \ln(z-z_0) - \ln z + \ln(z-z_0^*) \} \quad (4.85)$$

ここに， $z_0^* = |a/z_0|^2 z_0$ 。

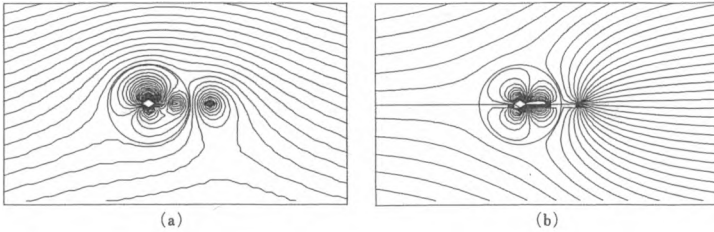


図 4.24

4.6 円柱に働く力

完全流体中の円柱の表面に働く応力は圧力だけである。したがって，この x, y 成分ごとの合力を計算すれば，円柱に働く抵抗と揚力を求めることができる。円柱表面に作用する圧力は，圧力方程式(すなわち一般化されたベルヌーイの定理)より

$$\frac{p}{\rho} = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} q^2 + \Pi \right) \quad (4.86)$$

で求められる。この式からわかるように、円柱に働く力には $\partial \Phi / \partial t$ の項つまり流れの非定常性が関与するから、流線のパターンが同じであっても（というのは流速場は各瞬間の境界条件で決まるから）、定常流の場合と非定常流の場合とでは円柱に作用する力は異なってくる。

a. 定常流中の円柱の場合——(ダランベールの背理)

定常な一様流中の円柱まわりの流れの複素速度ポテンシャル W は式 (4.67 a) により

$$W = U \left(z + \frac{a^2}{z} \right) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z$$

である。ここに、 Γ は反時計まわりを正とする循環。したがって、円柱表面上の速度の二乗 q^2 は式 (4.15 a), (4.16) より

$$\begin{aligned} \bar{v}_\alpha &= \frac{dW}{dz} \Big|_{z=ae^{i\theta}} = \left[U \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z} \right]_{z=ae^{i\theta}} \\ &= U(1 - e^{-i2\theta}) - i \frac{\Gamma}{2\pi a} e^{-i\theta} \end{aligned} \quad (4.87)$$

$$\begin{aligned} q^2 &= \left(\frac{dW}{dz} \right) \left(\frac{d\bar{W}}{dz} \right) \Big|_{z=ae^{i\theta}} = 2U^2(1 - \cos 2\theta) + \left(\frac{\Gamma}{2\pi a} \right)^2 \\ &\quad - 4 \left(\frac{U\Gamma}{2\pi a} \right) \sin \theta \\ &= \left(2U \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi a} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.88)$$

となる。

式 (4.88) の関係を式 (4.86) に代入すれば圧力 p が求められる。円柱に働く抗力 $D = P_x$ と揚力 $L = P_y$ はそれぞれこの圧力 p の x 方向の成分および y 方向の成分を円柱表面について積分して次のように求められる。

$$D = P_x = - \int_0^{2\pi} a(p)_{r=a} \cos \theta \, d\theta = 0 \quad (4.89)$$

$$L = P_y = - \int_0^{2\pi} a(p)_{r=a} \sin \theta \, d\theta = -\rho U \Gamma \quad (4.90 \text{ a})$$

$$= \rho U \Gamma_* \quad (4.90 \text{ b})$$

上の式によれば、“定常流中の円柱には抵抗は働かない”という、われわれの経験とは全く相反する結果を与える。(このことは逐一計算しなくても図 4.20 に見るように流れの前後対称性から容易に引き出せる結論であるが。) これをダラ

ンペールの背理 (d'Alembert paradox) という。これは明らかに流体の基本的属性である粘性を無視したためである。流体力学の永い歴史はこのパラドックスとの闘いでもあった。粘性を無視したことの影響は二重にきいている。一つは円柱表面に作用する剪断応力が生じないことであり、他の一つはいつそう重要であるが、粘性の作用のため、流れが円柱表面から剝離し流れのパターン、したがって円柱まわりの圧力分布が一変することである。これらの問題については後章で触れる。

また、一様流中の静止円柱に働く揚力も零である。しかし、円柱まわりに時計まわりの循環 $\Gamma = -\Gamma_*$ (< 0) があれば、揚力 $L = \rho U \Gamma_*$ が上向きに、あるいは反時計まわりの循環があれば揚力は下向きに生じる。これは、クッター-ジューコフスキー (Kutta-Joukowski) の定理と呼ばれ、物体の形が円柱以外の場合にも成立する。図 4.21 からわかるように、円柱まわりに時計まわりの循環があると円柱まわりの流線は円柱の下側に比べて上側で密に、したがって流速は速くベルヌーイの定理により圧力は逆に低くなる。このために円柱の上下の圧力差により揚力が生じるものと解釈できる。野球のボールに回転を与え、カーブやドロップを投げるのもこれと同じ理屈によるもので、これをマグヌス (Magnus) 効果という (図 4.25)。これらについてはすでに § 1.7.c において述べた。

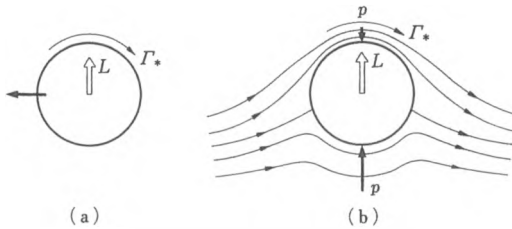


図 4.25 マグヌス効果

(a) 静止流体中を運動する回転円柱に働く揚力, (b) 一様流中の回転円柱に働く揚力。

b. 非定常流中の円柱あるいは加速度運動をしている円柱に働く力——(付加質量)

流れが非定常流であるか、または円柱が非定常運動を行っている場合には、圧力分布に式 (4.86) の $\partial\phi/\partial t$ の項が関係してくる。これらの場合、複素速度ポテンシャルを用いて § 4.6.a と同様の計算を行えば、次表のような結果が得られる。ただし、円柱の中心は x 軸上を直線運動し、その中心は $x_0(t)$ で表されるとする。

表 4.3

	非定常流中の円柱	静止流体中を非定常運動する円柱	
$W(z)$	$U(t)\left(z + \frac{a^2}{z}\right) - i\frac{\Gamma}{2\pi} \ln z$	$-\frac{a^2 \ddot{x}_0(t)}{z - x_0(t)} - i\frac{\Gamma}{2\pi} \ln(z - x_0(t))$	(4.91)
D (抵抗)	$-2\pi a^2 \rho \dot{U}$	$\pi a^2 \rho \ddot{x}_0$	(4.92)
L (揚力)	$-\rho U \Gamma$	$-\rho U \Gamma$	(4.93)
M' (付加質量)	—	$\pi a^2 \rho$	(4.94)

(注) Γ は反時計まわりを正とする。

揚力は § 4.6. a の場合と同じであるが、非定常流中の円柱あるいは非定常運動をする円柱には、その流体の加速度 \dot{U} および物体の加速度 \ddot{x} と円柱の排除した流体の単位長さあたりの質量 $\pi a^2 \rho$ とに比例した抵抗力が生じる。その比例係数は円柱の場合それぞれ -2 および 1 となっている。この値は物体の形により異なるものである。静止流体中を運動する円柱まわりの流体の流れを表す図 4.22 からわかるように、円柱はその加速度運動につれてまわりの流体塊を運動させる。まわりの流体を加速度運動させるためには、円柱は加速度運動にかかわる流体塊の質量に比例する力 D を流体に与えなければならない。その反作用として円柱は流体から力を受ける。この力はいわば流体の慣性による抵抗であり、あたかも運動する円柱（物体）の質量が増加したとみなせるので、加速度運動をする物体の場合には、 $M' = D/\ddot{U}$ を付加質量あるいは仮想質量 (added mass, virtual mass) という。

流体が気体の場合には排除する流体の密度 ρ は小さいので、一般にはこの付加質量は問題とならない。しかし、飛行船や熱気球のように物体の実質密度が気体（大気）のそれと同程度の場合は、付加質量の影響を無視してはならない（図 4.26）。水その他の液体中では付加質量は常に大きな問題である。最近は大形の海洋構造物が造られるようになってきたが、この場合浮力の影響と同様に波浪運動に伴う付加質量の増加、それによる共振振動数の低下を考慮しなければならない。

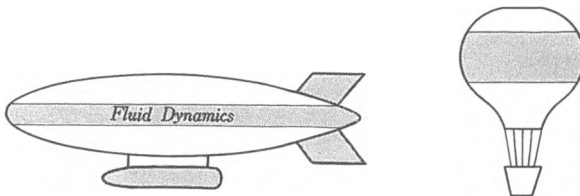


図 4.26 飛行船や熱気球の運動に付加質量の効果は無視できない

い。また、魚類などの水中動物の運動には表面積に比例する粘性抵抗と体積に比例する慣性抵抗とが主に働く。魚は流線形のため形の抵抗（圧力抵抗）はほとんど働かない。それゆえ、大きな生物ほど粘性の抵抗より加速度運動の抵抗を感じることになる。

表 4.4 完全流体中の物体に働く力

完全流体中の物体	定常流（等速運動）	Drag=0	（ダランベールの背理）
		Lift= $-\rho U\Gamma$	（クッター-ジューコフスキー理論）
	非定常流（加速度運動）	Drag $\propto\rho\forall\dot{U}$	（ \forall : 排除体積）
		Lift= $-\rho U\Gamma$	

4.7 平板まわりの流れ

a. 平板に斜めにあたる流れ

式 (4.95) で表される複素関数

$$z = \zeta + \frac{a^2}{\zeta} \quad (4.95)$$

は前節で述べたように (z が ζ , W が z と入れ換わっているが), ζ -面での半径 a の円柱まわりの流れの複素速度ポテンシャルを表している。このとき、上式で $\zeta = ae^{i\theta}$ とおけば明らかなように円柱表面は、

$$z = a(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = 2a \cos \theta$$

z -面の実軸上の長さ $4a$ の平板に対応している (図 4.27)。また、式 (4.95) において $|\zeta| \rightarrow \infty$ とするとき、 $z \rightarrow \zeta$ となるから、原点から遠くへ行くにつれて ζ と z

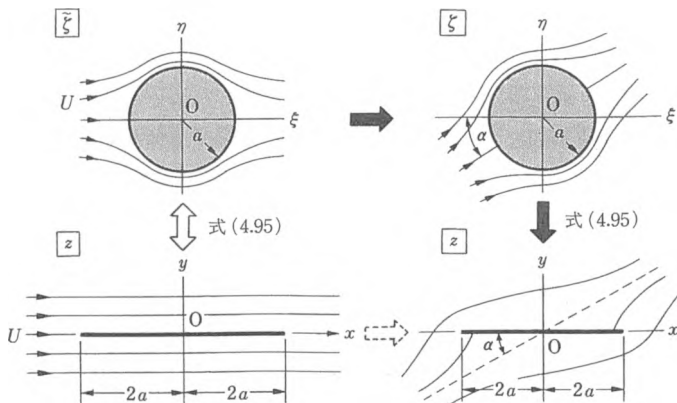


図 4.27 ジューコフスキー変換による平板まわりの流れの解法

は同一の流れ（ないしは図形）を表すようになる。また、 ζ -面上の実軸に対して角度 α で円の中心に向かう流線 $\zeta = \pm re^{i\alpha}$ は、 z -面上で平板から十分離れる ($r \rightarrow \infty$) と、 $z \rightarrow \pm re^{i\alpha}$ となり、平板に斜めにあたる流れとなっている。

そこで、式 (4.95) を円柱まわりの流れの複素速度ポテンシャルと考えることをやめ、単に ζ -面上の半径 a の円を z -面の実軸上の長さ $4a$ の平板に写像する解析関数であるとみなすことにする。式 (4.95) をジュークフスキー変換と名づける。これにより ζ -面の円のまわりの流れは z -面の平板のまわりの流れに等角写像される。なお、式 (4.95) を書き直せば、 $\zeta = \{z \pm \sqrt{z^2 - 4a^2}\} / 2$ となるが、 z -面に対応すべき ζ は円上およびその外側にあるから + 記号のみをとり次のようになる。

$$\zeta = \frac{z + \sqrt{z^2 - 4a^2}}{2} \quad (4.96)$$

ところで、一様流が実軸に対して角度 α をなす場合の円のまわりの流れを考える (図 4.27 右上)。この流れの場合は図 4.27 左上の ζ -面の座標を α だけ回転させたものであり、 ζ -面上での流れの様子は、流れの方向が全体として角度 α だけ回転している以外は、流れが ζ -面の実軸方向を向いている場合と全く同じである。したがって、座標軸を回転すれば、もとの複素速度ポテンシャル面への写像関数 (つまり、複素速度ポテンシャル) は同じである。一方、 ζ -面と ξ -面との写像関数は、

$$\xi = \zeta e^{-i\alpha} \quad (4.97)$$

である。したがって、 ζ -面の円のまわりの流れの複素速度ポテンシャルは次のようになる。

$$\begin{aligned} W &= U \left(\xi + \frac{a^2}{\xi} \right) \\ &= U e^{-i\alpha} \left(\zeta + \frac{a^2}{\zeta} e^{i2\alpha} \right) \end{aligned} \quad (4.98)$$

円のまわりの渦なし流れを平板まわりの流れに写像する式 (4.96) を上式に代入すれば、 z -面上の平板まわりの流れの複素速度ポテンシャルとして次式を得る。

$$\begin{aligned} W &= U e^{-i\alpha} \left(\frac{z + \sqrt{z^2 - 4a^2}}{2} + \frac{2a^2}{z + \sqrt{z^2 - 4a^2}} e^{i2\alpha} \right) \\ &= U (z \cos \alpha - i \sqrt{z^2 - 4a^2} \sin \alpha) \end{aligned} \quad (4.99)$$

ここに述べた方法は、平板まわりの流れの場合 (z -面) と複素速度ポテンシャル面

(W -面) との直接の写像関数を求めることがむずかしいため、よくわかっている円柱まわりの流れを媒介とし、平板まわりの流れの複素速度ポテンシャルを求めたものである。

このように、物理面と複素速度ポテンシャル面との間にいくつかの中間写像面を介して、互いの複素平面間の特別な性質を利用しつつ、次々に写像を行っていく方法はよく使われる手法で、次の § 4.8 や § 4.9 でも応用される。

さて、平板まわりの流れの速度は

$$v = \frac{dW}{dz} = \frac{dW/d\zeta}{dz/d\zeta} \quad (4.100)$$

により与えられる。ここに、式 (4.95), (4.98) より

$$\frac{dz}{d\zeta} = 1 - \frac{a^2}{\zeta^2} \quad (4.101 a)$$

$$\frac{dW}{d\zeta} = Ue^{-i\alpha} \left(1 - \frac{a^2}{\zeta^2} e^{i2\alpha} \right) \quad (4.101 b)$$

流速が零となる点 (よどみ点) は $dW/d\zeta = 0$ より

$$\zeta = \pm ae^{i\alpha}$$

である。これに対応する平板上の位置は上式右辺の符号に対応してそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= \zeta_1 + \frac{a^2}{\zeta_1} = 2a \cos \alpha \\ z_2 &= \zeta_2 + \frac{a^2}{\zeta_2} = -2a \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (4.102)$$

となり、平板の前後によどみ点が生じる。

一方、板端流速は、 $\zeta = \pm a$ を式 (4.101 b) に代入すれば、 $dz/d\zeta = 0$ より、

$$\left. \frac{dW}{dz} \right|_{z=\pm 2a} = \infty, \quad \text{すなわち } q = \infty \quad (4.103)$$

となる。

b. 循環をもつ平板に斜めにあたる流れ

平板のまわりに時計まわりの循環 $\Gamma = -\Gamma_*$ がある場合の ζ -面の複素速度ポテンシャルは

$$W = U \left(\zeta + \frac{a^2}{\zeta} \right) + \frac{i\Gamma_*}{2\pi} \ln \zeta \quad (4.104)$$

となる。これに、 $\zeta = \zeta e^{-i\alpha}$ を代入すれば

$$W = Ue^{-i\alpha} \left(\zeta + \frac{a^2}{\zeta} e^{i2\alpha} \right) + \frac{i\Gamma_*}{2\pi} \ln \zeta + \frac{\Gamma_*}{2\pi} \alpha \quad (4.105)$$

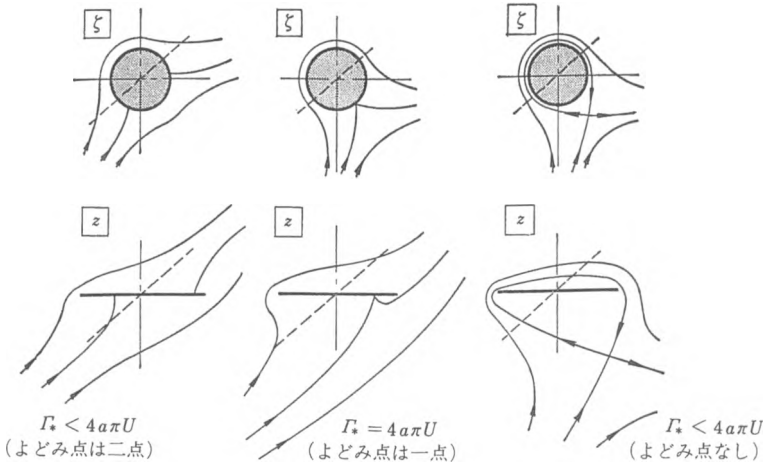


図 4.28 循環をもつ平板まわりの流れと円柱まわりの流れの対応

となる。上式に式 (4.96) を代入すれば循環をもつ平板まわりの流れの複素速度ポテンシャルが求まる。図 4.28 に Γ_* の大きさによって変化する三種類の流れのパターンを載せる。さて、上式を ζ で微分すれば

$$\frac{dW}{d\zeta} = Ue^{-i\alpha} \left(1 - \frac{a^2}{\zeta^2} e^{i2\alpha} \right) + \frac{i\Gamma_*}{2\pi\zeta} \quad (4.106)$$

となる。これより $dW/d\zeta = 0$

$$\zeta^2 + \frac{i\Gamma_* e^{i\alpha}}{2\pi U} \zeta - a^2 e^{i2\alpha} = 0 \quad (4.107)$$

となる点を求めると、

$$\zeta = \frac{e^{i\alpha}}{4\pi U} \left\{ -i\Gamma_* \pm \sqrt{16\pi^2 a^2 U^2 - \Gamma_*^2} \right\} \quad (4.108)$$

Γ_* の増加とともに $dW/d\zeta = 0$ すなわち $q=0$ の点は平板上を移動していく。さきに述べたように、板端 ($z = \pm 2a$) では $dz/d\zeta = 0$ であり、ここでは $q = \infty$ となっている。しかし、 Γ_* を増加していって、右の板端 ($z = 2a$) に対応する $\zeta = a$ で $dW/d\zeta = 0$ となるようにすれば、 dW/dz は有限となる。この条件を満たす Γ_* は式 (4.107) より

$$\Gamma_* = 4\pi a U \sin \alpha \quad (4.109)$$

である。(もう一つの速度が 0 となる点は、 $\zeta_1 = -ae^{i2\alpha}$ ($z_1 = -2a \cos 2\alpha$) で平板前面のよどみ点となっている。) また、クッター-ジュ-コフスキーの定理により平

板に働く揚力 L および揚力係数 C_L は

$$L = \rho U \Gamma_* = 4\pi\rho U^2 a \sin \alpha \quad (4.110)$$

$$C_L = \frac{L}{(1/2)(4a)\rho U^2} = 2\pi \sin \alpha \quad (4.111)$$

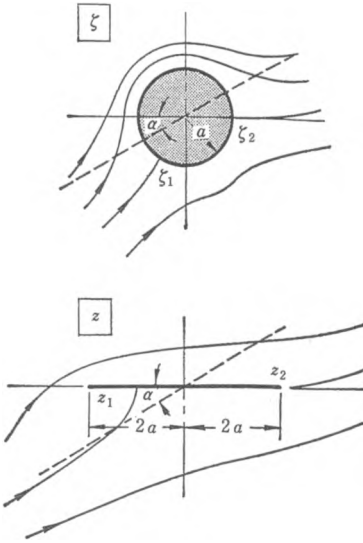


図 4.29 クッタの条件-ジュコフスキーの仮定を満たす流れ ($\Gamma_* = 4\pi U \sin \alpha$)

となる。なお、平板に働く揚力の作用点は板の前縁から全板長の $1/4$ ($x = -a$) の点である。

一般に、平板や翼の後縁部で流速が有限であることを要求すると、その物体まわりの循環 Γ が定まり、流れはその後縁部で接線方向に滑らかに流れ去る (図 4.29)。この条件をクッタの条件またはジュコフスキーの仮定と呼んでいる。この条件は単に後縁部で速度が無窮大になる不自然さを避けるための技巧ではなく、迎え角 α が小さく、流れが物体の背後で剝離しない場合には実際このような循環が平板あるいは翼のまわりに生じている (§5.5 参照)。

取っ手を軸に自由に回転できるようにしたうちわの面に向かって風を当てると、うちわは面が風の方向に直になった位置で (風をもろに受ける形で) 止まる。これは「うちわは風の抵抗を少なくするように面を風と平行になるようにする」のではないかとの予想を覆す結果である。しかし、このことは、流れを受ける平板には中心と前縁との半分 (つまり、全長の $1/4$ の点) で風に垂直に揚力が働き、これが平板を中心軸まわりに風をもろに受ける方向に回転させる力として働くことにより説明できる。

4.8 シュバルツ-クリストッフエルの定理

これまでは、さまざまな複素関数をもってきて、それによってどんな流れの場が表されるかを調べた。しかし実際問題としては、逆に流れの中の物体の形あるいは流れの境界が決まっている、その流れの場を表す複素速度ポテンシャルを求

めることが必要である。本節では、物理面で任意の多角形を別の複素平面の上半面に写像する複素関数を求める方法について述べる。物理面の多角形と複素速度ポテンシャル面の多角形間の写像を仲立ちする中間写像面として、以下に述べる複素平面を利用することができる。

a. 定理の発見的誘導

さて、先に (§ 4.3. b) 複素関数 ζ

$$\zeta = Az^n$$

あるいは

$$z = A^{-1/n} \zeta^{1/n} \quad (4.112)$$

(ここに、 ζ, z は複素変数で $\zeta = \xi + i\eta$, $z = x + iy$) が z -面内の原点をはさむ角度 π/n の壁の間の流れを表す複素速度ポテンシャルであることを述べた。この複素関数を基礎にして、多角形の内部を別の複素平面の上半面に等角写像する方法を考えよう。複素関数、式 (4.112) の表す物理面 (z -平面) と複素速度ポテンシャル面 (ζ -面) との写像関係は図 4.30(a) のようである。

われわれが目的としている写像は、㉔ 図 4.30(a) の点 O および点 O' がそれぞれ

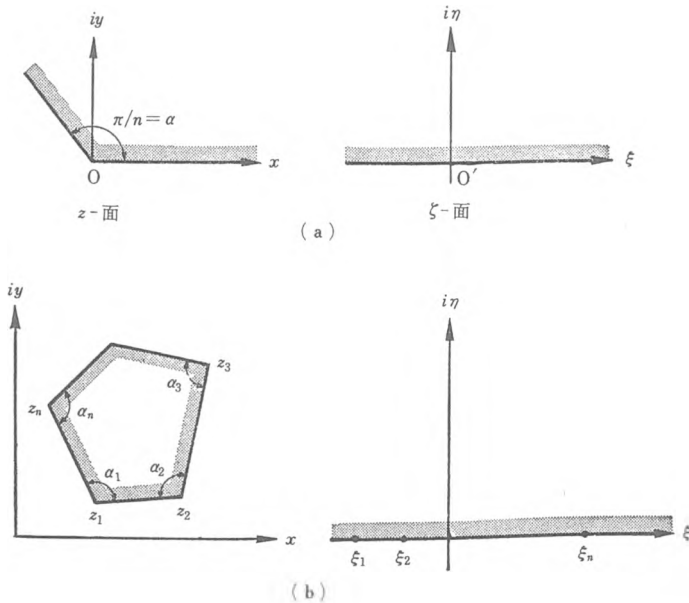


図 4.30 シュバルツ-クリストッフェルの変換

れ z -面と ζ -面の原点ではなく、図 4.30(b) のように z -面上の任意の点 z_i および ζ -面の実軸上の任意の点 ξ_i であること、⑥ 式 (4.112) の写像関係がその任意点の近傍に限られるようにすることである。③ の条件を満たすには式 (4.112) において

$$z \rightarrow (z - z_i), \quad \zeta \rightarrow (\zeta - \xi_i) \quad (4.113)$$

とすればよい。次に ⑥ の条件を満たすためには、この写像関係が局所的に成立するように、式 (4.112) を微分表示にすればよい。

頂角を α とすれば、 $1/n = \alpha/\pi$ より式 (4.112) の微分は式 (4.113) の関係を考慮して、次のように表せる。

$$\frac{dz}{d\zeta} = \left(A^{-1/n} \frac{\alpha}{\pi} \right) (\zeta - \xi_i)^{\alpha/\pi - 1} \quad (4.114)$$

上の関係は $z = z_i$, $\zeta = \xi_i$ の近傍についての特異性を表している。すなわち $\zeta \rightarrow \xi_i$ とするとき、 $0 < \alpha < \pi$ ならば $dz/d\zeta \rightarrow \infty$ となる。このとき、多角形の他の頂点はこの特異性を表さないから、右辺の係数部分に含まれていると考えればよいであろう。こうした微分表示は他のすべての頂点 ξ_j についてもいいうるわけであり、したがって、多角形の内部を ζ -面の上半面に写像する変換式は

$$\frac{dz}{d\zeta} = K (\zeta - \xi_1)^{\alpha_1/\pi - 1} (\zeta - \xi_2)^{\alpha_2/\pi - 1} \dots (\zeta - \xi_n)^{\alpha_n/\pi - 1} \quad (4.115)$$

となる。ここに、 ξ_i は ζ -面の実軸上の点であり、また

$$\sum_{i=1}^n (\pi - \alpha_i) = 2\pi \quad (4.116)$$

上式において、多角形の頂点の写像点 ξ_i は ζ -面の実軸上に $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n$ の順にとり、これに対応する多角形の頂点 z_1, z_2, \dots, z_n は多角形を反時計まわりに回るように配列されている。これをシュバルツ-クリストッフエル (Schwarz-Christoffel) の定理 (あるいは変換) という。

定理の証明: ξ 軸上を $\zeta = \xi_i$ をこえて正の方向に進むとき、対応する多角形の頂点 z_i で多角形の辺の偏角がこの変換により $(\pi - \alpha)$ だけ変わることを次に示そう。いま、多角形の辺に沿って多角形の内部を左手に見るように (反時計まわりに) 進むとき、複素平面上で dz , $d\zeta$, K , $(\zeta - \xi_i)$ を極座標表示で

$$dz = dr_1 e^{i\theta_1}, \quad d\zeta = d\xi = dr_2, \quad K = r_3 e^{i\theta_3}, \quad (\zeta - \xi_i) = r_4 e^{i\theta_4}$$

とする。これらを式 (4.115) に代入すれば

$$\left(\frac{dz}{d\zeta} \right) \frac{dr_1}{dr_2} e^{i\theta_1} = \{ r_3 r_4^{(\alpha/\pi - 1)} \} e^{i(\theta_3 + \theta_4(\alpha/\pi - 1))}$$

dz の偏角は上式より $\theta_1 = \theta_3 + \theta_4(\alpha/\pi - 1)$ である。ここで、 $(\zeta - \xi_i)$ の偏角 θ_4 は $\xi < \xi_i$ のとき $\theta_4 = \pi$ で、 $\zeta = \xi_i$ の近傍で小円を画いて $\xi_i < \xi$ に移ると $\theta_4 = 0$ に変わる。このとき θ_1 は、 $\theta_1 = \theta_3 + (\alpha - \pi) = \theta_3 - (\pi - \alpha)$ から $\theta_1 = \theta_3$ に変わる。つまり、角度 $(\pi - \alpha)$ だけ多角形の辺の偏角が増す (図 4.31)。

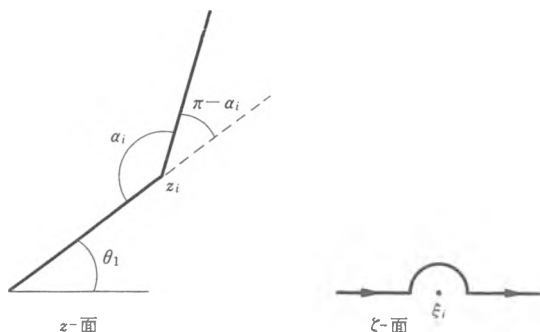


図 4.31 シュバルツ-クリストッフェルの定理 (変換) による z -面の多角形の頂点での偏角の変化

なお、この変換を適用するにあたって次の二点に留意する必要がある。

(i) 三点の対応は任意: 多角形の頂点 z_1, z_2, \dots, z_n に対応する ζ -面の n 個の点のうち 3 個は勝手に選ぶことができ、残り $(n-3)$ 個は多角形のそれぞれの形により一意的に決まる。なぜならば、未定パラメーターは、 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ のほかに係数 K と積分定数 C の $(n+2)$ 個である。一方、 n 角形は内角が決まっているから、 n 個の頂点のうち 1 個を除き $(n-1)$ 頂点の ξ 軸上の対応点を固定すれば多角形が決まる。すなわち、未知数 $(n+2)$ に対し、条件は $(n-1)$ である。したがって、3 個の頂点の対応を ξ 軸上で任意に選ぶことができる。

(ii) $\xi_i = \pm\infty$ 点は無関係: ζ -面の $\xi = \pm\infty$ を多角形の頂点に対応させる場合には、それに対応する $dz/d\zeta$ の右辺の項は捨ててよい。なぜならば、 ξ_i を $-\infty$ と対応させる場合には、式 (4.115) の K を $K'(-\xi_i)^{-(\alpha_1/\pi-1)}$ とおいて

$$\frac{dz}{d\zeta} = K' \left(\frac{\zeta - \xi_1}{-\xi_1} \right)^{\alpha_1/\pi-1} (\zeta - \xi_2)^{\alpha_2/\pi-1} \dots (\zeta - \xi_n)^{\alpha_n/\pi-1}$$

と変形し、ここで $\xi_1 \rightarrow -\infty$ とすれば、シュバルツ-クリストッフェル変換は

$$\frac{dz}{d\zeta} = K' (\zeta - \xi_2)^{\alpha_2/\pi-1} \dots (\zeta - \xi_n)^{\alpha_n/\pi-1} \quad (4.117)$$

となるからである。

例 4.1 図 4.32 に示すような z -面内の半無限の帯状領域を ζ -面の上半面に写像する複素関数をシュバルツ-クリストッフエルの定理を応用して求める. 帯状領域の頂点に図のように記号をつける. この四点のうち三点は勝手に ζ -面の ξ

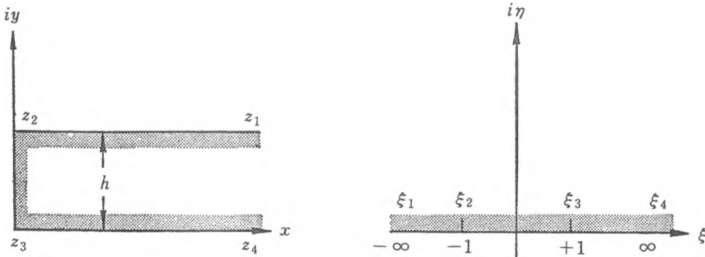


図 4.32 シュバルツ-クリストッフエルの写像による帯状半領域の半無限平面への写像

軸上の点に対応づけることができるから, z_1, z_2, z_3 の対応点を

$$\xi_1 = -\infty, \quad \xi_2 = -1, \quad \xi_3 = 1$$

のように選ぶ. このとき, 無限遠点 z_4 は $\xi = \infty$ になければならない. $\xi = \pm\infty$ に対応する項は変換式より抜いてよいから, 式 (4.115) はこのとき

$$\frac{dz}{d\xi} = \frac{A}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \quad (4.118)$$

となる. これを積分すれば次式となる.

$$z = A \cosh^{-1} \xi + c \quad (4.119)$$

定数を決めるために, まず $z_3 = 0, \xi_3 = 1$ の対応関係を上式に代入すれば

$$0 = A \cosh^{-1}(1) + c$$

より $c=0$ が定まる. 次に, $z_2 = ih, \xi_2 = -1$ の対応関係より

$$ih = A \cosh^{-1}(-1)$$

したがって, $\cosh^{-1}(-1) = i\pi$ であるから $A = h/\pi$ が求まる. 結局,

$$z = \frac{h}{\pi} \cosh^{-1} \xi$$

あるいは

$$\xi = \cosh\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (4.120)$$

が z -面上の半無限帯状領域を ζ -面の上半面に写像する関係式である.

b. 壁面に湧出しをもつ水路内の流れ

図 4.33 に示すような幅 a の水路の壁面上の点 O に強さ m の湧出しがある場

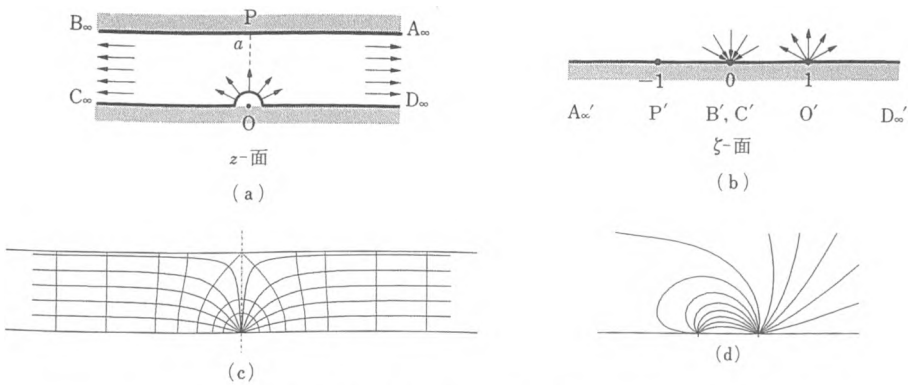


図 4.33 湧出しのある水路の流れ

合を取り扱う (図 4.33(a)). 湧出しはさておいて, まず z -面の水路を ζ -面の上半面に写像する. 任意に選べる三点は $O, P, B_\infty (=C_\infty)$ で, その対応は湧出し点 $O (z=0)$ が $\zeta=1$, 点 $P (z=ia)$ が $\zeta=-1$, 左側無限遠点 $B_\infty (=C_\infty)$ を $\zeta=0$ とする. この場合, 反時計まわり径路のかこむ多角形の内部が水路の流れであり, これが ζ -面の上半面に写像される (図 4.33(b)). 点 O および P では内角が π であり, 式 (4.115) の右辺の項は $(\zeta \pm 1)^0 = 1$ となることから, シュバルツ-クリストッフェル変換は次のようになる.

$$\frac{dz}{d\zeta} = K\zeta^{-1} \quad (4.121)$$

これを積分すれば,

$$z = K \ln \zeta + c$$

となる. O 点と P 点との対応関係より $0 = K \ln 1 + c$, $ia = K \ln(-1) + c$. したがって, $-1 = e^{ix}$ を考慮すれば $K = a/\pi$, $c = 0$ となり, z - ζ 間の等角写像関係は次のようになる.

$$\zeta = e^{\pi z/a} \quad (4.122)$$

さて, ζ -面を新しい物理面と考え, この ζ -面と複素速度ポテンシャル面 W との写像関係を利用する. そこで ζ -面の O' 点 ($\zeta=1$) に強さ m の湧出しをおく. ここからの湧出量の半分は $B'C'$ 点に吸い込まなければならないから, $\zeta=0$ には強さ $m/2$ の吸込みをおけばよい. したがって, ζ -面内の流れの複素速度ポテンシャルは

$$W = m \ln(\zeta - 1) - \frac{m}{2} \ln \zeta = m \ln(\zeta^{1/2} - \zeta^{-1/2}) \quad (4.123)$$

である (図 4.33(d)). ところで, 式 (4.122) の関係を代入すると,

$$\begin{aligned} \zeta^{1/2} - \zeta^{-1/2} &= e^{\pi z/(2a)} - e^{-\pi z/(2a)} \\ &= 2 \sinh \frac{\pi z}{2a} \end{aligned}$$

であるから, 水路内の流れの複素速度ポテンシャルとして次式を得る (定数項は省略できる). (図 4.33(c))

$$W = m \ln \left\{ \sinh \frac{\pi z}{2a} \right\} \quad (4.124)$$

c. ダム下の砂礫層内の地下水流

図 4.34 のような厚さ d の透水性の地層 (砂礫層) の上に造られた堤幅 b の小ダムからの浸透流量と透水層内の流線および等ポテンシャル線を求めよう. ただし, 地下水流はダルシー (Darcy) 則にしたがい, 流速 q は流線方向 s の水頭 h の勾配に比例し

$$q = -k \frac{dh}{ds} \quad (4.125)$$

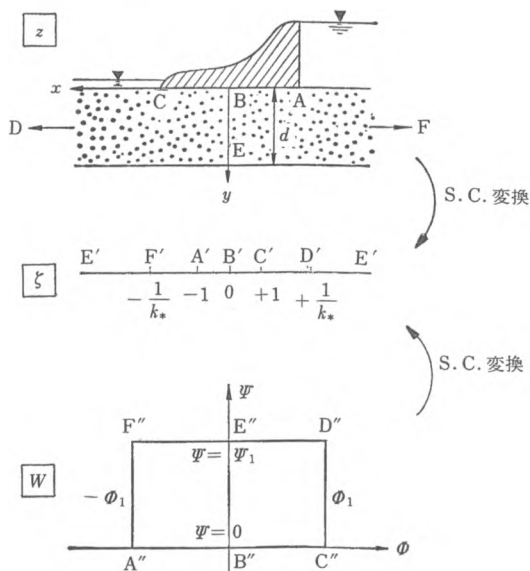


図 4.34 透水層内の流れ

で表される。ここに、 k は透水係数である。

ダルシー則、式 (4.125), は地下水の流速がスカラー量 h の勾配 (gradient) から導かれること、すなわち地下水流は速度ポテンシャル

$$\Phi = -kh + \text{const} \quad (4.126)$$

をもつことを意味している。(ただし、このことは地下水流が完全流体の渦なし流れであることを意味するものではない。ダルシー則自体がポテンシャルの定義 (§3.2.a) を満たしているのである。また、ダルシー則にいう流速 q は透水層間隙中の流体の真の流速ではなく、みかけの流速である。)

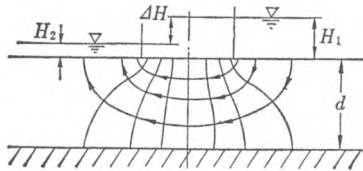


図 4.35 シュバルツ-クリストッフェル変換による浸透流の等ポテンシャル線と流線

地下水流れの場合には、実感と合うように流れがポテンシャルの高い所から低い方に流れるよう $\Phi = kh$ と定義するのが普通であるが、本書では全体の記述の統一上、式 (4.126) のように定義する。したがって、流れはポテンシャル Φ の低い方から高い方へ生じる。

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (4.127)$$

この関係を連続の方程式 $\partial u / \partial x + \partial v / \partial y = 0$ に代入すれば、速度ポテンシャル Φ に関するラプラスの方程式となる。

$$\nabla^2 \Phi = 0$$

すでに §4.1.c で述べたように、流れが速度ポテンシャル Φ をもてば、コーシー-リーマンの関係を満たすこれに共役な関数である流関数 Ψ とから複素速度ポテンシャル面 $W = \Phi + i\Psi$ を作ることができる。

そこで、図 4.34 を参照しつつ、物理面 z の境界線 (これらは等ポテンシャル線あるいは流線を形成する) と複素速度ポテンシャル面 W との対応関係を調べると、(流線 AC を基準として $\Psi_0 = 0$ とする。また、ダム上下流の水位差を $\Delta H = H_1 - H_2$ とし、 $\Delta \Phi = -k\Delta H$ とする。)

z-面	W-面
\overline{AF} (等ポテンシャル線)	$\overline{A''F''}$ $\phi = -\phi_1 (= -\Delta\phi/2)$
\overline{CD} (等ポテンシャル線)	$\overline{C''D''}$ $\phi = \phi_1$
\overline{AC} (流線)	$\overline{A''C''}$ $\psi = \psi_0 (= 0)$
\overline{DF} (流線)	$\overline{D''F''}$ $\psi = \psi_1$

と対応がつけられる。すなわち、z-面の無限帯状領域 ABCDEF の内部は、W-面の矩形領域 A''B''C''D''E''F'' の内部に対応している。

ところで、一見簡単なようでも二つの矩形領域（この場合には無限帯状領域と矩形領域）の間を直接写像させることはむずかしい。そこで物理面 z と複素ポテンシャル面 W 内のそれぞれの矩形領域を、シュバルツ-クリストッフエルの定理により一つの間接写像領域 ζ -面の上半平面に対応させる関係を求め、この ζ -面を介して z-W の対応が正しく行われるように調節するようにする。

(i) まず、z- ζ の写像関係を求める。流れの場合は iy 軸（下向き）に関して対称であることを考慮して、A, C, D, F 点をそれぞれ $\xi = -1$, $\xi = 1$, $\xi = 1/k_*$, $\xi = -1/k_*$ ($k_* < 1$: 未定) に対応させると、シュバルツ-クリストッフエルの交換により

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\zeta} &= C_1 (\zeta + 1/k_*)^{0/x-1} (\zeta + 1)^{x/x-1} (\zeta - 1)^{x/x-1} (\zeta - 1/k_*)^{0/x-1} \\ &= C_1 \left(\zeta^2 - \left(\frac{1}{k_*} \right)^2 \right)^{-1} \end{aligned} \quad (4.128)$$

の関係が得られる。これを積分すれば次のようになる。

$$\begin{aligned} z &= C_1 \int \frac{d\zeta}{\zeta^2 - (1/k_*)^2} \\ &= C_1 k_* \tanh^{-1}(k_* \zeta) + C_2 \end{aligned} \quad (4.129)$$

A 点の対応すなわち $z = -b/2 \leftrightarrow \zeta = -1$ および C 点の対応 $z = b/2 \leftrightarrow \zeta = 1$, E 点の対応 $z = id \leftrightarrow \xi = \infty$ を考慮すれば、定数 $C_1 k_* = 2d/\pi$, $C_2 = 0$ および

$$k_* = \tanh \frac{\pi b}{4d} \quad (4.130)$$

が定まる。したがって、

$$\zeta = \frac{\tanh(\pi z/2d)}{\tanh(\pi b/4d)} \quad (4.131)$$

(ii) 同様に、 ζ -W の写像は次のようになる。

$$\frac{d\zeta}{dW} = C_3(1-\zeta)^{-1/2}(1+\zeta)^{-1/2}(1/k_*-\zeta)^{-1/2}(1/k_*+\zeta)^{-1/2} \quad (4.132)$$

上式を積分して,

$$W = \Phi + i\Psi = C_3 \int \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta^2-1)(\zeta^2-(1/k_*)^2)}} + C_4 \quad (4.133)$$

次に A', C' 点の対応関係, $\zeta = \mp 1 \leftrightarrow W = \mp \Phi_1$ を上式に代入すれば,

$$\begin{aligned} -\Phi_1 &= C_3' \int_0^{-1} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k_*^2\zeta^2)}} + C_4 \\ &= -C_3' K(k_*) + C_4 \\ \Phi_1 &= C_3' \int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k_*^2\zeta^2)}} + C_4 \\ &= C_3' K(k_*) + C_4 \end{aligned}$$

となる. ここに, $K(k_*)$ は k_* を母数とする第一種楕円積分である. これより, $C_4 = 0$ および

$$C_3' = \frac{\Phi_1}{K(k_*)} = -\frac{\Delta\Phi}{2K(k_*)}$$

したがって,

$$W = -\frac{\Delta\Phi}{2K(k_*)} \int_0^\zeta \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k_*^2\zeta^2)}} \quad (4.134)$$

(iii) さて, 浸透流量 $Q (= \Psi_{DF} - \Psi_{AC} = \Psi_1 - \Psi_0)$ を求めるために, W -面上の D' 点とこれに対応する ζ -面上の D' 点を考える. D' 点は $\zeta = 1/k_*$ であるから

$$\begin{aligned} W = \Phi_1 + i\Psi_1 &= \frac{-\Delta\Phi}{2K} \int_0^{1/k_*} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k_*^2\zeta^2)}} \\ &= -\frac{\Delta\Phi}{2K} (K + iK') \end{aligned} \quad (4.135)$$

ここに, K' は $\sqrt{1-k_*^2}$ を母数とする第一種完全楕円積分である. 式 (4.135) よりその虚数部をとって

$$\Psi_1 = \frac{-\Delta\Phi K'}{2K}$$

したがって, 浸透流量 Q は AC と DF の流関数の差から次のようになる.

$$Q = \Psi_1 - \Psi_0 = \frac{-K'}{2K} \Delta\Phi = \frac{kK'}{2K} \Delta H \quad (4.136)$$

4.9 自由流線をもつ流れ

すでに § 4.3. b において述べたように、頂角が π より小さい楔状の角を回る完全流体の流れは、そこで流速が無限大、圧力が負の無限大となってしまう。このような状態は実在の流体では起こりえないもので、実際の流れはそこで壁から剥がれ小さなキャビティあるいは後流領域を作る。このような場合にキャビティや後流領域中の流体を静止状態の流体（死水領域あるいは静水領域）でおき換え、その内部の圧力は一定であるとみなすことができる。したがって、剥離流線（自由流線）上の流速はベルヌーイの定理により一定不変である。

一般に、壁面から剥がれる自由流線の上では流れの方向は変化しても、その大きさは上述のように一定である。一方、自由流線が離れる壁面上では流速の大きさはわからないが、方向は既知である。このことを利用すれば、等角写像を用いて自由流線をもつ流れ（不連続流）の場を求めることができる。

自由流線をもつ流れの考え方

自由流線	… 流速一定 (BC, B'C')	流向 (?)
壁面上の流線	… 流速 (?)	流向既知 (AB, A'B')

実際の流れにおいては、死水領域内の流体は静止しているのではなく、複雑な渦運動をしており、また死水領域をかこむ不連続面も不安定である（第Ⅲ篇参照）。

このような流れのモデルは死水領域の理論あるいは不連続流の理論とも呼ばれ、ヘルムホルツ (Helmholtz) やキルヒホッフ (Kirchhoff) 以来、完全流体の理論による物体抵抗の説明のために研究されてきた。現在も、水力機械や水中翼のキャビテーションあるいは角形の構造物に働く風力を求めるための理論として研究が行われている。

共役速度ベクトル $\bar{v} = qe^{-i\theta}$ をその絶対値 q に関する成分と方向 θ の成分とに分離するために、 $\bar{v} = dW/dz$ の逆数の対数をとって複素関数 Ω を定義する。（ここで、 \bar{v} の逆数をとるのは、 $\zeta - \Omega$ と $\zeta - W$ の関係を接続しやすくするため。）式 (4.15c) より

$$\frac{dW}{dz} = qe^{-i\theta} \quad (4.137)$$

$$\Omega = \ln \frac{dz}{dW} = \ln(q^{-1}) + i\theta \quad (4.138)$$

すなわち、複素関数 Ω の実数部は $\ln(q^{-1})$ 、虚数部は θ である。

物理面 z と複素速度ポテンシャル面 W との直接の写像が見つからない場合に、中間にいくつかの中間写像面をおく方法について前節に述べた。自由流線はその形は単純ではないが、流体力学的には $q = \text{一定}$ という簡単な性質をもつ。これを利用すれば、自由流線 ($q = \text{一定}$: BC, B'C') と壁面 ($\theta = \text{一定}$: AB, A'B') でかこまれる領域を Ω -面の矩形領域に対応させることが容易にできる (図 4.36(b))。一方、壁面およびこれより剥離する自由流線 (ABC, A'B'C') は複素速度ポテンシャル面の Φ 軸に平行な直線 ($\Psi = \text{一定}$) であるから、同じように流れの領域を W -面の矩形領域に対応させうる (図 4.36(c))。これら二つの複素平面上の矩形領域は、シュバルツ-クリストッフ変換により、新しい複素平面 (ζ -面) の上半面に写像できる。したがって、 ζ -面を介して W と $\Omega (= \ln(dz/dW))$ とを関係づけることができ、結局は W - z の写像関数を見出すことができる。

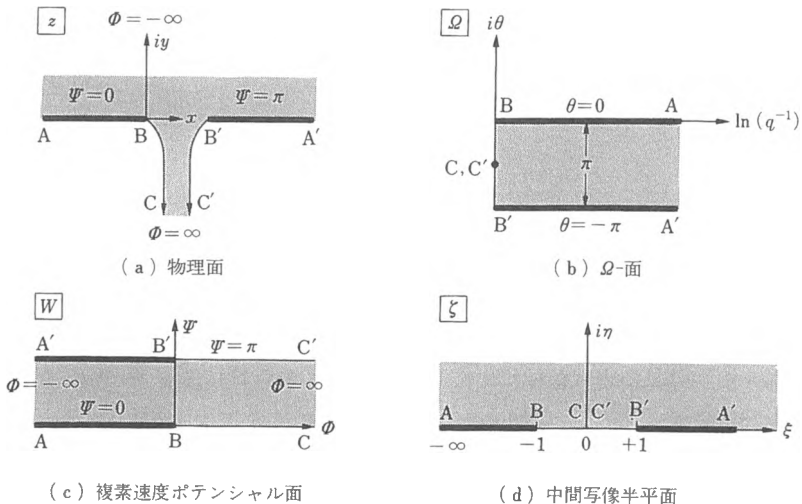


図 4.36 スリットからの不連続流

a. スリットからの不連続流

大きな水槽の底にかけられたスリットから液体が流れ出る場合を考える。この流体運動はスリットが細長いとすれば、二次元的である。座標系および記号を図

4.36 のようにとる.

(1) シュバルツ-クリストッフェルの定理による方法

(i) W - ζ 面の対応: 水槽の底面 AB とスリット端 B よりの自由流線 BC は一つの流線であるから, この流関数の値を $\Psi=0$ とおく. 同様に, $A'B'C'$ も流線であり, これを $\Psi=\pi$ ととる. このとき, z -面内の流体の運動領域は複素速度ポテンシャル面 (W -面) での Φ 軸に平行な幅 π の帯状の無限領域に対応している. 流れの対称性から B, B' 点は同じポテンシャルをもつので, これを $\Phi=0$ とする. このような無限帯状領域を A, B, C (=C'), A' の四点を頂点とする四辺形と考え, これを中間写像面 (ζ -面) の上半面に写像する. W -面上の A, B, C の三点を ζ -面上の点に

$$(W = -\infty, 0, \infty) \longleftrightarrow (\zeta = -\infty, -1 (=e^{i\pi}), 0)$$

のように対応させるとシュバルツ-クリストッフェル変換は次のようになる.

$$\frac{dW}{d\zeta} = c_1(\zeta+1)^{\alpha/\alpha-1}\zeta^{-1}, \quad W = c_1 \ln \zeta + c_2 \quad (4.139)$$

ABC の対応関係より, $c_1 = -1$, $c_2 = -i\pi c_1 = i\pi$ となり, 結局 W - ζ の写像は次のように決まる.

$$W = -\ln \zeta + i\pi \quad (4.140 a)$$

あるいは

$$\zeta = e^{-W+i\pi} = -e^{-W} \quad (4.140 b)$$

(ii) Ω - ζ 面の対応: 次に, Ω -面と ζ -面の対応を見ると, 壁面上の流線は流速の大きさは一定ではないが方向が定まっていて, AB 上で $\theta=0$, A'B' 上で $\theta=-\pi$ である. 一方, 自由流線上では方向は変わるものの流速は一定であるから, 単位を適当に選んで $q=1$ とすることができる. したがって, Ω -面上では流体は幅 π の半無限の帯状領域に対応している. この帯状領域を W -面の場合と共通の中間写像面 (ζ -面) に写像する. この写像関数はすでに (例 4.1) 示したように $\Omega = d_1 \cosh^{-1} \zeta + d_2$ である. Ω -面上の ABC 等 ($\Omega = \infty, 0, -i(\pi/2), i\pi, \dots$) の対応点 $\zeta = -\infty, -1, 0, 1, \dots$ などとなるが, B 点と B' 点の Ω - ζ 面上の対応関係

$$(\Omega = 0, -i\pi) \longleftrightarrow (\zeta = -1, 1)$$

から $d_1=1$, $d_2=-i\pi$ が得られる. これにより, Ω - ζ の変換式は次のようになる.

$$\Omega = \cosh^{-1} \zeta - i\pi \quad (4.141 a)$$

あるいは,

$$\zeta = \cosh(\Omega + i\pi) = -\cosh \Omega \quad (4.141 b)$$

(iii) W - z 面の対応: 以上により, ζ -面を介して W - Ω ($W = \ln dz/dW$, すなわち W - z) の関係がついたので, これらの関係式を整理してみる. 式 (4.140 b) と式 (4.141 b) より, ζ を消去し式 (4.138) を代入すれば

$$\cosh \ln \left(\frac{dz}{dW} \right) = e^{-W}$$

となる. $\cosh X = (e^X + e^{-X})/2$ および $e^{\ln Y} = Y$ の関係を上式に代入すれば,

$$\left(\frac{dz}{dW} \right)^2 - 2e^{-W} \left(\frac{dz}{dW} \right) + 1 = 0 \quad (4.142)$$

となる. これを解けば, 次のようになる.

$$\frac{dz}{dW} = e^{-W} \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \sqrt{e^{-2W} - 1} \quad (4.143)$$

ところで, A 点では $W = \Phi + i\Psi = -\infty$ であり, また $q=0$, $\theta=0$ すなわち $dz/dW = q^{-1}e^{i\theta} = \infty$ であるから, 上式の複号のうち+記号をとらなければならない. これを積分すると

$$\begin{aligned} z &= -e^{-W} + \int \sqrt{e^{-2W} - 1} dW \\ &= -e^{-W} - \sqrt{e^{-2W} - 1} + \tan^{-1} \sqrt{e^{-2W} - 1} + c \end{aligned}$$

となる. B 点の対応関係 $W=0$, $z=0$ より $c=1$ となり, したがって次式を得る.

$$z = 1 - e^{-W} - \sqrt{e^{-2W} - 1} + \tan^{-1} \sqrt{e^{-2W} - 1} \quad (4.144)$$

(iv) 自由流線の形および縮脈係数: 自由流線の形を求めるには, $\Psi=0$ である BC を考えればよい. BC 上では $W=\Phi (>0)$ であるから, これを上式に代入し, $e^{-2\Phi} < 1$ を考慮すれば

$$\begin{aligned} z &= 1 - e^{-\Phi} - \sqrt{e^{-2\Phi} - 1} + \tan^{-1} \sqrt{e^{-2\Phi} - 1} \\ &= 1 - e^{-\Phi} - i\sqrt{1 - e^{-2\Phi}} + i \tanh^{-1} \sqrt{1 - e^{-2\Phi}} \end{aligned} \quad (4.145)$$

を得る. 上式の両辺を実数部と虚数部とに分ければ, Φ をパラメーターとする自由流線 BC の式が得られる.

$$\left. \begin{aligned} x &= 1 - e^{-\Phi} \\ y &= \tanh^{-1} \sqrt{1 - e^{-2\Phi}} - \sqrt{1 - e^{-2\Phi}} \end{aligned} \right\} \quad (4.146)$$

ところで、無限遠点 CC' を考えれば、ここでは流線が平行となるので流速は断面内で一様となっており $q=q_\infty=1$ である。それゆえ、流量は $Q=q_\infty \times \overline{CC'} = \overline{CC'}$ である。一方、流関数の差としても流量は定義され、 $Q=\Psi_{C'}-\Psi_C=\pi$ となる。したがって、無限遠での噴流の幅は

$$\overline{CC'} = \pi$$

となる。

また、図 4.36(a) を参照して物理面 z における自由流線の形を表す式 (4.146) 上の式で $\phi \rightarrow \infty$ とすれば、 B 点が原点であることから $\overline{BC} = x_c - x_b = x_c = 1$ となる。したがって、 $\overline{BB'}$ は $\overline{BB'} = 2 \times \overline{BC} + \overline{CC'} = 2 + \pi$ である。これより噴流幅とスリット幅との比—噴流の縮脈係数— k は

$$k = \frac{\overline{CC'}}{\overline{BB'}} = \frac{\pi}{2 + \pi} = 0.611 \quad (4.147)$$

となる。この値は実験値とよく一致する。(参考: § 2.2.a に述べた水槽の中へ十分深く挿し入れた流出口—ボルダ (Borda) の流出口—からの流れは上と同じ方法でも解くことができ、 $k=0.5$ である。)

(2) 円定理を利用する直接法

上に述べた解き方は正統的 (伝統的) な方法 (Helmholtz, 1868) であるが、次にミルン—トムソンの円定理を利用する直接的な方法を紹介する。この解法は円定理の応用の仕方とその有効性を学ぶためにもよい例題となっている。

まず、二次元場の速度ベクトルを表す複素変数 $w = dW/dz = u - iv$ を導入する。 w -面を速度平面もしくはホドグラフ面 (hodograph plane) という。複素速度面 w と物理面 z の対応を見ると次のようになっている (図 4.37)。

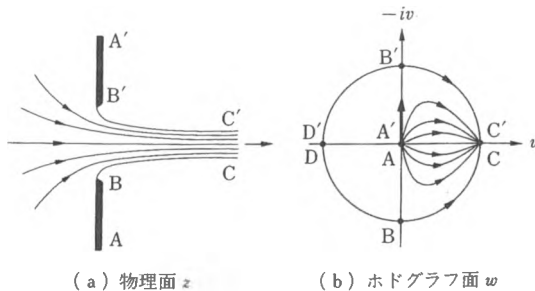


図 4.37

表 4.5 物理面と複素速度面の対応

物理面 ($z=re^{i\theta}$)	複素速度面 (w)
AB上: $\theta=\pi/2$ (速度の方向一定)	$w=0$ (点A) $\rightarrow -i$ (点B)
BC上: 速度=一定, 圧力=一定	$u^2+v^2=1$ (w -面上の単位円)
C (無限遠点): 流線は x 軸に平行	$u=1, v=0$

壁面 AB に沿って流れ、噴出口から自由流線 BC として流れる流線は、 w -面上では原点 ($w=0$) から虚軸上をすすみ、さらに単位円の上を回って実軸上の点 C に到る。また、対称軸である z -面の実軸 (噴流の中心軸) 上を流れる流線は、 w -面上でも実軸に対応する。これら二本の流線の間を流れる流れは、 w -面上では第四象限の 4 分の 1 単位円内にある。

したがって、 w -面上では原点 A に湧出しがあり、単位円上の C に吸込みがあることになる。これを虚軸に関して左側に反転すると、原点 A に強さ 1 の湧出し、 $C(w=1)$ とその対称点 $D(w=-1)$ にそれぞれ強さ 1/2 の吸込みがある流れとなる。そこでまず、無限に広い流れ場の中の $w=\pm 1$ に強さ $m/2$ の吸込みをおき、虚数軸に関して対称な流れを考える。ホドグラフ面 w を一種の物理面と考えると、複素速度ポテンシャル面 W_0 は次式で表される。(以下の記述において、ホドグラフ面の w (小文字) と複素速度ポテンシャル W (大文字) とを混同しないように注意。)

$$\begin{aligned} W_0(w) &= -\frac{m}{2} \{ \ln(w-1) + \ln(w+1) \} \\ &= -\frac{m}{2} \ln(w^2-1) \end{aligned} \quad (4.148)$$

この流れ場に円定理 (式 (4.76)) を適用する。

$$\begin{aligned} W(w) &= W_0(w) + \overline{W_0(a^2/\bar{w})} \\ &= -\frac{m}{2} \ln(w^2-1) - \frac{m}{2} \ln\left(\frac{1}{w^2}-1\right) \\ &= -m \ln \{ (w^2-1)/w \} \end{aligned} \quad (4.149)$$

上式は

$$W(w) = m \ln w - m \ln(w+1) - m \ln(w-1) \quad (4.150)$$

と書けるから、これは原点に強さ m の湧出し、 $w=\pm 1$ に同じく強さ m の吸込みをおいたときの流れ場である。

一方、 $w=dW/dz$ であるから w と z の関係は

$$\begin{aligned} dz &= \frac{1}{w} \frac{dW}{dw} dw \\ &= m \left(\frac{1}{w^2} - \frac{2}{w^2-1} \right) dw \end{aligned} \quad (4.151)$$

である。これを積分し、 w -面の実数軸と虚数軸がそれぞれ z -面の実数軸と虚数軸に対応するように積分定数を選べば、

$$z = m \left(\ln \frac{1+w}{1-w} - \frac{1}{w} \right) \quad (4.152)$$

となる。

自由流線 $B'C'$ は図 4.37 より明らかなように、 $w = e^{i\theta}$ ($0 < \theta < \pi/2$) に対応し

$$z = m \left(\ln \frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} - e^{-i\theta} \right) \quad (4.153)$$

である。したがって、 $(1+e^{i\theta})/(1-e^{i\theta}) = \cot(\theta/2) \cdot e^{i\pi/2}$ の関係を用いて、上式の z を実数部と虚数部に分けると

$$\begin{aligned} x &= m \left(\ln \cot \left(\frac{\theta}{2} \right) - \cos \theta \right) \\ y &= m \left(\frac{\pi}{2} + \sin \theta \right) \end{aligned} \quad (4.154)$$

となる。 $\theta = \pi/2$ と $\theta = 0$ での y 座標より、縮脈係数は次のように得られる。

$$\frac{y_{\theta=0}}{y_{\theta=\pi/2}} = \frac{\pi}{\pi+2} \approx 0.611 \quad (4.155)$$

b. 平板に衝突する噴流

図 4.38 のように流速 U_∞ の噴流が長さ l の平板に直角に衝突している。この噴流の物理面 (z -面) の各点各線に対応する Ω -面、 ζ -面、 W -面の点と形は同図に記入されている。これを参照して、

(i) Ω - ζ の写像関係はシュバルツ-クリストッフエルの定理により

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{d\zeta} &= \frac{K}{\zeta \sqrt{\zeta^2-1}} \\ \Omega &= -iK \cosh^{-1} \left(-\frac{1}{\zeta} \right) + c \end{aligned}$$

と求められる。 Ω -面上の点 B' 、 A_∞ 、 B が、

$$(\Omega = -i\pi, \infty, 0) \longleftrightarrow (\zeta = -1, 0, 1)$$

に対応することにより、

$$\Omega = \cosh^{-1} \left(-\frac{1}{\zeta} \right) - i\pi \quad (4.156)$$

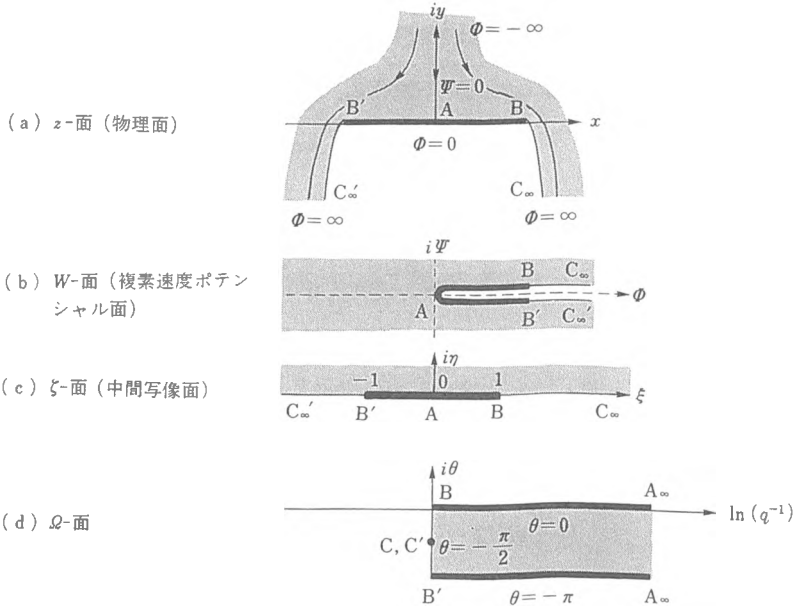


図 4.38 平板に衝突する噴流

上式を変形すれば $\cosh \Omega = 1/\zeta$ すなわち $e^\Omega + e^{-\Omega} = 2/\zeta$ となる.

(ii) この関係と Ω の定義式 $\Omega = \ln(U_\infty dz/dW)$, すなわち $e^\Omega = U_\infty dz/dW$ より次の関係式が導かれる.

$$\left. \begin{aligned} U_\infty \frac{dz}{dW} &= \frac{1}{\zeta} + \sqrt{\frac{1}{\zeta^2} - 1} \\ U_\infty \frac{dz}{dW} &= \frac{1}{\zeta} - \sqrt{\frac{1}{\zeta^2} - 1} \end{aligned} \right\} \quad (4.157)$$

(iii) 一方, W - ζ 面の対応は, シュバルツ-クリストッフエルの定理を用いて

$$\frac{dW}{d\zeta} = K'\zeta, \quad W = \frac{1}{2}K'\zeta^2 \quad (4.158)$$

式 (4.157), (4.158) より, W を消去すれば

$$U_\infty \frac{dz}{d\zeta} = K'[1 + \sqrt{(1-\zeta^2)}] \quad (4.159)$$

上式を B' より B まで, $\zeta = -1$ から $\zeta = 1$ まで積分すれば

$$U_\infty l = K' \int_{-1}^1 [1 + \sqrt{(1-\zeta^2)}] d\zeta$$

ここで、 $\zeta = \sin \theta$ とおけば、

$$= K' \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos \theta) \cos \theta \, d\theta = K' \left(2 + \frac{\pi}{2} \right) \quad (4.160)$$

これより K' が $K' = 2U_\infty l / (\pi + 4)$ と決まる。また、式 (4.158) より

$$W = \frac{U_\infty l}{\pi + 4} \zeta^2 \quad (4.161)$$

(iv) 平板に働く抵抗：ベルヌーイの定理

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} q^2 = \frac{p_\infty}{\rho} + \frac{1}{2} U_\infty^2$$

より、板に働く上下流側の圧力の差の積分として、抵抗は

$$\begin{aligned} D &= \int (p - p_\infty) dx = \frac{1}{2} \rho \int (U_\infty^2 - q^2) dx \\ &= \frac{1}{2} \rho \int \left\{ U_\infty^2 - \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 \right\} dz \\ &= \frac{1}{2} \rho l U_\infty^2 - \frac{1}{2} \rho \int_{-1}^1 \left(\frac{dW}{d\zeta} \right)^2 \left(\frac{d\zeta}{dz} \right)^2 dz \, d\zeta \\ &= \frac{\pi \rho l U_\infty^2}{\pi + 4} \end{aligned} \quad (4.162)$$

これより、平板に働く抵抗係数は

$$C_D = \frac{D}{(\rho/2) l U_\infty^2} = \frac{2\pi}{\pi + 4} = 0.88 \quad (4.163)$$

となる。しかし、実験によれば、レイノルズ数が十分大きいとき（粘性の影響が無視しうる時） $C_D \cong 2$ であり、上に求めた死水領域による C_D の理論値はその約半分である。