

7. 粘性流体の基礎方程式

7.1 ナビエ-ストークスの方程式

a. 粘性係数

流体はその変形に際して抵抗を現す。この関係は変形速度と剪断応力の関係として表すことができる。最も単純な場合として、間隙を粘性流体で満たした二つの平行平板の一方を固定し、他方をそれに平行に動かす場合を考える（このような流れをクエット (Couette) 流という）。座標軸および記号を図 7.1 のようにとると、下の平板に働く力——剪断応力 τ は

$$\tau = \mu \left(\frac{du}{dy} \right)_{y=0} \quad (7.1)$$

と表される。ここに、 μ は粘性係数 (viscosity; 粘性率, 粘度とも訳されている) と呼ばれる。このニュートン (1687) により提出された関係は、実在のほとんどすべての流体について成立するもので、この法則にしたがう流体をニュートン流体 (Newtonian fluid) と呼んでいる。上の関係はより一般的な変形速度と剪断応力との関係

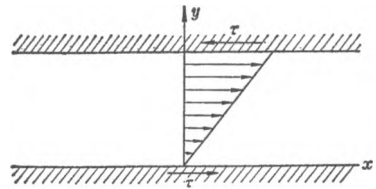


図 7.1

$$\tau = f_n \left(\frac{du}{dy} \right) \quad (7.2)$$

の特殊な場合と考えることができる。事実、分子構造の複雑な高分子化合物が合成されるようになると、式 (7.1) にしたがわない流体が多く見られるようになった。こうした流体を非ニュートン流体 (Non-Newtonian fluid) と呼び、それらはさらに $\tau \sim du/dy$ 曲線の形により、擬塑性 (pseudo-plastic) 流体、ダイラタント (dilatant) 流体、ビンガム (Bingham) 流体などに分類される。

幸い、われわれの生活圏である空気や水をはじめとして、天然に存在する流体

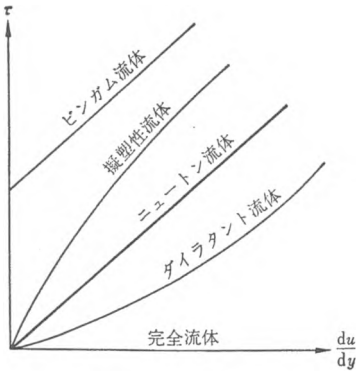


図 7.2

な方向の力（剪断応力）とに分けられ、後者はさらに y 軸方向の成分と z 軸方向の成分とに分けられ、結局三つの成分よりなる。この3成分を表すのに $\tau_{\alpha\beta}$ とし、最初の添字 α は考えている面の方向を、2番目の添字は力の成分方向を示すものとする。したがって、いま例にとった x 軸に垂直な単位面に働く力の3成分は

$$\tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz}$$

となる。ここに、法線応力 τ_{xx} を他と区別して σ_{xx} と書く場合がある。

一点における面の方向としては x, y, z の3軸方向を考えなければならないから、流体中の一点での応力は $3 \times 3 = 9$ 個の成分をもち

$$P = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

と一般的に表すことができる。これを、**応力テンソル** (stress tensor) と呼ぶ。応力テンソルの非対角成分が零となる方向の座標軸を主軸という。流体中の一点の温度、密度等は方向性をもたない状態量でありスカラー (scalar) と呼ばれる。また、一点の流速は大きさや方向をもつベクトル (vector) である。

応力テンソルは、対角成分が相等しい対角テンソルである。すなわち

はニュートン流体であるので、本書では非ニュートン流体は取り扱わないことにする。

b. 応力記号と応力テンソル

ここで、応力の記号と方向について定義しておく。まず、 x 軸に垂直な単位面を考える。この面の裏表二面のうち力を考える方の面に外向きに法線を取りこれを面の方向とする。この単位面に働く力（応力）は面に直角方向の力（法線応力）と面に平行

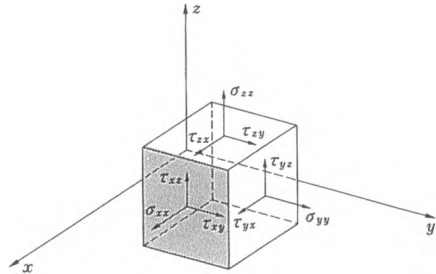


図 7.3

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad (7.4)$$

このことは、一点を中心に微小立方体を考えその一つの稜のまわりの回転モーメントをとれば容易にわかる。立方体の体積を零の極限にもってゆけば、体積力（質量力と慣性力 $=F - Dv/Dt$ ）のモーメントは表面力のモーメントに比べて高次の無限小であり無視できる。それゆえ表面応力の回転モーメントのつりあい条件から式(7.4)が得られる。

c. ナビエ-ストークスの方程式の導入

(1) 応力テンソルと変形速度の関係 流体中の応力は流体の相対運動の結果として生じるのであるから、式(7.3)に定義した応力テンソルは流体運動と関連づけられなければならない。流体微小要素の運動は変位（並進・回転）と変形（伸縮・剪断変形）に分けられるが、流体は変形過程に対して抵抗し内部応力が発生する。

平行平板の上の平板を一定速度で運動させて平板間の粘性流体に最も単純な変形を生じさせるときには、“剪断応力 τ は剪断変形 $\gamma = du/dy$ に比例する”というニュートンの粘性抵抗則が成立する。

$$\tau_{yx} = \mu \frac{du}{dy} \quad (7.5)$$

ここに、剪断応力は y 軸に垂直な面内で x 軸方向（平板の方向）に働くから τ_{yx} （ $=\tau_{xy}$ ）と記す。

この抵抗則は、“粘性流体においては剪断変形 γ に比例する剪断応力 τ が作用する”と一般化することができ、次のように表される。

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \gamma_{xy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (7.6a)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \gamma_{yz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (7.6b)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \gamma_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (7.6c)$$

完全流体の場合には法線応力として圧力 p のみ考えた。粘性流体の場合の法線応力と変形の関係については、歪みの効果として剪断変形 $\gamma_{xy} = \partial v/\partial x + \partial u/\partial y$ にならって、 $\gamma_{xx} = \partial u/\partial x + \partial u/\partial x$ として $2\mu \partial u/\partial x$ をとり、さらに圧力による歪み（体積変化の項） Θ の効果を加えて

$$\sigma_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \Theta \quad (7.7a)$$

$$\sigma_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda\theta \quad (7.7b)$$

$$\sigma_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda\theta \quad (7.7c)$$

とおく。ここに、体積膨張 θ は

$$\theta = \text{div } \mathbf{v} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (7.8)$$

である。非圧縮性流体では $\theta \equiv 0$ である。圧力 p は面に向かう方向を正にとるが、応力の正の方向は一般に座標軸の正の方向にとるので、上式右辺では p に負符号を付してある。上式を加え合わせ、 $p = -(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})/3$ の関係を考慮すると

$$\lambda = -2/3 \cdot \mu \quad (7.9)$$

ここに、 μ , λ はそれぞれ第一粘性係数および第二粘性係数といわれる。

これまでに述べた関係式の中には、流体の運動に関する量のうち、渦度は現れてこなかった。渦度はある軸まわりの流体の剛体的運動を表す量であって、隣り合う流体粒子間の相対的運動ではないから、応力には無関係なことが理解されよう。

(注 7.1) 静止流体中では剪断応力は生じない。そして、流体が静止するためには、(先に述べたように) 外力がポテンシャルをもつことが必要である。静止流体中の応力は法線応力のみが作用し、それは方向性をもたない。つまり、任意の方向の面に働く圧力は相等しい。

(注 7.2) 粘性係数 λ, μ についての

$$\chi = \lambda + \frac{2}{3}\mu = 0$$

の関係をストークスの関係という。 χ は体積粘性率 (bulk viscosity) といわれ、気体分子運動論から単原子気体では、 $\chi = 0$ であることが示される。しかし、2原子分子気体の場合には、音波の減衰率の実験から、 χ は μ と同程度の大きさをもつことが示されている。また、液体の χ についてはよくわかっていないが、この場合には非圧縮性流体 ($\text{div } \mathbf{v} = 0$) として取り扱うので、 χ は式中に現れない。

(注 7.3) 応力 ($p_{ij} = \tau_{ij}, \sigma_{ij}$) と変形の一般的表現は次のようである。

$$p_{ij} = (-p + \chi\theta)\delta_{ij} + \mu \left(r_{ij} - \frac{2}{3}\theta\delta_{ij} \right)$$

$$p = -\frac{1}{3}(p_{11} + p_{22} + p_{33}) + \chi\theta$$

(2) ナビエ-ストークスの方程式 さて、以上で粘性により生じる応力と流体の運動(変形速度)を関係づけることができたので、これを運動方程式の中に組み入れることにする。

いま, x 軸方向の力を考えると, 図 7.3 を参考にして, x -面には $-\sigma_{xx}dy dz$, $(x+dx)$ 面には $+(\sigma_{xx}+(\partial\sigma_{xx}/\partial x)dx)dydz$ の法線力が働き, 差し引き $(\partial\sigma_{xx}/\partial x)dx dy dz$ である. 次に, y -面に働く x 軸方向の力は $-\tau_{yx}dx dz$, $(y+dy)$ -面に働く力の x 成分は $(\tau_{yx}+(\partial\tau_{yx}/\partial y)dy)dx dz$ で, 結局 $(\partial\tau_{yx}/\partial y)dx dy dz$ となる. z 軸に垂直な二面に働く力の x 成分は同様に $(\partial\tau_{zx}/\partial z)dx dy dz$ である. この直方体に働く x 軸方向の力は, 以上の成分をまとめて単位質量あたりに,

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} \right)$$

である. 他の方向成分についても同様な関係が得られる.

第 1 篇のオイラーの方程式に対してその右辺に上の項を付加すれば粘性流体の運動方程式が得られる. たとえば, x 軸方向成分については,

$$\frac{Du}{Dt} = F_x + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} \right) \quad (7.10)$$

ただし, 圧力項は σ_{xx} の中に含まれている. 上式に, 応力テンソルと変形速度の関係式 (7.6), (7.7) を代入し整理すると次式が得られる. これがナビエ-ストークスの運動方程式 (Navier-Stokes equations) である.

$$\left. \begin{aligned} \frac{Du}{Dt} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{3} \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{Dv}{Dt} &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{3} \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \frac{Dw}{Dt} &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{3} \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (7.11)$$

あるいは,

$$\frac{Dv}{Dt} = F - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \frac{1}{3} \frac{\mu}{\rho} \text{grad } \Theta + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 v \quad (7.12)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} \frac{D}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t} + v \text{grad} \\ \nabla^2 &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \\ \text{grad} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ \Theta &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (7.13)$$

$\nu = \mu/\rho$ を動粘性係数 (kinematic viscosity)¹ という。非圧縮性流体では、ナビエ-ストークスの方程式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{Du}{Dt} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{Dv}{Dt} &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \frac{Dw}{Dt} &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (7.11 a)$$

あるいは、

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (7.12 a)$$

(注 7.4) ナビエ-ストークスの方程式および連続の方程式を円筒座標系による表示に変換すれば、非圧縮性流体の運動方程式として次式を得る。ただし、 r, θ, z はそれぞれ半径方向、円周方向、軸方向の座標を意味し、 v_r, v_θ, v_z はそれぞれの方向の速度成分である。

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \\ = F_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (7.14 a)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \\ = F_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (7.14 b)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\ = F_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (7.14 c)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (7.14 d)$$

(3) 二次元クエット流れの主軸 応力テンソルと変形速度の関係、主軸などの理解を助けるために、クエット流れについて考えてみる。二次元流れの応力テンソルは

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \quad (7.15)$$

ここに、

¹ kinematic (運動学的) は dynamic (力学的) に対する概念で、その次元は長さと同時間のみを含み、質量の次元を含まない。 $[\nu] = [V \cdot L] = [L^2/T]$

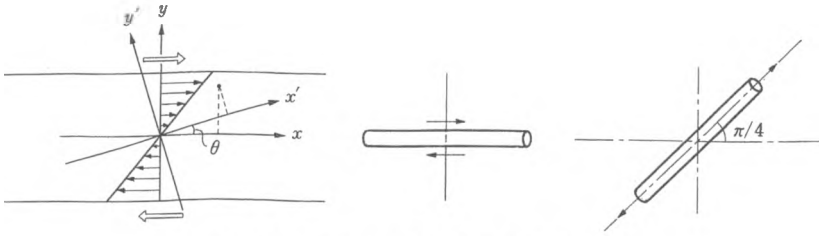


図 7.4 二次元クエット流れの中の短い太い糸

$$\sigma_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (7.16)$$

と表される. 図 7.4 に示したクエット流れの速度成分は

$$u(x, y) = u(y) = ay, \quad v(x, y) = 0 \quad (7.17)$$

である.

いま, 新しい座標軸 (x', y') をもとの座標軸 (x, y) と θ だけ傾けてとると, これらの間には

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' &= -x \sin \theta + y \cos \theta \end{aligned} \quad (7.18)$$

あるいは

$$\left. \begin{aligned} x &= x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y &= x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (7.18 a)$$

の関係がある.

新しい座標系に関する流速成分 $\mathbf{v}'(x', y') = u'(x', y') + iv'(x', y')$ は

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'(x', y') &= u(y) [\cos \theta - i \sin \theta] \\ &= a(x' \sin \theta + y' \cos \theta) [\cos \theta - i \sin \theta] \end{aligned} \quad (7.19)$$

すなわち

$$\begin{aligned} u'(x', y') &= a(x' \sin \theta + y' \cos \theta) \cos \theta \\ v'(x', y') &= -a(x' \sin \theta + y' \cos \theta) \sin \theta \end{aligned} \quad (7.20)$$

これより

$$\frac{\partial u'}{\partial y'} = a \cos^2 \theta, \quad \frac{\partial v'}{\partial x'} = -a \sin^2 \theta \quad (7.21)$$

座標系を θ だけ傾けたとき, 応力テンソルの非対角成分 $\tau_{x'y'}$ が零となる方向, すなわち主軸方向は

$$\tau_{x'y'} = \mu \left(\frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \right)$$

$$= \mu a (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 0 \quad (7.22)$$

より, $\theta = \pm \pi/4 = \pm 45^\circ$ である. このとき $\theta = 45^\circ$ にとれば

$$\begin{aligned} \sigma_{x'x'} &= -p + 2\mu \frac{\partial u'}{\partial x'} = -p + 2\mu a \sin \theta \cos \theta \\ &= -p + \mu a \end{aligned} \quad (7.23)$$

$$\sigma_{y'y'} = -p - \mu a \quad (7.24)$$

いまクエット流中に短い太い糸を入れたとする. もし, 糸の方向を流れと平行におけば, 糸はその側面に働く剪断応力による偶力のために回転し, 主応力の方向をとるであろう. この位置では糸に働く剪断応力は零であり, $\theta = +45^\circ$ ならば, 糸は張力を受けてびんと張られた状態となるし, もし $\theta = -45^\circ$ では糸の両端に働く圧縮力のために糸は糸くずになってしまう (図 7.4).

7.2 レイノルズ数およびレイノルズの相似則¹

a. レイノルズ数

われわれは大気とか水とかいわば流体とは切っても切れない関係にある. したがって, 流体力学あるいは流れの科学の歴史は古く, また時代の進展とともに常に新しく脱皮を繰り返してきた. こうした永い流体力学の歴史の上に記録さるべき巨人の一人がレイノルズである. ここでは彼の名に由来する無次元数——レイノルズ数——について解説しよう.

流体力学は 18 世紀の基礎方程式の確立以来応用数学の一分野として重要な一翼を担ってきた. しかし, 流体力学はあくまで物理学であり, 数式による理論の展開と同時に, その力学的理解が必要である.

さて, ナビエ-ストークスの運動方程式 (N-S 方程式) (7.11 a) あるいは式 (7.12 a) を物理的に解釈しよう. (以下の説明はこれらの式の両辺に ρ を掛けた形で行う.) N-S 方程式の左辺 $\rho D\mathbf{v}/Dt$ はいわゆる慣性項である. これを左辺に移した $-\rho D\mathbf{v}/Dt$ は, 流体粒子とともに運動する人より見た力となる. (ダランベールの慣性力や遠心力を思い起こすのがよいであろう.) また, 右辺の第一項である質量力は特別なものではないので, 流体力学的には特に取り上げないことにする. 特に重力の影響は圧力項の中に入れておくことができる. 右辺の第二項は圧力項であり, 第三項は粘性力の項である. したがって, 流体の微小部分をとるとき,

¹ 初学者は, 次節以下 8 章および 9 章の具体的な問題を先に学んだ後に, 本節へ戻る方がよいであろう.

これに働く力は

慣性力 ($-\rho Dv/Dt$)

圧力 ($-\text{grad } p$)

粘性力 ($\mu \nabla^2 v$)

の三つである。

流体の運動はこの三つの力のつりあいの上に成り立っている。このうち二つの力を考えれば、他の一つは結果として決まってしまう。実際の流体は粘性をもつゆえ、粘性力は無視しえない。また、流体の運動を論じているゆえに、これに由来する慣性力も重要である。実際には、これらの力の組み合わせは次の三つである。

もし粘性が小さければ、流体場の力関係は慣性力と圧力項により決まってしまう。その極限は完全流体の流れとなる。

もし慣性力が小さければ、流体場は圧力項と粘性力とがつりあいの関係にある。これは、次節に述べる遅い流れである。

もし慣性力と粘性力とが同じ程度の大きさであり、そのいずれも無視しえないとすれば、問題はきわめて難しくなる。この二つの力の大きさの比をレイノルズ数と定義する。

$$Re = \frac{\text{慣性力}}{\text{粘性力}} = \frac{U \partial U / \partial l}{\nu \partial^2 U / \partial l^2} \sim \frac{U(Ul^{-1})}{\nu(Ul^{-2})} = \frac{Ul}{\nu} \quad (7.25)$$

ここに、 U : 代表的流速, l : 代表的長さ, ν : 動粘性係数。

したがって、流体中の物体に働く力は、 Re の十分大きい流れあるいは完全流体中では物体のまわりの圧力の総和によるものであり、 Re の十分小さい遅い流れ

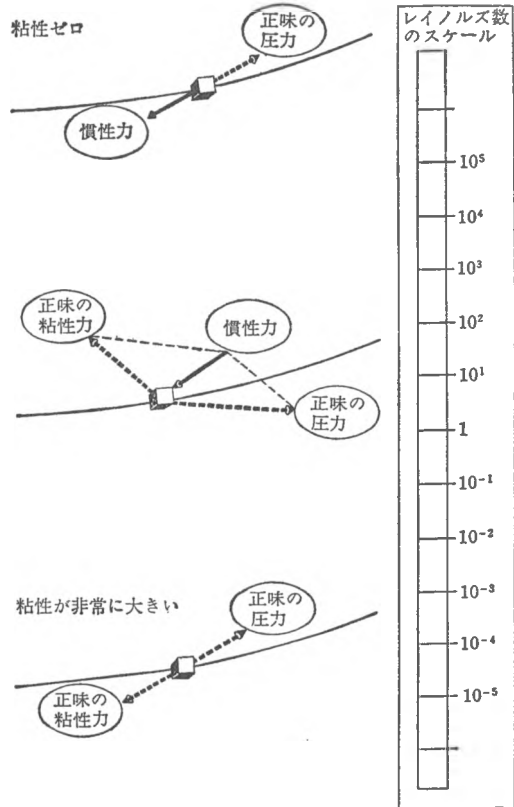


図 7.5 粘性流体の運動を支配する力とレイノルズ数の関係 (シャピロによる)

では粘性による表面摩擦力と圧力によるものである。

よく誤解されがちなことであるが、ポテンシャル流れに近い流れは遅い流れではなく、実は速い流れすなわち粘性力が慣性力に対して無視しうる Re が十分大きい流れである。このことを、次に述べる多孔質中の流れやヒールショー流れの場合と混同してはならない。

多孔質内の流れとヒールショー流れ

地下水流など多孔質内の流れはレイノルズ数の小さい領域でダルシー則に従い、この法則自身がポテンシャルを定義している (§ 4.8.c)。また、隙間の狭い平行平板間のレイノルズ数の低い流れ (Hele-Shaw 流れ) や水深の浅い水盤内の流れの中に平板に垂直な軸をもつ柱状の物体を挿入すれば、この物体まわりの二次元ポテンシャル流をシミュレートできる。これは後に導く式 (8.7) で示されるように、レイノルズ数の小さい (慣性項を無視しうる) 平行流では、流速 v が圧力勾配 ∇p に比例し ($u \propto \partial p / \partial x$, $v \propto \partial p / \partial y$)、圧力 p を速度ポテンシャルとみなせるためである。

b. レイノルズの相似則

いま二つの流れがあり、その中に幾何学的に相似な物体が同じようにおかれていとする。流体の運動および物体に働く力は、以上述べてきたように三つの力のつりあいにより決まってくる。したがって、二つの流れのレイノルズ数が等しい場合、たとえ物体の大きさが異なり、流体の種類が異なっても、この二つの流れは力学的に相似であり、一方の流れの様子および物体に働く力がわかれば、他方のそれはそれぞれ幾何学的および力学的倍率を掛けることにより求められる。これはレイノルズの相似法則といわれ、大きなスケールの現象を小さなスケールの模型実験により推定するのに用いられる。

この二つの流れは力学的に相似であり、一方の流れの様子および物体に働く力がわかれば、他方のそれはそれぞれ幾何学的および力学的倍率を掛けることにより求められる。これはレイノルズの相似法則といわれ、大きなスケールの現象を小さなスケールの模型実験により推定するのに用いられる。

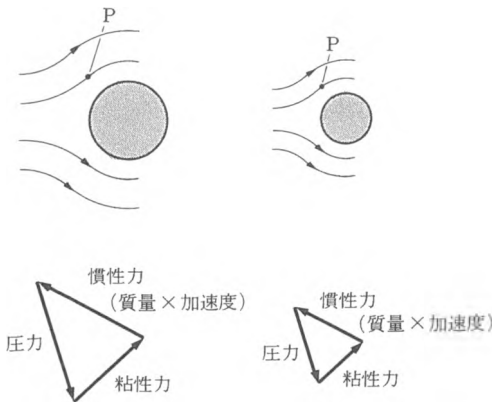


図 7.6 レイノルズ相似

このことはナビエ-ストークスの方程式から、次のように導くこともできる。流れの場の代表的長さ (たとえば、物体の高さや管の径) と流速 (たとえば、接

表 7.1 レイノルズ数と流れの特徴

Re	
0 ←	→ ∞
[粘ばねばした流れ]	[さらさらした流れ]
ストークス流	ポテンシャル流
(遅い流れ)	(速い流れ)
慣性力 → 0	粘性力 → 0

近流速) をそれぞれ l および U とする。時間のスケール T は $T=l/U$ 、圧力の基準は $p_1=\rho U^2$ ととれる。これらの代表的スケールにより、式 (7.12 a) の各項を無次元化する。

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{x}{l}, & y^* &= \frac{y}{l}, & z^* &= \frac{z}{l} \\ u^* &= \frac{u}{U}, & v^* &= \frac{v}{U}, & w^* &= \frac{w}{U} \\ t^* &= \frac{t}{l/U}, & p^* &= \frac{p}{\rho U^2} \end{aligned}$$

これより、式 (7.12 a) は次のようになり、レイノルズ数 Re を合わせれば質量力 F の関与しない二つの流れは相似になることがわかる。

$$\frac{Dv^*}{Dt^*} = \frac{lF}{U^2} - \text{grad } p^* + \frac{1}{Re} \nabla^2 v^* \quad (7.26)$$

ナビエー吊橋理論の第一人者

(Louis Marie Henri Navier, 1785—1836)

粘性を考慮した流体の運動方程式の最初の誘導者ナビエが土木技術者であることを知らない人はかなり多い。彼は当時のハイ・テクであった吊橋の理論に関する第一人者であった。もちろん、吊橋そのものの歴史は古いが、これが応用力学の理論で扱われるようになるのは 19 世紀の初め頃からである。吊橋は長径間を渡るのに最も適したタイプの橋ではあるが、やはり河の流れ中に橋脚を立てる必要がある。完全流体の理論ではダランベールのパラドックス (背理) の教えるように、橋脚に働く抗力は零になる。この現実との矛盾は粘性を無視したことによるものであることは明らかである。

ナビエは 1822 年、粘性の効果を考慮した流体の運動方程式に関する論文をフランス・アカデミーに提出した。しかし、今も昔もエンジニアが軽く見られる傾向は変わらない。永い間 (1827 年まで) その論文はアカデミー会員の机の引き出しの中に眠らされる運命となった。そうこうしているうちに、同様の試みがコーシー (1828)、



ポアソン (1829), サンプナン (1843) らによってなされ、1845 年数学者であり物理学者でもあったイギリスのストークスが一般的に式を導き、しかも種々の場合について具体的に解を求め、ここに、粘性流体の力学の理論が誕生する。

なお、ナビエが自信をもってセヌ川に架橋した吊橋 (アンヴァリッド橋) が、完成を見ることなく竣工式を目前にして落橋してしまうという不運に見舞われる (1826 年 9 月)。落橋の原因は吊橋自体や橋脚ではなく、水道管の破損によって地盤の弱化が生じ、ケーブル・アンカーが滑り出したためであった。こうした構造物本体ではなく付随的構造の弱点ゆえの事故は往々にしてある。第二次大戦後

のことであるが、同じくフランスの優美さを誇ったマルパッセ・アーチダムが付近での発破作業によるアバット地盤のゆるみのために崩壊し、洪水が下流の町々を襲い多数の死者を出し、ために設計者のコインが自殺したことを記憶している方も多であろう。

輝かしいナビエの生涯にとってこの事故は耐え難い汚点であり、51 歳で亡くなるまで、彼はこのことを気にしていたという。

オズボーン・レイノルズ

(Osborne Reynolds, 1842—1912)

レイノルズは、層流と乱流の区別、レイノルズ数の定義と限界レイノルズ数の確定、レイノルズ応力の概念の導入により、流体力学に不朽の業績を残し、20 世紀に入って早々に始まる現代流体力学のいわば祖父ともいうべき人である。レイノルズの研究は単に乱流の発生や抵抗則にとどまらず、キャビテーション、潤滑、熱伝導、蒸気機関、さらに相似律を考慮した河口潮汐や船舶の模型実験も行うなど広い範囲にわたっている。

レイノルズはケンブリッジ大学で数学を修め、1867 年卒業後に、彼自身の哲学に基づいて 1 年間を設計実務に携わったのち、弱冠 26 歳で 1868 年マンチェスター・オーエンズ・カレッジの初代工学部教授に招かれてい



る。彼は1877年に王立協会の会員 (Fellow of the Royal Society) に、1883年には I.C.E. (Institution of Civil Engineers) の会員にも選ばれている。

レイノルズは英国では二人目の、そしてマンチェスターでは最初の大学工学部の教授の席を占めた。このことは、イギリスが産業革命の発生地、当時世界の工場であったこと、それによって工学の重要性が認識され、エンジニアの地位が高まったことにも関連するであろう。

この時代、つまり19世紀後半のイギリス科学界は、まさに百花繚乱の観があった。マックスウェル (1831—1879) が電磁波の基礎方程式を提出し (1861—64, 1873)、統計物理学の開拓を行い、流体力学ではストークス (1819—1903) が粘性流体の基礎方程式 (1845) を導き、種々の流体運動 (球の沈降、波、振動流など) の理論解を次々に求め、ケルビン卿 (1824—1907) は流体力学 (渦定理) のみならず熱力学 (絶対温度記号 K は彼の名に由来する)、海底電信の特許取得などと幅広い活動をし、若いレイリー卿 (1842—1919) も “Theory of Sound” Vol. I, II (初稿 1872, 初版 1877) をひっさげてさっそうと登場し、ついで乱流の発生について微小振幅擾乱波の方法や熱対流の理論を提案するという時代であった。さらに、これらの人々の活躍に先立って革命ともいえるぐらいの衝撃と論争を巻き起こしたのは1859年のダーウィンの「種の起源」の発表である。

科学におけるイギリスの優位は20世紀に入っても衰えず、J. J. トムソンやラザフォードらの原子物理学者の活躍、日食の観測からいち早くアインシュタインの相対性理論を支持した天文学者グループ、フレーミングのペニシリンの発見 (1928)、第二次大戦後においては、ワトソンとクリックによる DNA 構造の解明、X線天文学の誕生へと続く。

流体力学の分野では、1910年代から第二次大戦後にかけての息の長いパイオニア的なテイラーの活躍があり、戦後はバッチャラーを中心としたケンブリッジ大学は世界の流体力学研究のメッカとなっている。