

13. 境界層の剥離

13.1 楔形を過ぎる流れ（圧力勾配のある流れの境界層方程式の厳密解）

第11章では流れに平行におかれた平板上の流れの境界層内の流速分布形が相似であることを用いて、その関数形を求めた。このように流速分布の相似性の仮定が成立するのは、境界層の外側のポテンシャル流の流速が流れ方向の距離 (x) のべき乗で変化する場合

$$U(x) = u_1 x^m \quad (13.1)$$

である (図 13.1)。流速の変化が流下距離のべき乗則で表されるポテンシャル流れは、楔形の先端のよどみ点近傍で起きる。べき数 m は楔の角度 $\pi\beta$ とは次の関係がある。

$$\beta = \frac{2m}{m+1} \quad (13.2)$$

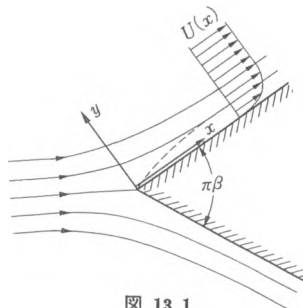


図 13.1

このとき、境界層厚さ $\delta(x)$ は一様流に平行におかれた平板の場合と同様に

$$\delta(x) \propto \left(\frac{\nu x}{U(x)} \right)^{1/2} \quad (13.3)$$

と表される。

したがって、相似解は壁面からの無次元高さ $\eta (=y/\delta)$

$$\eta = y \left(\frac{m+1}{2} \right)^{1/2} \left(\frac{U(x)}{\nu x} \right)^{1/2} = y \left(\frac{m+1}{2} \right)^{1/2} \left(\frac{u_1}{\nu} \right)^{1/2} x^{(m-1)/2} \quad (13.4)$$

に関して表され、その流関数は

$$\Psi(x, y) = \left(\frac{2}{m+1} \right)^{1/2} (\nu U(x) x)^{1/2} f(\eta) \quad (13.5)$$

となる。これらの関係を式 (10.12)~(10.15) に代入して、無次元流関数 $f(\eta)$ は次の常微分方程式の解として与えられる。

$$f''' + ff'' + \beta(1-f'^2) = 0 \quad (13.6)$$

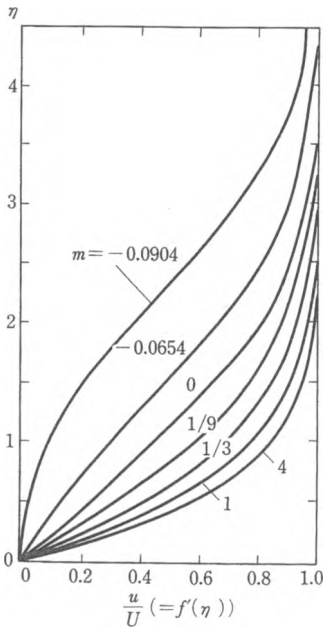


図 13.2 楔形を過ぎる流れの流速分布 流速分布に変曲点が現れ始める。そして、ごくわずかの減速にすぎない $m = -0.0904$ ($\beta = -0.199$) で流速分布が壁面上で $(\partial u / \partial y)_{y=0} = 0$ 、つまり壁面剪断応力が零 ($\tau_0 = 0$) となり、この境界層流れは壁面から剝離する。パラメーター m の種々の値に対する分布形を図 13.2 に示す。

13.2 境界層の剝離

迎え角の小さい翼の抵抗は境界層理論により計算することができる。しかし、翼の迎え角を大きくしていくと、図 13.3(a) に示すように境界層は翼の表面より剝がれ後に逆流域が形成される。このような境界層の剝離 (separation) は、球や円柱・楕円柱あるいは拡

式 (13.6) の境界条件は

$$\left. \begin{aligned} \eta=0 &: f=0 \\ &f'=0 \\ \eta \rightarrow \infty &: f' \rightarrow 1 \end{aligned} \right\} \quad (13.7)$$

ベキ乗流の場合の相似解の満たすべき微分方程式 (13.6) は、フォークナーとスカン (Falkner and Skan, 1931) により導かれ、Hartree (1937) により機械式積分器を用いて解が求められた。

$m=0$ ($\beta=0$) の場合が流れに沿う平板の場合 (ブラジウス解) であり、 $m=1$ ($\beta=1$) の場合が平板に垂直な流れのよどみ点流れである。 $m > 0$ ($\beta > 0$) の範囲は加速流であり、流速分布に変曲点はないが、 $m < 0$ ($\beta < 0$) の流れは減速流で

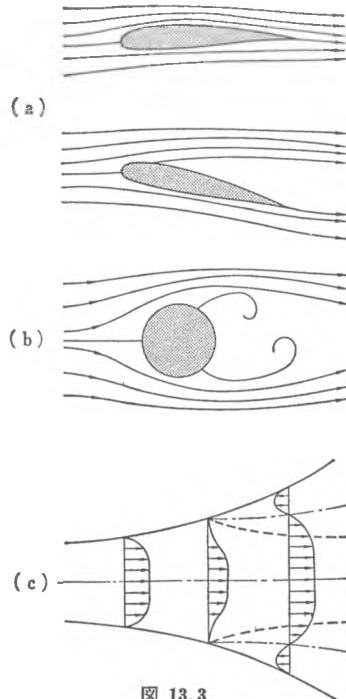


図 13.3

大管（デフューザー）など物体表面に沿って圧力勾配が正（ $dp/dx > 0$ ）——いわゆる逆圧力勾配（adverse pressure gradient）——の領域が存在し、それが大きいか長い流れに生じる。

翼上面の境界層外側のポテンシャル流の流速は、前縁から流線の間隔が狭くなる翼キャンバーの頂まで増加し、この点Bで最大となり、後方に向かって減少する。ベルヌーイの定理によって dp/dx は点Aから点Bまでは負つまり順勾配（favorable pressure gradient）であるが、点Bより翼端に向かい $dp/dx > 0$ で逆勾配となる。（ポテンシャル流では流れの加速・減速は圧力勾配により行われる

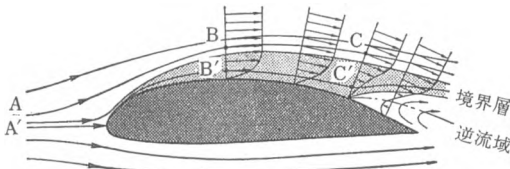


図 13.4

から $dp/dx < 0$ で流れは加速される。それゆえ $dp/dx < 0$ を順勾配という。）

境界層は流れの方向のスケールに比べて十分薄く、層内

の圧力勾配は主流部のそれと等しい。

ところで、いまポテンシャル流部と境界層内にそれぞれ一本ずつの流線を考える。ポテンシャル流の中の流線に沿ってはベルヌーイの定理により

$$\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = \text{const}$$

が成立する。すなわち、

$$\frac{P_\infty}{\rho} + \frac{U_\infty^2}{2} = \frac{P_A}{\rho} + \frac{U_A^2}{2} = \frac{P_B}{\rho} + \frac{U_B^2}{2} = \frac{P_C}{\rho} + \frac{U_C^2}{2} \quad (13.8)$$

$$\frac{P_C}{\rho} = \frac{P_B}{\rho} + \frac{1}{2}(U_B^2 - U_C^2) \quad (13.9)$$

点Bから点Cに行くにつれて $U_B > U_C$ であるから、速度のエネルギーが圧力のエネルギーに変換されて表面に沿う圧力分布の回復が行われている。

一方、境界層内の流線については、粘性によるエネルギー損失が伴う。と同時に粘性により外側の流体の運動量が輸送される。粘性によるエネルギー損失と運動エネルギーの輸送の効果 ΔE を考慮することにより、流線に沿って次の関係式が与えられる。

$$\frac{P_\infty}{\rho} + \frac{U_\infty^2}{2} = \frac{p_{A'}}{\rho} + \frac{u_{A'}^2}{2} = \frac{p_{B'}}{\rho} + \frac{u_{B'}^2}{2} + \Delta E_{A'B'} = \frac{p_{C'}}{\rho} + \frac{u_{C'}^2}{2} + \Delta E_{A'C'}$$

これより

$$\frac{p_c'}{\rho} = \frac{p_B'}{\rho} + \frac{1}{2}(u_B'^2 - u_C'^2) + \Delta E_{B'C'} \quad (13.10)$$

$dp/dx > 0$ の区間での圧力上昇が大きすぎるか、区間が長いと、境界層内では粘性によるエネルギー損失のため、流れは速度のエネルギーを全部圧力のエネルギーに変換しても必要な圧力上昇を得ることができない状態となる。 $dp/dx > 0$ の区間ではこのエネルギー変換のため流速分布形は徐々にやせ型となり、ついに剝離点では

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (y=0) \quad (13.11)$$

となって速度を失ってしまう。この点以後流体は圧力の低い方に押し流され逆流を生じる。

境界層の制御

境界層の剝離により物体の背後に圧力の低い領域が作られると、物体はその前面と背面の圧力差に起因する大きな抵抗——圧力抵抗——を受けることになる。

式 (13.10) よりわかるように境界層が物体表面から剝離するのは、境界層特にその壁の近くにエネルギーの少ない層が存在するためである。それゆえ、境界層の剝離を防ぐには、このエネルギーの少ない層にエネルギーを補うか、この層を除去すればよい。具体的には

(i) 境界層の吸込み

(ii) 境界層への吹込み

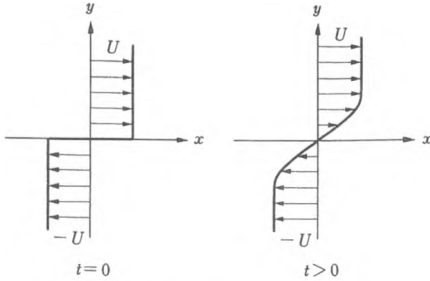
(iii) 境界層の流れを層流から乱流にする（後に示すように乱流境界層では流体の混合運動が激しく、主流の運動量は壁近くにまで輸送され、流速分布が一様化する）。

このような方法を境界層制御 (boundary layer control) と呼ぶ。

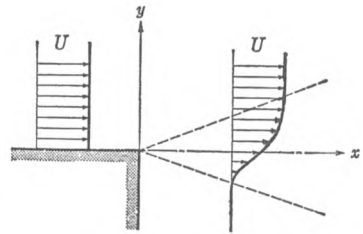
問 題

2.1 水深 h cm, 断面積 A cm² の水槽から水平に長さ l cm, 断面積 a cm² の細く長い管が出ている。水槽に水をいっぱい満たすとき、この水位が半分になるまでの時間を求めよ。ただし、管内の流れは層流と考え、管の入口・出口での損失は無視してよい。

2.2 ある面を境にしてその上下の流体がそれぞれ逆向きに U の速さで面と平行な方向に運動を始める。この不連続面は第 I 篇に述べたように渦層である。時間の経過とともに渦層の厚さはどう変わるか。最初の不連続面の上下の流体の種類、したがって密度や粘性係数が異なる場合はどうか。



問 2.2 図 自由剪断流



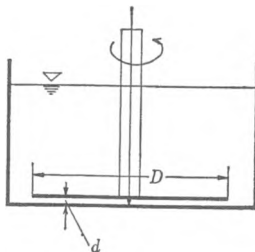
問 2.3 図 自由噴流境界の広がり

2.3 摩擦の働かない壁面上 (x 軸) の一様流速の流れが、 $x=0$ の点で壁面下にある静止流体と接触するとき、ここで速度の不連続が生じる。上下の流体間の速度分布が x の増すにつれていかに滑らかに広がっていくかを求めよ。このような流れを自由噴流境界 (free jet boundary) と呼ぶ (問 2.3 図)。

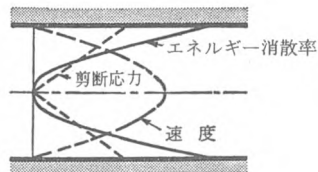
2.4 二枚の間隔 ($2h$) のせまい平行平板の間を粘い流体 (粘性係数 μ) が U_∞ の速度で x 方向に流れている。流れの中ほどに物体 (任意断面の高さ $2h$ の柱体) を挿入する。このとき平板に垂直な方向から観測される流れのパターンは、この物体まわりのポテンシャル流れを表す。このような流れをヒール-ショウ (Hele-Shaw) 流れといい、ポテンシャル流の模擬実験に用いられる (Hele-Shaw モデル)。

ポテンシャル流れは本来レイノルズ数の大きい、したがって速い流れに対応するはずなのに、このように粘性流体の遅い流れがポテンシャル流 (非粘性流体の渦なし流れ) のシミュレーションに用いられる理由を示せ。

2.5 下図のような水槽に液体を満す。水槽の底面と平行にこれとわずかの間隔をあけて円盤がおかれている。円盤を中心軸のまわりに回転させるときのトルク T から液体の粘性係数 (μ) を求める式を導け。



問 2.5 図



問 2.6 図

2.6 平行平板間の流れ (二次元ポアズイユ流れ) におけるエネルギー消散率は次の順序にしたがって計算せよ。ただし、流れの方向に x 軸、壁面と垂直に y 軸、これらと直角に z 軸をとる。

(i) z 方向には流れは一樣であるので、 z 方向には単位長さを考え、流れの中に $\delta x \times \delta y \times 1$ の柱体をとる。この柱体に働く x 方向の力の和は零であるが、柱体の上下面に働く剪断応力の偶力は零ではない。この偶力のなす単位体積単位時間あたりの仕事率 = エネルギー消散率が $\epsilon(y) = \mu(du/dy)^2$ であることを示せ。

壁面近くは剪断応力も速度勾配も最も大きく、したがってエネルギー消散率も大きい。逆に流れの中心部でエネルギー消散率は零である。

(ii) これを全断面にわたって積分し、流れの方向の単位長さあたりのエネルギー消散が $Q \left(-\frac{dp}{dx} \right)$ (ここに、 Q : 流量) に等しいことを示せ。これは圧力が壁面での粘性剪断応力に抗して流体を流すための仕事であり、結局は熱となって失われる。

2.7 隙間が d の平行平板の間の下方に厚さ d_1 の水の膜があり、上方に空気の層があるとき、与えられた圧力勾配のもとに生じる流れの流速分布、空気と水の流量を求めよ。

2.8 水平な床にあげられた無数の小孔から、ごく少量の空気が噴き出している。この上を長さ l 、幅 w の板を速度 v で水平に滑らせるとき、平板に働く摩擦力を求めよ。板の速度は時間とともにどう変わるか。ただし、床と平板の間隔は d とする。

2.9 上の問題において、板の重さが m のとき、床と平板の間隔 d の関係を求めよ。

2.10 間隔 d の多孔質の平行平板の間に $(-dp/dx)$ の圧力勾配を与えたとき、平板間の流量はどう変わるか。ただし、多孔質の平板からの流体の漏れは平板間の圧力に比例するとし、また流れは準平行流とする。

2.11 幅 d cm のスリットから単位長さあたり Q cm²/sec の空気を噴出させて、エア・カーテンにより見えない扉を作りたい。スリットから a cm 下での気流の最大風速とエア・ジェットの幅を計算せよ。

2.12 ストークス近似では流れのパターンはレイノルズ数に無関係であるが、抵抗にはなぜレイノルズ数が関与するのか。

2.13 半径 a の球を水槽中に落としたときに、球が最終速度に達する落下距離 L を求めよ。また、最終速度に達している鉛直距離 L の二断面間を通過する時間 T を測定して、球に働く抵抗係数を求める式を導け。

2.14 球が真直に落下せず、斜めに落下したとき (実際にはスパイラルを画いて落ちる)、これを無視して (あるいは不注意な実験者がこれに気づかずに) 鉛直に落下するとしてデータを整理した場合の抵抗係数に生じる誤差はどうか。

2.15 重さ m 、半径 a のゴルフボールを初速度 v_0 、角度 θ で打ち出したときの飛距離を求めよ。ただし、抵抗係数 C_D とレイノルズ数 Re の関係は与えられており、またボールの回転はないものとする。

2.16 体重 (スキーの分も含める) m のスキー・ジャンパーがジャンプ台を初速度 v 、水平に対する上向き角度 θ で飛び出すとき、飛距離が最も長くなる条件を求めよ。ただし、ジャンパーとスキーは長さ l 、幅 b の平板でおき換えてよい。また、ジャンプ台の下の着地点のスロープは水平に対して下向きに α とする。(実はこの問題を著者もいまだ解いていない。スキーの向きなどどう考えればよいだろうか。)