

1. 基礎方程式と基礎原理

1.1 基礎方程式

a. 流れの記述法 (質点系との対比)

流体力学を初めて学ぶ者にとって最もなじみにくいのは、流体力学の記述方法であろう。多くの場合、読者はすでに質点系の力学や弾性体の力学を学んでおり、これらの系の記述法と流体系のそれとが違っているために生じる混乱から正しい理解が妨げられることもあるようである。

流体力学に特有な運動の記述法は、質点系の力学と対比するときには明快になる。質点系と流体系の運動の大きな違いは、質点系では個々の質点が明確に識別され、そしてその点の数も有限個の場合を考えるのに対して、流体系では特別の標識をつけない限りは、個々の流体粒子は判別しえないし、何よりも流体粒子が無限にあって空間を満たしているということである。この点に関連して、流体力学における未知変数は何か、流れを記述する物理量は何かをはっきりさせておこう。

流体の運動を論じるのにオイラー的立場とラグランジュ (Lagrange, 1736—1813) 的立場の二つがある。

(i) オイラー的方法：流体粒子は空間を自由に移動するが、この方法は、空間の各点各瞬間の流体の状態量 (流速・圧力・密度) を固定座標系の位置と時間 (x, y, z, t) の関数として記述するものである。各点に存在する流体粒子は各瞬間瞬間にそこを通過する別の流体粒子である。流体力学の問題はほとんどこの方法により解かれてきた。

(ii) ラグランジュ的方法：これに対しいま一つの方法は、ある流体粒子の時々刻々の位置を追跡し、これをその粒子の最初の位置と時間の関数として記述しようとする立場である。流体粒子の追跡は特別なトレーサーでも利用しなければできないし、方程式が形式的に複雑なために、現在ではこの方法は、流体の静止状態からの運動などきわめて限られた範囲の問題についてのみ用いられる。22

章に述べる拡散の問題でもラグランジュ的な考え方は用いるが、ラグランジュの運動方程式を解くわけではないから、本書ではこの方法についての詳述は省く。

b. 流れを記述する未知変数は何か

力学系の状態の変化を表すにはどんな物理量を考えればよいであろうか。質点系の運動ならば質点の位置 (X, Y, Z) 、弾性体ならばそのひずみである。流体運動の記述では多くの場合、流体粒子一個一個の運動を考えるよりも、空間に固定された各点での流れの状態を記述するオイラーの立場をとるが、この場合にはまず各点での流体粒子の速度成分 $\mathbf{v} = (u, v, w)$ が未知の物理量であることはすぐ納得されるであろう。これは運動学的な量である。一方、水を張った水槽の底から水平に延びたパイプの中の流れを考えてみると、外力である重力には水平方向の成分はないから、パイプの中の水に運動を生じさせるのは重力以外の力である。この流れの駆動力が圧力 p であることはすぐ理解されよう。つまり、圧力も流れの状態を記述する物理量である。しかし、これのみでは不十分なことは、たとえば同じようなパイプの中の流れて、与えられる力学的条件が同じであっても、パイプの中の流体が空気であるか、水であるかによって動きやすいか否かが違うから、質点の場合の質量 m に対応して流体の密度 ρ も流れを表す未知数として考えなければならないこともわかるであろう。後二者は流体の内部状態を表す物理量であり、流れを記述するのに最小限必要な物理量は計5個となる。これ以外にも、流体の温度 T 、溶質の濃度 C などの状態量を知る必要が生じる場合もあるが、流体の力学的状態を記述する上では副次的なものである。

運動学的状態を表す未知量： u, v, w (速度成分)

内部状態を表す未知量： p (圧力), $[\rho$ (密度)]

流体の力学的変化を記述する法則は、質量・運動量・エネルギーの三つの保存則で(運動量保存則は3成分について立てられるから)、計5個の方程式から成り立つ。したがって、5個の未知数に対して5個の方程式が立てられるから、流れの運動は完全に記述されることがわかる。しかも、多くの流体では密度 ρ は一定 ($\rho = \text{const}$) か、圧力 p の関数 ($\rho = \rho(p)$) として決ま

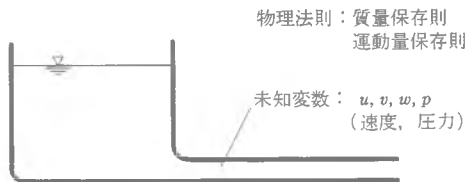


図 1.1 流体力学における未知変数と物理法則

表 1.1 質点系と流体系の記述法の違い

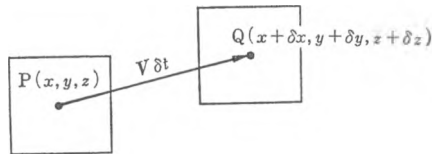
	質点系	流体系 (オイラー的記述)
独立変数	t (時間)	x, y, z (座標), t (時間)
未知変数 (従属変数)	X, Y, Z (質点の位置)	$u, v, w; p$ (各点での流速・圧力)
速度	$U(t) = dX/dt$ $V(t) = dY/dt$ $W(t) = dZ/dt$	$u(x, y, z, t)$ $v(x, y, z, t)$ $w(x, y, z, t)$
加速度	$d^2X/dt^2, d^2Y/dt^2, d^2Z/dt^2$	$Du/Dt, Dv/Dt, Dw/Dt$ ($D/Dt = \partial/\partial t + u\partial/\partial x + v\partial/\partial y + w\partial/\partial z$: 実質微分)

るバルトロピー流体 (barotropic fluid) であるから、最も単純化された流体の運動を表す状態量は、速度成分 (u, v, w) と圧力 p の4個であり、その変化を記述する物理法則は質量と運動量の保存則を表す四つの方程式である。

1.2 実質微分・実質加速度

いま、点 $P(x, y, z)$ を中心とする小さな流体塊を考える。この点の速度成分は座標 x, y, z および時間 t の関数である。

$$\left. \begin{aligned} u &= u(x, y, z, t) \\ v &= v(x, y, z, t) \\ w &= w(x, y, z, t) \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

図 1.2 微小時間 δt 後の流体粒子の移動

点 P の流体塊は微小時間 δt の後に点 $Q(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$ に移る。流体塊は式 (1.1) の速度成分で移動するから、その微小移動量 ($\delta x, \delta y, \delta z$) は

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= u(x, y, z, t) \delta t \\ \delta y &= v(x, y, z, t) \delta t \\ \delta z &= w(x, y, z, t) \delta t \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

と表される。

この微小な流体塊のもつ特性の変化率について考えよう。特性というのは、速度成分 $\mathbf{v}=(u, v, w)$ でもよいし、流体の温度 T とか密度 ρ あるいはトレーサの濃度 C などで、これらを記号 f で代表させる。時刻 t に点 P を通過した微小流体塊（あるいは流体粒子）がもつ f の値と、その流体塊が δt 時間後に点 Q でもつ f の値との差を δf とする。時刻 $t=t+\delta t$ に点 $Q(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)$ で流体のもつ特性 f はオイラー的表示法では

$$f(x, y, z, t) + \delta f = f(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, t + \delta t) \quad (1.3)$$

である。したがって、 $\delta x, \delta y, \delta z, \delta t$ が十分小さいとすれば、上式は多変数の場合のテイラー展開により

$$\begin{aligned} f(x, y, z, t) + \delta f = & f(x, y, z, t) + \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z \\ & + \frac{\partial f}{\partial t} \delta t + O(\delta^2) \end{aligned} \quad (1.4)$$

となる。ここに、 $O(\delta^2)$ は $\delta t^2, \delta x^2, \dots$ などの二次以上の微小量を意味する。したがって、微小時間 δt を 0 の極限にもっていけば、流体粒子の運動にしたがう f の時間変化率（これを $\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta f}{\delta t} = \frac{Df}{Dt}$ と表す）は、式 (1.2) の関係を用いて

$$\begin{aligned} \frac{Df}{Dt} & \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} \\ & \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) f \end{aligned} \quad (1.5)$$

となる。ここに、微分演算子 D/Dt は

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.6)$$

を意味する。ここで、 Df/Dt は $\lim_{\delta t \rightarrow 0} \delta f / \delta t$ であるが、この微分は単なる $\partial f / \partial t$ と異なっており、流体塊とともに移動するときの流体の特性量の時間変化率 (differentiation following the motion of fluid: 流れによって移動するときの微分) という新しく導入された概念である。このような微分は実質微分 (substantial differentiation) あるいはラグランジュ (的) 微分 (まれにオイラー微分, streamline derivative, particle derivative) と呼ばれる。流体塊の加速度 ($\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$) は f のかわりにそれぞれの方向の速度成分 $\mathbf{v}=(u, v, w)$ を代入して次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_x &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \equiv \frac{Du}{Dt} \\ \alpha_y &= \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \equiv \frac{Dv}{Dt} \\ \alpha_z &= \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \equiv \frac{Dw}{Dt} \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

式 (1.7) によれば、流体塊の加速度は固定された一点での局所的加速度あるいは時間的加速度 (local or instantaneous acceleration) $\partial v/\partial t$ と流体塊の移動に伴う加速度 (移流加速度 (convective acceleration) あるいは場所的加速度) $(u\partial/\partial x + v\partial/\partial y + w\partial/\partial z)v$ との和として表される。この移流加速度または場所的加速度項はまた、非線型慣性項とも呼ばれる。

たとえば、図 1.3(a) のような一様径の長い円管の中の非圧縮性の流体では、加速度は単純に考えた場合の加速度 $\partial u/\partial t$ のみである。したがって、流れが定常であれば、加速度は 0 である。

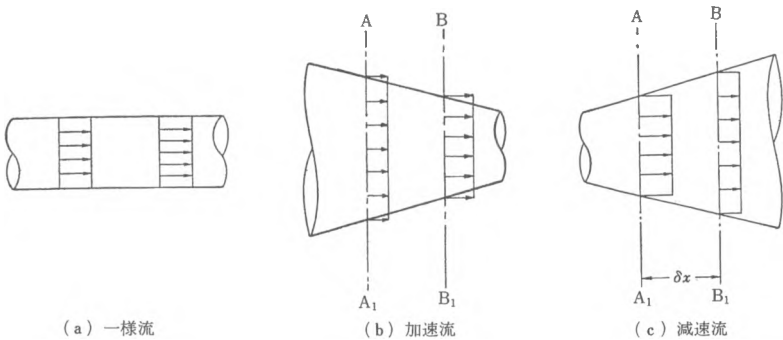


図 1.3 実質加速度の意味

ところが、図 1.3(b), (c) のような断面積 (S) が漸変する管路では、たとえ流れの時間的な変化がないとしても流量の連続の条件 ($S_A u_A = S_B u_B$) により断面 BB_1 の流速は断面 AA_1 の流速より (b) では大きく、(c) では小さい。そのため流体は加速 ($S_A > S_B$) もしくは減速 ($S_A < S_B$) することになる。すなわち、

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= 0 & (1.8 a) \\ u \frac{\partial u}{\partial x} &\cong u_A \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_A = u_A \frac{(u_B - u_A)}{\delta x} \\ &= \frac{u_A^2 (S_A/S_B - 1)}{\delta x} \neq 0 & (1.8 b) \end{aligned} \right.$$

(注 1.1) 実質微分の式 (1.5) はより形式的に導くことができる。いま、ラグランジュ流に考えて、時刻 t における流体粒子の位置を (座標 x, y, z と区別するために大文字を用いて) $X(t), Y(t), Z(t)$ と表すと、一つの流体粒子のもつ特性量 f の時間変化は、数学的に

$$\frac{d}{dt}f(X(t), Y(t), Z(t), t) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial X} \cdot \frac{dX}{dt} + \frac{\partial f}{\partial Y} \cdot \frac{dY}{dt} + \frac{\partial f}{\partial Z} \cdot \frac{dZ}{dt}$$

と表される。ところが、流体粒子の位置の時間変化はその点 $\mathbf{X}(t) = (x, y, z, t)$ での流速

$$dX/dt = u(x, y, z, t)$$

$$dY/dt = v(x, y, z, t)$$

$$dZ/dt = w(x, y, z, t)$$

であり、また $\partial f/\partial X = \partial f/\partial x$ などとしてよいから、 Df/Dt は次のようになる。

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z}$$

滝壺への恐怖

流体力学の初学の段階では、オイラーの運動方程式の加速度項の意味がわかりにくいであろう。流体の運動を質点の運動と同じくニュートンの力学 (第二法則) で記述するためには、流体を構成する微小な各部分部分 (これを流体粒子と呼ぶ) を質点のように考えて、これの加速度をとらなければならない。つまり、流体の加速度とは流体粒子の加速度のことである。流れの加速度の表示として、流体の時間的加速度 $\partial v/\partial t$ のほかに、場所的加速度項 $(u\partial/\partial x + v\partial/\partial y + w\partial/\partial z)v$ が必要なのは、流体の速度 v が固定した点での流れの速度を表しているだけであり、流体粒子 (実質部分) は流れによって刻々位置を変えているからである。

このことは、(オールを失い、モーターの故障した) ボートが滝の落ち口へと引き寄せられるときの恐怖を考えればよく理解できるであろう。上流では (水面) 勾配も緩く水深は深く川は滔々と流れている。しかし、滝に近づくにつれて、川の勾配は急になり水深は浅くしたがって流速は速くなる。川の流れが定常で、したがってどこの場所でも流れの時間的な変化はなくても、滝に近づくにつれてボートは刻々と加速される。

1.3 オイラーの運動方程式

質点系や剛体の運動はニュートンの第二法則

$$\mathcal{F} = M\alpha \quad (1.9)$$

(\mathcal{F} : 力, M : 質量, α : 加速度) をもとにして論じられる。流体の運動も全く同様に、この法則を基礎として論じられるのであるが、質点系や剛体と異なって

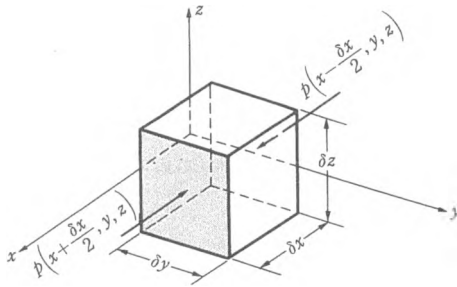


図 1.4 微小流体塊に作用する圧力

を仮想し、この微小直方体について式 (1.9) を適用する (図 1.4)。

まず、この微小流体塊の質量 M は

$$M = \rho \delta x \delta y \delta z \quad (1.10)$$

であり、加速度は速度の実質微分により式 (1.7) のように求められた。

すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \alpha_x &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{Du}{Dt} \\ \alpha_y &= \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{Dv}{Dt} \\ \alpha_z &= \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{Dw}{Dt} \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

粘性のない流体 (完全流体) 中に働く力は質量力と面を通しての圧力である。圧力 p は面への内向き法線方向に作用する。 x 軸に垂直な距離 δx だけ隔った二つの面に働く圧力の差として、 x 方向の外力は

$$\begin{aligned} & \left\{ p \left(x - \frac{\delta x}{2}, y, z, t \right) - p \left(x + \frac{\delta x}{2}, y, z, t \right) \right\} \delta y \delta z \\ &= - \frac{\partial p}{\partial x} \delta x \delta y \delta z + O((\delta x)^2) \delta y \delta z \end{aligned}$$

である。

y 軸、 z 軸に垂直な面に働く圧力による力についても、同様にそれぞれ $(-\partial p / \partial y) \delta x \delta y \delta z$ および $(-\partial p / \partial z) \delta x \delta y \delta z$ が導かれる。

また、質量力は流体の単位質量に働く外力を $\mathbf{F}(F_x, F_y, F_z)$ とすれば、

$$\mathcal{F} = \rho \mathbf{F} \delta x \delta y \delta z = \rho \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \delta x \delta y \delta z \quad (1.12)$$

流体はいわば不定形であるので、この法則を流体系に都合のよいように書き換える必要がある。この基礎方程式は、18世紀のスイスの大数学者オイラーにより導かれた。

流体中に各座標軸に垂直な面をもつ微小直方体 (中心点 x, y, z 、稜の長さはそれぞれ $\delta x, \delta y, \delta z$ とする)

と表される。したがって、これらの関係を式 (1.9) に代入すれば、流体の運動方程式が次のように導かれる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \frac{Du}{Dt} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{Dv}{Dt} &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{Dw}{Dt} &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (1.13a)$$

これを、オイラーの運動方程式 (Euler's equations of motion, 1755) という。

流体系には質量と運動量の二つの保存則のほかにはエネルギーの保存則が成立する。空気など普通の気体では、圧力 p と密度 ρ との間に状態方程式

$$p = \frac{R}{m} \rho T \quad (1.14)$$

の関係が成立する。ここに、 T は絶対温度、 m は気体の分子量、 R は気体定数 ($8.314 \times 10^7 \text{ erg/}^\circ\text{K}$) である。一定温度の下では

$$\rho \propto p \quad (1.15)$$

の関係が、また変化が急に起こり熱の出入のないと考えられる断熱変化の場合には

$$\rho \propto p^{1/\gamma} \quad (1.16)$$

である。ここに、 $\gamma = C_p/C_v$ 、 C_p : 定圧比熱、 C_v : 定積比熱。

流線座標系による運動方程式

座標軸の一つを流線に沿ってとり、もう一つの座標をそれに直交するように定めた直交曲線座標系によって、流れの運動を記述する方が都合のよい場合がある。流線の方法を s 、それに直交する方向を n とすれば、流線座標系による運動方程式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{g} \frac{\partial v_s}{\partial t} + \frac{1}{2g} \frac{\partial v^2}{\partial s} &= -\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{p}{\rho g} + z \right) \\ \frac{1}{g} \frac{\partial v_n}{\partial t} + \frac{1}{g} \frac{v^2}{r} &= -\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{p}{\rho g} + z \right) \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

ここに

$v_s = v = \frac{Ds}{Dt}$: 流線に沿う流速

$v_n = 0$: 流線に直交する方向の流速成分

$\alpha_s = \frac{\partial v_s}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial s}$: 流線方向の (局所+移流) 加速度

$\alpha_n = \frac{\partial v_n}{\partial t} + \frac{v^2}{r}$: 流線に直交する方向の (局所+移流) 加速度

流線に垂直な方向の速度成分 v_n は常に 0 であるが、 $\partial v_n / \partial t$ は 0 とは限らない。
 (H. Rouse (1946) : p. 29, 36, 46, 80; 日野幹雄 (1983) : p. 326)

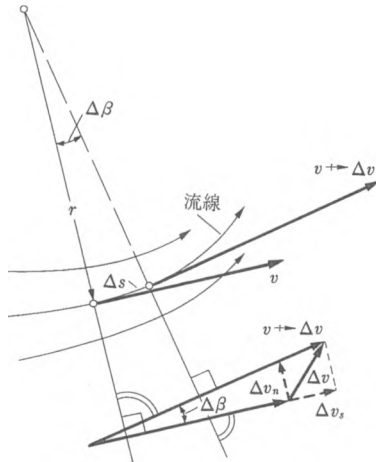


図 1.5 流線に沿う速度変化の成分 (Rouse, 1946, p. 31 に一部加筆)

1.4 オイラーの連続の方程式

流れの場に前と同様にして点 (x, y, z) を中心にして空間に固定した仮想的な微小直方体を考える (図 1.6). x 軸に垂直な二つの面を通して時間 t から $t + \delta t$ の間にこの検査域に出入する流体の質量は次のようになる。

左の面を通して入る質量 $= \rho \left(x - \frac{\delta x}{2}, y, z, t \right) \cdot u \left(x - \frac{\delta x}{2}, y, z, t \right) \delta y \delta z \delta t$

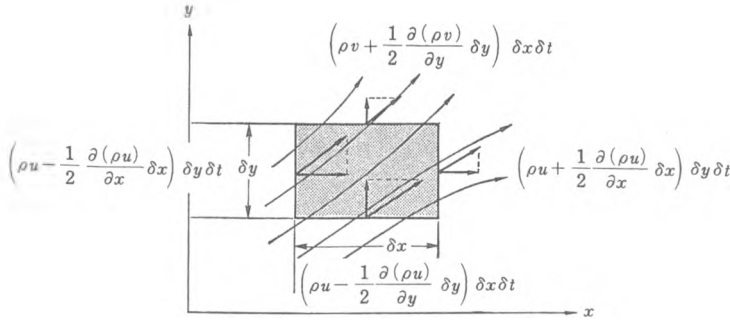


図 1.6 微小直方体への流体の流出入

いま、 ρu を一つの変数のように考えて点 (x, y, z) でテイラー展開すれば、上式は

$$\cong \left\{ \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \cdot \left(-\frac{\delta x}{2} \right) \right\}_{x, y, z, t} \delta y \delta z \delta t \quad (1.18)$$

となる。次に、 x 軸に垂直な右の面からは流体が出ていくから、入ってくる質量としては符号を逆にして、

$$\begin{aligned} \text{右の面を通して入る質量} &= -\rho \left(x + \frac{\delta x}{2}, y, z, t \right) \cdot u \left(x + \frac{\delta x}{2}, y, z, t \right) \delta y \delta z \delta t \\ &\cong - \left\{ \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \cdot \left(\frac{\delta x}{2} \right) \right\}_{x, y, z, t} \delta y \delta z \delta t \quad (1.19) \end{aligned}$$

したがって、 x 軸に垂直な面を通しての質量の増加は式 (1.18), (1.19) の和から $\{-\partial(\rho u)/\partial x\} \delta x \delta y \delta z \delta t$ となる。 y 軸および z 軸に垂直な六面体の面を通しての質量の増加は、同様にそれぞれ $\{-\partial(\rho v)/\partial y\} \delta x \delta y \delta z \delta t$ および $\{-\partial(\rho w)/\partial z\} \delta x \delta y \delta z \delta t$ となる。これらの3項の総和は、六面体内の質量の増加分 (密度の増加分 \times 体積)、 $(\partial \rho / \partial t) \times \delta x \delta y \delta z \delta t$ と等しくなければならない。したがって、質量保存則として次の連続の方程式 (equation of continuity) が導かれる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (1.20)$$

あるいは、先に定義した実質微分演算記号 D/Dt を用いれば、上式は次のように書き換えられる。

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1.20 a)$$

ここに、記号 ∇ (ナブラ) はベクトル微分演算子 $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ を意味し、古代アッシリヤの琴の形に由来する。 $\nabla \cdot \mathbf{v}$ はベクトルの内積である。

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

式 (1.20 a) の左辺の第一項が零

$$\frac{D\rho}{Dt} \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 \quad (1.21)$$

である流体を非圧縮性流体（あるいは縮まない流体, incompressible fluid）という。 $\rho = \text{一定}$ の流体はもちろん非圧縮性流体であるが、成層密度流のように密度が場所により異なり、 ρ が一定ではない非圧縮性流体もある。

もし、流体が縮まない流体であれば、 ρ の実質微分は零であるから、

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.22)$$

すなわち、

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (\text{あるいは } \text{div } \mathbf{v} = 0) \quad (1.22 a)$$

1.5 流体運動における変位と変形

a. 流体における変形と応力

流体とは：静止状態の流体には接線応力は働かず、応力は常に面に垂直に働く圧力である。流体は連続体ではあるが変形が自由であり、運動が停止しておれば形がもとの形から変わっても変形に対する抵抗は働かず、したがって変形は回復しないという性質をもっている。しかし、粘性をもつ流体では、流体の変形の過程で（変形速度に応じて）変形に対する抵抗が働く。すなわち、粘性による接線応力（剪断応力）が発生する。粘性流体における剪断応力と剪断速度の具体的な関係については、粘性流体の § 7.1 において述べる。接線応力が働くと流体は静止状態に留まりえず、接線応力を解消する方向に、つまり速い側の流体を減速し、遅い側の流体を加速する方向に運動が起こり、その運動が収まったときに接線応力は消える。

気体にせよ液体にせよ、現実の流体は負の圧力（張力）には耐ええないという性質がある。しかし、理論的には負の圧力の可能性を排除するものではない。（なお、液体はある条件のもとで負圧になりうる（注 4.4）。）

静止流体の条件：バルトロピー流体（密度 ρ が圧力 p だけの関数である流体）は、外力がポテンシャルをもつ場合にのみ静止状態が可能である。なぜならば、

運動方程式 (1.13) において静止状態 $v=0$ を考えると、

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\rho} \text{grad } p = \text{grad } P \quad (1.23)$$

である（ここに、 $P(p) = \int dp/\rho(p)$ ）。したがって、完全流体が静止状態にあるためには外力 \mathbf{F} が保存力、つまりポテンシャルをもち $\mathbf{F} = \text{grad } \Pi$ と表されることが必要であり、逆に非保存力のもとでは、完全流体の静止状態はありえない。

b. 運動の基本要素

上に述べたように、流体運動の特徴は変形が自由であるということである。流体の運動は次の四つの基本的要素に分解される。

- (i) 並進運動
- (ii) 伸び縮み
- (iii) 剪断変形
- (iv) 回転

これらのうち (i) 並進運動と (iv) 回転は流体の微小領域の変位を表し、(ii) 伸縮と (iii) 剪断変形は流体の変形を表している。このことは、流体の一部を平行四辺形(二次元の場合)、あるいは直方体に切り取って考え、ちょうど消しゴムのような柔らかい弾性体の変位・変形の場合と比較すれば容易に理解しうるであろう。ただし、弾性体では剪断歪(変形)に応じた内部応力(接線応力)が発生し、これにより弾性体は外部からの剪断力に抗して変形して形を保つことができるが、流体の場合には内部応力は流体の変形速度に応じて生じ、流体は剪断応力を緩和する方向に運動を続けるため、一定の変形を保ち続けることはできない。

流体小塊のこの4種類の運動(変位・変形)を数学的に表現しておこう。簡単のために、まず二次元の運動を考える。ある点 $A(x_0, y_0)$ の近傍の点 P の流体速度 $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ を A 点のまわりでテイラー展開すれば、 A 点に対する P 点の相対的な移動速度は次のように表せる。

$$\delta u = u - u_0 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_0 \delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 \delta y + O(\delta^2) \quad (1.24 a)$$

$$\delta v = v - v_0 = \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_0 \delta x + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_0 \delta y + O(\delta^2) \quad (1.24 b)$$

ここに、添字 0 は A 点での値を意味し、 $(\delta x, \delta y)$ は A 点から微小距離離れた P 点の A 点に対する相対座標の x, y 成分を表し、 $O(\delta^2)$ は $(\delta x)^2$, $(\delta y)^2$ 以下のオーダーの微小量を意味する。

上式より流体微小要素の変位・変形はそれぞれ次のようになる。

並進運動：流体は各点各点が速度 u_0, v_0 で全体として x および y の方向に移動している。

伸縮：図 1.7 のような緩やかに幅の狭くなる管内の流れを考えると、連続の条件から流軸 x 方向の流速 u は x 方向に徐々に増加する ($\partial u/\partial x > 0$)。したがって、

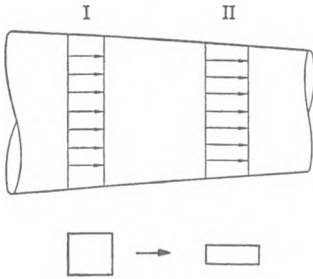


図 1.7 流体微小要素の伸縮変形

辺の長さが $\delta x, \delta y$ の微小四辺形を考えると、式 (1.24 a, b) より x 方向の辺 ($\delta x; \delta y=0$) は単位時間あたり $\delta u = (\partial u/\partial x)\delta x$ (以下では式 (1.24 a, b) 中の添字の 0 を省略する) ずつ長く引き伸ばされる。すなわち、 $\partial u/\partial x$ (x 方向の速度 u の x 微分) は x 方向の辺の伸び速度 ϵ_x を表している。もし、 $\partial u/\partial x$ が負なら縮みを意味する。同様に、式 (1.24 b) の

$\partial v/\partial y$ (y 方向の速度 v の y 微分) は y 方向の辺の伸び速度 ϵ_y を表す。

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1.25)$$

剪断変形：図 1.8 のように流速分布が壁に垂直な方向に単純に直線的に変化する平行平板間の流れを考える。このような流れはクエット (Couette) 流れあるいは単純剪断流と呼ばれる。粘性をもつ実在の流体では、このような流れは下の平板を固定し上の平板を一樣速度 U_0 で引っ張るときに生じる。

$$u = U_0(y/h), \quad v = 0 \quad (1.26)$$

(ここに、 h は上下の板の間隔)。このクエット流の場合

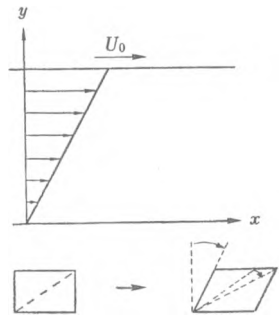


図 1.8 流体微小要素のずり変形と回転

に壁に平行な辺をもつ四辺形を考えると、 x 方向にも y 方向にも流体の伸びは生じない。なぜならば、式 (1.25) において $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y = 0$ であるから。しかし、最初に矩形であった微小な流体塊も上の辺の移動速度が $\partial u/\partial y \cdot \delta y$ だけ速いため平行四辺形に変形していく。この変形は流体の層が単に x 方向に相互に平行にずれる運動、すなわち剪断変形であって、四辺形の高さや面積は不変である。 $\partial u/\partial y$ は剪断変形率を表している。もし、速度成分 v の x 方向微分 $\partial v/\partial x$ があれば、これも微小な矩形流体塊の剪断変形となるから、一般にはそれらの和

$$\gamma_{xy} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1.27)$$

が (x, y) 平面内の剪断変形 (あるいはずり変形, ずれ変形, ずれひずみ, シアー (shear)) の速度を表す。

正確にいうと, クエット流れの場合には, 微小四辺形の対角線は流下とともに傾斜 (=回転) するから, “剪断変形” ($\gamma_{xy} = \partial u / \partial y$) と次に述べる “回転” ($\Omega_z = -1/2 \cdot \partial u / \partial y$) が同時に起こっている。

回転: 最後に流体の回転運動について考えよう。図 1.9 の微小な流体塊 (四辺形) ABCD の各頂点の A 点に対する相対的な変位のうち反時計まわりの回転成分を取り出

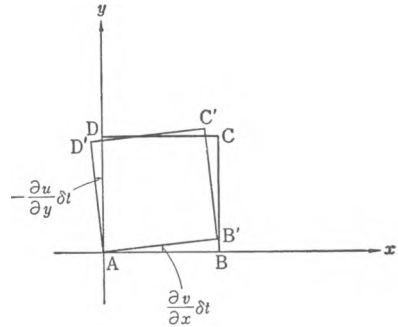


図 1.9 微小流体要素の回転

して考える。まず, x 軸上にある B 点 が微小時間 δt の間に x 軸に垂直な方向へ行く相対変位は, $\partial v / \partial x \cdot \delta x \cdot \delta t$ で点 B は点 B' へ移動する。ここに, δx : AB 間の微小距離。 x 軸方向への変位 $\partial u / \partial x \cdot \delta x \cdot \delta t$ は回転運動には関係がないので取りあげない。したがって, 辺 AB が微小時間 δt の間に辺 AB' まで回転する角速度 (単位時間あたりの角度の増加率) は $\partial v / \partial x$ である。

次に, y 軸方向の点 D の回転成分を考える。速度 u は x 軸の方向を正としているから, x 軸の負の方向の速度は $(-u)$ と表されることを考慮すると, y 軸方向の辺 AD は反時計まわりに $\partial(-u) / \partial y$ の角速度で回転している。この四辺形の z 軸に関する反時計まわりの回転の角速度 Ω_z はこの二つの量の平均値として

$$\Omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1.28)$$

である。

c. 変位・変形運動の基本要素による表示

式 (1.24 a, b) を微小量の二次以上の項を省略して書き直すと, 微小な流体塊の運動は上に導いた四つの変位・変形の基礎要素の各成分 (v_0 : 並進, ϵ : 伸び, γ : 剪断, Ω : 回転) に関して, 次のように表現することができる。

$$u = u_0 + \epsilon_x \delta x + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \delta y - \Omega_z \delta y \quad (1.29 a)$$

$$v = v_0 + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \delta x + \epsilon_y \delta y + \Omega_z \delta x \quad (1.29 b)$$

以上の議論は簡単に三次元の一般の場合に拡張できる。すなわち、伸び速度 ϵ のそれぞれの軸の方向成分は（テイラー展開を行う点の位置を示す添字 0 は省略して）

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

である。

剪断変形 γ は x 軸に垂直な (y, z) 面内の剪断変形 γ_{yz} , y 軸に垂直な (z, x) 面内の剪断変形 γ_{zx} , z 軸に垂直な (x, y) 面内の剪断変形 γ_{xy} として

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{zy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (1.31)$$

が定義される。

回転運動に関しては, x, y, z 軸まわりのそれぞれの成分を (ξ, η, ζ) とするベクトル ω が定義される。

$$\omega = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (1.32)$$

ベクトル ω は渦度 (vorticity) といわれ, 回転ベクトル Ω は渦度 ω の 1/2 である。

$$\Omega = \frac{1}{2} \omega \quad (1.33)$$

このとき, 流体塊の運動は次のようなサイクリックな規則的な式で表される。

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \epsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \epsilon_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\zeta}{2} & \frac{\eta}{2} \\ \frac{\zeta}{2} & 0 & -\frac{\xi}{2} \\ -\frac{\eta}{2} & \frac{\xi}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \quad (1.34)$$

上式の右辺が示すように、流体の運動は右辺第二項の伸縮・剪断変形と第一および第三項の並進・回転（渦）運動の和として表すことができる。粘性による剪断応力は上式右辺第二項の変形によって生じる。

渦の回転方向の正負

回転 Ω の定義の際に述べたように、回転や渦は反時計まわりの方向を正としている。あるいは、右ねじを座標軸の正の方向に進める回転方向が渦度の各座標軸成分の正の回転方向である（図 1.10）。

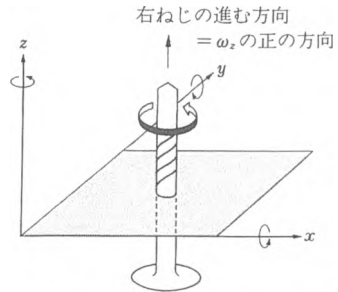


図 1.10 渦度の正の回転方向（右ねじを座標軸の正の方向に進ませる回転方向）

d. 渦度のベクトル表示

式 (1.32) のような渦度の定義式は覚えにくいですが、これを簡単に速度ベクトル v とベクトル演算子 ∇ のベクトル積として表現することができる。

二つのベクトル A, B から定義されるベクトル積 (vector product) $A \times B$ は、 A と B の張る平行四辺形の面積 $|A| \cdot |B| \sin \theta$ に等しい大きさを持ち、この二つのベクトルの作る面に垂直に立つ右ねじを A から B へ回すときに、ねじが進む方向と同じ方向をもつベクトルである。ベクトル積 $A \times B$ は次の行列式で表される（図 1.11）。

$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_y B_z - A_z B_y) i$$

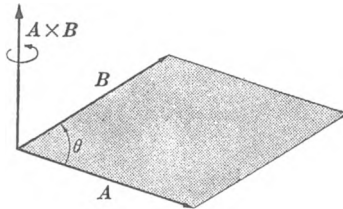


図 1.11 ベクトル積の幾何学的約束

$$+(A_z B_x - A_x B_z)j + (A_x B_y - A_y B_x)k \quad (1.35)$$

ここに、 i, j, k はそれぞれ x, y, z 軸方向の単位ベクトルを表す。

式 (1.35) の表示を用いると、渦度ベクトル ω は、形式的にベクトル微分演算子 $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ と速度ベクトル $v = (u, v, w)$ とのベクトル積で表される。

$$\omega = \nabla \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} \quad (1.36 a)$$

$$= \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) k \quad (1.36 b)$$

$$= \xi i + \eta j + \zeta k \quad (1.36 c)$$

上の演算は速度ベクトル v について行われたもので、この演算を $\text{rot } v$ (rotation v) と書く。

$$\begin{aligned} \omega &= \text{rot } v \\ &= \nabla \times v \end{aligned} \quad (1.37)$$

e. 渦なし流れと速度ポテンシャル

流れが渦なし $\omega = 0$ ならば、微分方程式論からこの関係は

$$u dx + v dy + w dz$$

が全微分 ($d\Phi$) であるための必要かつ十分な条件であり、したがって流速成分はあるスカラー関数 $\Phi(x, y, z, t)$ のその方向の偏微分から導くことができる。

$$u = \partial\Phi/\partial x, \quad v = \partial\Phi/\partial y, \quad w = \partial\Phi/\partial z \quad (1.38)$$

あるいは、任意の s 方向の速度成分 v_s は

$$v_s = \partial\Phi/\partial s \quad (1.39)$$

上式を ω の定義式 (1.32) に代入すれば確かに $\omega = 0$ となる。このスカラー関数 $\Phi(x, y, z, t)$ を速度ポテンシャル (velocity potential) という。速度ポテンシャルの存在条件については章を改めて第3章 (§ 3.2.c) で詳しく述べる。

体積ひずみ速度

流れの中に各軸方向の稜の長さが $\delta x, \delta y, \delta z$ の微小直方体を考える。この直方体は微小時間 δt 後には各稜の長さは、 $(1 + \varepsilon_x \delta t) \delta x$, $(1 + \varepsilon_y \delta t) \delta y$, $(1 + \varepsilon_z \delta t) \delta z$ に変化するから、初めの微小体積 $\delta V = \delta x \delta y \delta z$ に対するその体積の変化率は (δt 後の微小体積を $\delta V'$ として)

$$\frac{1}{\delta V} \frac{d\delta V}{dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta V} \frac{\delta V' - \delta V}{\delta t} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \quad (1.40)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \text{div } \mathbf{v} \quad (1.40 a)$$

となる。これを体積ひずみ速度という。

(注 1.2) shear の訳語について

shear あるいは shearing motion の訳には、剪断、ずり、ずれ、ずれひずみ、シアーなどの語が用いられているが、統一的な訳はない。漢語の剪断(せんだん)が最も誤りのない訳だと思うが、剪という字が難しく他に使用されることが少ないこともあり、一般性が失われてきている。和語としては「ずれ」や「ずり」がある。「ずれ」には shear, “擦れ”の意味もあるが、(距離的に)離れるという意味があるからいま一つびったりしない。「ずり」は「摺り足」などの「する」の名詞形であるが、これとは全く別の意味をもつ碎(掘りくずして坑外に運び出す岩砕)という字もあり同じく一般的ではない。「ずれひずみ(速度)」と訳している本もあるが、これは shear strain の訳にはかならない。したがって、最近地球物理学(気象学や海洋学)の分野で用いられているように、「シアー」とするのが一案かもしれない。

1.6 渦度と渦

a. 渦とうず巻き

われわれのまわりの流れには、うず巻き運動の例を数多く見ることができる。たとえば、コーヒーを掻き交ぜたときのコーヒーカップの中のうず、洗濯機の中のうず巻き、浴槽の排水口にできるうず巻き、鳴門海峡のうず、竜巻き、台風の中心のうず等である。流体がある軸のまわりに回転していると、世間ではすべてこれを“うず”と称しているが、流体力学的に定義される渦の要件を満たしていない“うず”(ω=0のうず)であることが多い。このような“うず”を「渦なしのうず」と呼んで、本当の渦(=「渦ありのうず」「渦運動」と区別している。先にあげたうずの例では、多くの場合、中心部だけが「渦あり」で、それ以外は「渦なし」である。このような“うず”は、ランキンの渦モデル(例 1.1, 1.2, §4.3.c)で表される。

他方、日常見かける流れの多くは人間の目には個別の渦とは見えなくとも、流体力学的には渦の集合とみなせる流れ、つまり渦度が零ではない流れである(例 1.3)。このような観点から、流れを「渦なし流れ」、あるいは「非回転流れ」(irrotational)と「渦あり流れ」または「渦運動」、「回転流れ」(rotational flow)に

二分して考えることができる。

英語では, vortex や eddy, swirl, tornado, whirl が渦や “うず”, うず巻きを表す言葉である。

十文字型浮子による渦度の判定

流れが “渦あり” か “渦なし” か, あるいは “どちらの方向に回転しているか” を判定するために, 小さな軽い棒や小木片を十文字に組み合わせたものを, 流れに浮かべて流す方法がある。たとえば, 十文字の一辺の方向を x 軸方向, したがって他の一辺は y 軸方向とすると, 前者の回転は反時計まわりの回転あるいは渦度の $\partial v/\partial x$ の項を, 後者の回転は $-\partial u/\partial y$ の項を検知する。この二本の小さな棒の検知する回転の和として十文字型浮子は $(\partial v/\partial x - \partial u/\partial y)$ の角速度で回転する。

ランキン渦の場合には, 半径 r_0 以内の流れは 「渦ありの渦」 であるから, 十文字型浮子は常に渦の中心を向いて回転する (図 1.12(a)) が, 半径 r_0 より外側では流れは渦巻き運動をしているものの, 十文字型浮子は姿勢を変えずに渦の中心のまわりを回転する (図 1.12(b))。

この十文字型浮子による渦度の判定は, 単独な渦の場合に限らず, さまざまの大きさのたくさんの渦の集合とみなせる実際の流れ (粘性流体の層流や乱流) の場合にも用いられる。

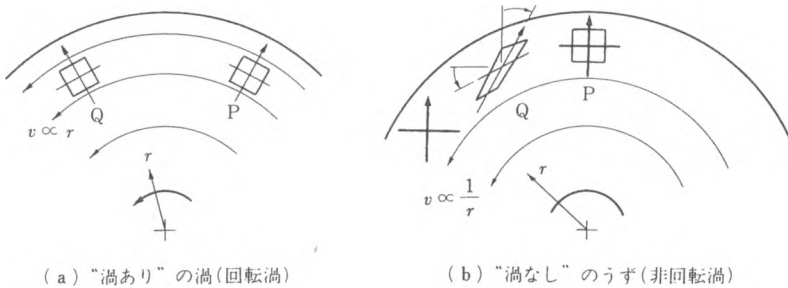


図 1.12 十文字型浮子による渦度の検知

b. ランキン渦モデル

純粋な渦運動は流体の剛体的回転運動成分であって, 渦の中心からの距離 (半径) r の点での円周方向の速度 v_r は $v_r \propto r$ である (例 1.1). しかし, このような運動は渦の中心からある有限の範囲に制約される。半径 r_0 の中心部の 「渦あ

りの渦」と、その外側の円周方向の速度が $v_r \propto 1/r$ 、そこでの渦度が $\omega_z = 0$ の渦 (例 1.2) を結合した渦のモデルをランキン渦 (Rankine's vortex) と称する。この渦モデルは現実の渦運動をよく表す。

例 1.1 渦

速度成分が式 (1.41) で表される流れを考える。

$$u = -Ky/r_0, \quad v = Kx/r_0 \quad (1.41)$$

この流れの流速 q は

$$q = (u^2 + v^2)^{1/2} = (K/r_0)(x^2 + y^2)^{1/2}$$

で、中心からの半径に比例している。また、中心点からのベクトル $\mathbf{r} = (x, y)$ とその点での流速 (u, v) は、 $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = 0$ であるから直交している。したがって、この流れは原点を中心とする円運動で、流れ場全体が一体となっていていわば剛体的に回転している (図 1.12(a))。

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\left(\frac{K}{r_0}\right), \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{K}{r_0} \quad (1.42)$$

であるから、剪断 γ_{xy} と回転 Ω_z はそれぞれ次のようになる。

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (1.43)$$

$$\Omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{K}{r_0} \quad (1.44)$$

つまり、この流れは流体力学的な渦、“渦ありのうず”で、剪断変形は零である。

例 1.2 渦糸による流れ

次式の与える流速成分をもつ流れも原点を中心とする円運動である。ただし、流速 q は半径に逆比例して減少している。

$$u = \frac{Ky}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{-Kx}{x^2 + y^2} \quad (1.45)$$

$$q = (u^2 + v^2)^{1/2} = K/(x^2 + y^2)^{1/2} \quad (1.46)$$

また、

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -K \left(\frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) \quad (1.47 a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = K \left(\frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) \quad (1.47 b)$$

であるから、剪断変形と渦度はそれぞれ次のようになる。

$$\gamma_{xy} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{2K(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \quad (1.48)$$

$$\omega_z (\equiv \zeta) = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -K \left(\frac{2}{x^2 + y^2} - \frac{2(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right) = 0 \quad (1.49)$$

この流れは原点にある渦糸の作る流れ場で、例 1.1 の流れ（剛体的に回転する渦）とは異なり、渦度は原点を除いて零である。しかし、剪断変形は零ではない。この流れはいわゆる“渦なしのうず”である（図 1.12 (b)）。

c. “うず”に見えない渦

例 1.3 平行平板間の粘性流体の流れ（二次元ポアズイユ（Poiseuille）流）

平行平板間の粘性流体の流れの流速分布は、放物線分布をなす（図 1.13）。

$$u(y) = a \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h} \right) \quad (1.50)$$

ここに、 a ：定数、 h ：平行平板の間隔、 y ：平板からの距離。このような流れの中にはいわゆる渦は見えない。しかし、渦度を求めると

$$\omega_z (\equiv \zeta) = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.51)$$

$$= \frac{a}{h} \left(\frac{2y}{h} - 1 \right), \quad \begin{cases} < 0 & (0 \leq y < h/2) \\ = 0 & (y = h/2) \\ > 0 & (h/2 < y \leq h) \end{cases} \quad (1.52)$$

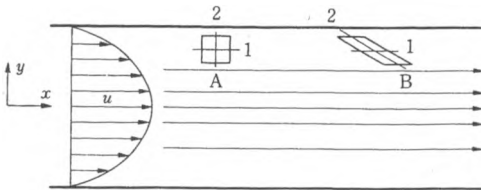


図 1.13 平行平板間の“うず”に見えない回転流れ

となって、流れの中心軸以外は渦度は零ではない。平行平板間の流れの下半分は時計まわりの渦（回転流れ）で、その上半分は反時計まわりの渦で満たされている。しかも、上下の壁面で渦度が一番大きくなる。

前述の十字字型浮子を浮かべて、渦の存在を確かめてみよう。また、第 19 章の写真（図 19.1）を参照されたい。

1.7 循環と渦度

a. 循環の定義

流れの中の任意の閉曲線 C に沿って一巡する、その曲線方向の速度成分 v_s の積分を循環（circulation） Γ と呼ぶ。すなわち、循環とは曲線 C に沿う流れを表す。

曲線Cの線要素ベクトルを ds , 速度ベクトル v の曲線Cへの接線 s 方向の成分を v_s とすれば, $v \cdot ds = v_s ds$ であるから, 循環 Γ は次のように表される (図 1.14).

$$\Gamma(C) = \oint_C v_s ds = \oint_C v \cdot ds \quad (1.53 a)$$

$$= \oint_C (u dx + v dy + w dz) \quad (1.53 b)$$

b. 循環と渦度

ある閉曲線Cについての循環 Γ とその閉曲線に囲まれた任意の曲面S上の渦度 ω の間には次のような簡単な関係がある.

$$\Gamma = \oint_C v \cdot ds = \iint_S (\text{rot } v)_n dS = \iint_S \omega_n dS \quad (1.54)$$

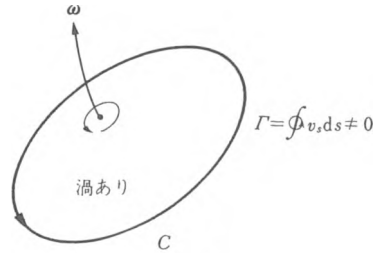


図 1.14

すなわち, “循環 Γ は閉曲線Cに囲まれた任意の曲面S上での渦度 ω の法線成分 ω_n の積分に等しい.” ここに, dS は曲面Sの面素, ω_n はベクトル $\text{rot } v = \omega$ のS面の法線方向成分を表す. この関係は, 閉曲線に沿う積分は面積分に交換するというベクトル解析におけるストークス (Stokes) の定理より導かれる.

閉曲線Cに囲まれたS面への法線 n の向きは, 閉曲線Cに沿って積分の方向に進むときに右手側になる面 (これをS面の裏という) から, 左手にある面 (Sの表面) へ向かう (抜ける) 方向を正とする. あるいは, S面に立てた右ねじを,

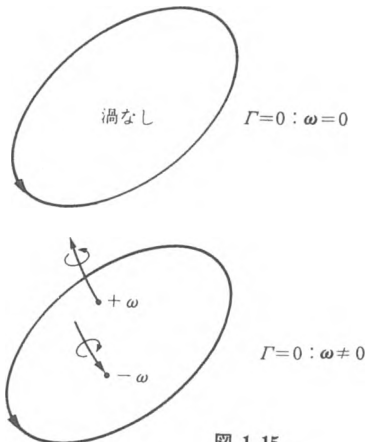


図 1.15

閉曲線Cの積分方向に回すときに, ねじの進む方向を法線の正の方向とする. したがって, 循環の値は閉曲線Cを一巡する向きによって符号が逆になる. 二次元の場合には, $\omega_n = \omega_z$ (つまり, 法線方向を z 軸の正の方向) にとるから閉曲線Cに沿う積分経路は反時計まわりとなる.

式 (1.54) から, 流れの場が渦なし ($\omega = 0$) ならば, 循環は常に0である. しかし, その逆は必ずしも成立しない. というのは, 閉曲線Cで囲まれた領域内の正の渦

と負の渦が同じ量あれば、積分は互いに打ち消し合うからである (図 1.15).

渦なし $\vec{v} \rightarrow$ 循環 = 0

もし、流れが渦なしならば、点Aから点Bに到る任意の曲線 C' に沿うその方向の速度成分 v_s の積分 $I = \int_{C'} v_s ds$ は積分径路にはよらない。なぜならば、点Aから点Bへ曲線 C' に沿って積分し、別の曲線 C'' を逆に点Bから点Aへ積分すれば、式 (1.39) により

$$\Gamma = \int_{C'} v_s ds + \int_{-C''} v_s ds = 0$$

したがって、

$$\int_{C'} v_s ds = \int_{C''} v_s ds \quad (1.55)$$

また、後に示すように小さな閉曲線を通る渦線で形成される渦管を一周する閉曲線についての循環は閉曲線のとり方によらない。

$\omega \rightarrow \infty$ になりえないから、渦の断面積 σ は 0 にはならない。したがって、渦は流れの中で中断することはない。渦線は境界から境界まで伸びているか、あるいは自分自身で閉じて渦輪を作るかのいずれかである。

c. クッタ-ジューコフスキーの定理 (揚力と循環)

流速 U で流れている完全流体中の物体には、流速 U と物体まわりの循環 Γ (反時計まわりを正とする) と流体の密度 ρ の積に等しい揚力

$$L = -\rho U \Gamma \quad (1.56)$$

が働く。これをクッタ-ジューコフスキー (Kutta-Joukowski) の定理という (§ 4.6. a 参照)。この定理は物体の形のかんにかかわらず、一般的に成り立つ。

翼が航空機を浮かせる力 (揚力) も、この原理により計算することができる。翼のまわりに循環 Γ が発生するのは、「翼の上面からの流れと下面からの流れが翼の下流端で合流するとき、上下面の圧力・流速が等しくなければならない」というクッタの条件の要請による (§ 4.7. b)。もっとも、航空機が飛ぶ理由は、もっと根元的にベルヌーイ (Bernoulli) の定理 (§ 2.1) や“渦中心の低圧”原理によっても定性的に説明しうるし、この方がよくわかる。

x 軸の正の方向に向かう一般流の中におかれた円柱まわりに時計まわりの循環 ($-\Gamma > 0$) がある場合には、円柱まわりの流線は円柱の上面側では一般流と循環の作る流れが重なって流速が速く、したがって流線は密になり、ベルヌーイの定理により圧力は低下する。他方、円柱の下面では本来の流れと循環による流れが

逆であるから流速は減少し、逆に圧力は増加する。この結果、円柱には上下の圧力差により上向きに揚力が生じる。

マグヌス効果：流れの中の円柱もしくは球に回転を与えると、この円柱や球には揚力（流れに直角方向の力）が働く。あるいは回転を与えて球を投げるとき、揚力により球のコースは曲がる。揚力の働く方向は、流れと円柱や球の回転が一致する側に向かう。これを**マグヌス (Magnus) 効果**という。野球のピッチャーがボールに回転を与えてカーブやドロップを投げるのも、ピンポンで相手の球をカットして回転を与えて打ち返し相手を惑わすのもこの効果による。今世紀の初め（1924）には帆のかわりに三本の回転円柱を備え（横）風を受けてマグヌス効果により航行するローター船（ドイツ、アントン・フレットナー）が造られたことがある（図 1.16：2号船〈バーバラ〉1700トン）。

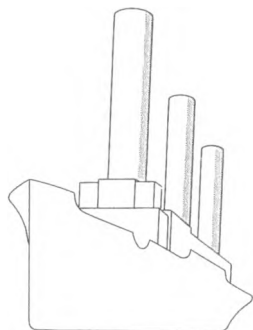


図 1.16 帆のかわりをする円筒

（注 1.3） 循環の積分路の方向

渦度 ω の正負については、右ねじの進行方向ルール、したがって二次元の場合には「反時計まわりの向きを正とする」ということに約束（記述）が統一されている。

循環 Γ の積分路の方向についても、（循環の定義式 $\Gamma = \int \omega ds$ において ω と Γ の符号が一致するように——渦糸の場合を考えよ！）右手系により自然な定義を行えば、二次元の場合には当然循環の積分路の方向は反時計まわりとすべきである。それゆえ、わざわざ積分路の方向については断らなくてよいはずであるが、はっきりと“反時計まわりの積分路を正とする”と注意している本もある。しかし、不思議なことに、「循環については渦度とは逆に時計まわりを正にとる」と断っている本がある。これは一部でこのような慣習があるためである。一部にこのような慣習が生じたのは物体まわりに（時計まわりの）循環 Γ_* があるとき、物体には $L = \rho U \Gamma_*$ の揚力が働くというクッター-ジューコフスキーの定理の記述との関係によると思われる。流速 U を x の正の方向（左から右へ）、揚力 L を y の正の方向（上向き）とするとき、この表示では循環 Γ_* は時計まわりが正でなければならないからである。

もし、特に断らずに記述を統一しようとするならば、循環も反時計まわりを正とする方が自然だから、クッター-ジューコフスキーの定理は $L = -\rho U \Gamma$ と記す方がよいであろう。

（注 1.4） 循環と渦度の関係の導き方

式 (1.54) の関係をわかりやすく導く。いま微小四辺形 ($\delta x \times \delta y$) を考える。この微小部分の渦度 $\omega_z (= \zeta)$ は一様とみなしてよい。微小四辺形の周辺 δC に沿う循環 $\delta \Gamma$ は（辺 CD, DA は x, y の負の方向であることを考慮すると）次のように表される。

$$\begin{aligned}
 \delta\Gamma &= \oint_{sC} v_s dx = \int_{AB} (u)_{AB} dx + \int_{BC} (v)_{BC} dy + \int_{CD} (u)_{CD} (-dx) + \int_{DA} (v)_{DA} (-dy) \\
 &= u\delta x + \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} \delta x\right) \delta y - \left(u + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y\right) \delta x - v\delta y \\
 &= \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \delta x \delta y \\
 &= \omega_n \delta S = \omega_n \delta S \quad (\delta S = \delta x \delta y : \text{微小四辺形の面積}) \tag{1.57}
 \end{aligned}$$

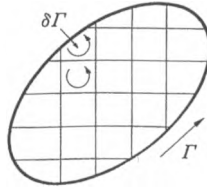
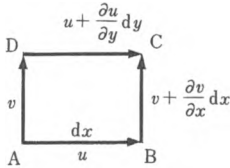


図 1.17 循環に関するストークスの関係 (本間, 1952)

閉曲線 C で囲まれた領域 S を多数の相接する小部分に分けると、相接する微小部分の共通辺に沿う積分は、積分の方向が逆で互いに打ち消し合うので、微小部分についての総和として、循環と渦度に関する先の式 (1.54) が導かれる (図 1.17)。

$$\begin{aligned}
 \Gamma &= \sum \delta\Gamma = \sum \oint_{sC} v_s ds = \sum \omega_n \delta S \\
 &\rightarrow \oint_C v_s ds = \iint_S \omega_n ds \tag{1.58}
 \end{aligned}$$

(注 1.5) ストークスの定理

ストークス (Stokes) の定理は次のように述べられる。二つのベクトル $\mathbf{v} = (u, v, w)$ と $\boldsymbol{\omega} = (\xi, \eta, \zeta)$ の間に

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \tag{1.59}$$

の関係があるとき、あるいはベクトル \mathbf{v} から上式によりベクトル $\boldsymbol{\omega}$ (渦度) を定義するとき、閉曲線 C によって囲まれた曲面 S 上の $\boldsymbol{\omega}$ の法線成分 ω_n の積分は、閉曲線 C に沿う \mathbf{v} の成分 v_s の積分 $(\int_C v_s ds = \int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s})$ に等しい。

$$\iint_S \omega_n ds = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} \tag{1.60}$$

この定理は、ガウス (Gauss) の定理 (発散定理) から導かれる。ガウスの定理は

$$\iiint_V \text{div } \mathbf{v} dV = \iint_S v_n dS \tag{1.61}$$

と表され、「閉曲面 S で囲まれた空間 V 内の湧出し $(\text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z})$ の総和 (積分) は、その閉曲面を出る流量 $(v_n dS)$ の総和に等しい」という物理的な意味をもっている。いま閉曲面 S は (x, y) 平面上の閉曲線 C 上の高さ 1 の柱体で、ベクトル \mathbf{v} は z に無関係とすれば、上式の右辺は柱体の上下の底面の積分が互いに打ち消して零となることから柱体の側面部分の積分のみとなり、結局閉曲線 C に沿う積分 $\int_C v_n ds$ となる。 (x, y) 面上の C の線要素単位ベクトル $d\mathbf{s} = (dx/ds, dy/ds, 0)$ (ここに $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$) に直交する (x, y) 面上の法線単位ベクトルは $d\mathbf{n} = (dy/ds, -dx/ds, 0)$ であるから、 v_n は、

$v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{dn} = v(dy/ds, -dx/ds) = (u dy - v dx)/ds$ である。これより、 $\oint_C v_n ds = \oint_C (-v dx + u dy)$ となる。また、式 (1.61) の左辺の積分は \mathbf{v} が z に無関係であるから、柱体の底面上の積分 $\iint_S (\partial u/\partial x + \partial v/\partial y) dx dy$ となる。ここで、 $u \rightarrow v'$ 、 $v \rightarrow -u'$ とすれば

$$\iint_S (\partial v'/\partial x - \partial u'/\partial y) dx dy = \oint_C (u' dx + v' dy) \tag{1.62}$$

すなわち、

$$\iint_S \omega_z dx dy = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} \tag{1.63}$$

上式は、閉曲線 C が (x, y) 平面上にあり、 C によって囲まれた曲面 S も (x, y) 平面上にある場合のストークスの定理である。平面 (x, y) を別の曲面に写像すれば、この関係は式 (1.60) のように一般化される。

1.8 渦度方程式

われわれは一般に流れの場の状態を流れの速度という量でとらえて記述している。このとき、速度の変化を表す(求める)ための基礎方程式が運動方程式である。流れの場、特に流速が場所的にも時間的にも不規則に変化している乱流場は、渦の集まりとして記述されるから、流れの場を渦度の分布や変化で記述することも必要である。本章は非粘性流体の運動について述べているが、渦度の分布の変化に対する粘性の働きは重要であり、また粘性の影響を考慮することで式が複雑になるわけでもないので、非粘性流体と粘性流体の二個所において同じような記述をする煩わしさを避けて、ここでは(その特別な場合として非粘性流体の場合も含む)粘性流体の渦度方程式について述べる。粘性流体の基礎方程式であるナビエ-ストークス (Navier-Stokes) 方程式 (§7.1.c) の両辺の rot (rotation) をとると(すなわち、両辺に $\nabla \times$ という演算を施すと)、速度の変化を記述するオイラーないしはナビエ-ストークス方程式に対応して、渦度の変化を記述する渦度方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} &= \nabla \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \\ &= \underbrace{-\mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}}_{\text{移流効果}} + \underbrace{(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v}}_{\text{伸縮・回転}} + \underbrace{\nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}}_{\text{粘性拡散}} \end{aligned} \tag{1.64}$$

あるいは、上式の右辺第一項を左辺に移行すれば、上式の左辺は $\boldsymbol{\omega}$ の実質微分(流体とともに運動するときの $\boldsymbol{\omega}$ の時間変化)を表し、

$$\frac{D\omega}{Dt} = (\omega \cdot \nabla)v + \nu \nabla^2 \omega \quad (1.65)$$

となる。ここに、 ν は動粘性係数で $\nu = \mu/\rho$ (μ : 粘性係数) である。

式 (1.64) は渦度 ω の変化が、① 右辺第一項の移流効果、② 第二項の表す速度場による渦の伸縮変形および渦線の回転、および ③ 粘性による拡散効果によることを表している (注 1.6)。

また、式 (1.64) あるいは、式 (1.65) は渦度 ω の実質変化には、外力も圧力も無関係であることを表している。これらの力は流体粒子の重心に向かい、トルクを生み出さないことを考えれば当然である。

流れが二次元ならば、渦度成分は z 成分のみ $\omega_z (= \zeta)$ ($\omega_x = \omega_y = 0$) であるから上式の第二項の演算子は $\omega \cdot \nabla = (0, 0, \zeta) \cdot (\partial/\partial x, \partial/\partial y, 0) = 0$ となって渦の伸縮作用による変化はなく、式 (1.65) は

$$\frac{D\zeta}{Dt} = \nu \nabla^2 \zeta \quad (1.66)$$

と書かれる。上式は熱の伝導や物質の拡散を表すのと同じ放物型の偏微分方程式であって、二次元流れでは渦度の実質的变化は粘性拡散によることを表している。

後に (§ 9.3.c) 述べるように、ポテンシャル流れは非粘性流体に限らず、粘性流体においても可能である。このことは渦度方程式からもいえる。すなわち $\omega \equiv 0$ は渦度方程式 (1.64) の自明の解である。したがって、流体が粘性流体であっても渦なしの流れ (ポテンシャル流) は可能である。しかし、このとき、渦なし流れは壁面での滑りなしの境界条件を満たしえないから、 $\omega = 0$ の解は壁面近傍では成立しない。

渦度方程式の具体的応用例は、第 II 篇「急に運動を始めた平板上の流れ——レイリー問題」 (§ 8.4)、「平板上の振動流」, 「水の波はなぜポテンシャルをもつか」 (§ 8.5) において述べる。

(注 1.6) 式 (1.65) の右辺第一項は、たとえばその第一成分を取り出すと、

$$\omega_x \frac{\partial u}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial u}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial u}{\partial z}$$

となる。この意味は、 $\omega_x \partial u / \partial x$ は渦の x 軸成分 ω_x の伸縮 $\partial u / \partial x$ による変化を表し、 $\omega_y \partial u / \partial y$ は渦の y 軸成分が軸と直角方向に傾くことによる変化を表している。

レオナルド・ダ・ビンチ—万能の天才

(Leonardo da Vin'ci, 1452—1519)

普通ならば科学・技術の歴史はたぶんエジプトやギリシャあたりから書き始めることになるであろう。確かに古い時代にもいくつかの巧みな機械の発明などもあるけれども、現代の理論科学としての流体力学の源流はガリレオ、ニュートンあたりに求めるのが一般的である。けれども、私はもう少し時代を選らせてダ・ビンチの時代から始めたい。

レオナルド・ダ・ビンチは現在ではモナリザなど名画を数多く遺した1500年頃のイタリア・ルネッサンス期の画家としてのみ一般に知られている。しかし、彼は絵画や彫刻のみならず技術や医学（解剖）にも通じた万能の天才であった。事実、ミラノ公スフォルツァへの自薦文に、私は橋も架けられます、城も築けます、大砲もつくれます等々とあり、一番最後に絵も画けます、彫刻もできますと書いている。

流体力学の面からみると、ダ・ビンチは渦のスケッチを残しており、ここに彼の鋭い観察眼が示されている。また、ヨーロッパの人々が永いこと川の水は地下水がめから湧き出ると信じていた時代、すでにダ・ビンチは川の水は降水よるとの考えをもっていたといわれる。（水文学の誕生は、1684年フランスのマリオット（1620—1684）が試験流域での降雨と流量の観測から降雨一流出の関係を確認したときに始まる）。その他、川の流れについての考察が多数あり、また、飛行機械についても種々考案しスケッチを遺している。

渦といえば、物体の背後に左右交互に発生するカルマン渦についての描写記録はいつまで選ばれるであろうか。わが国の尾形光琳の紅梅白梅図の装飾的な渦はみごとであるし、弥生時代の銅鐸にも渦の文様が彫られている。カルマンによれば、ポーニャのある教会にダ・ビンチとほぼ同時代の画家の描いた「キリストを抱く聖クリストファ」の絵があり、ここには、聖徒クリストファ（クリストファとはキリストを渡すものとの意味）の裸足（ハダシ）の足のうしろに二列の交互の渦、つまりカルマン渦が画かれているということである。しかし、谷一郎先生がイタリア大使館に問い合わせても確答が得られなかったとのことであるし、私がポーニャ大学の di Silvio 教授が来日した折にこの話をし、彼も調べてくれるとはいったものの返事はない。とすると、この話はカルマンの創作であろうか。



レオンハルト・オイラー

(Leonhard Euler, 1707—1783)



スイス・バーゼルに生まれ、少年時代は若干年長の友人ダニエル・ベルヌーイ(“ベルヌーイの定理”のベルヌーイ)とともに、ダニエルの父ヨハン・ベルヌーイから数学の手ほどきを受けた。長じて、物理学・数学の教授として学者生活のほとんどをロシアのペテルスブルク (St. Petersburg, ロシア革命後最近までのレニングラード) において行った。

すさまじいまでの研究生活による過労と酷寒のロシアの気候のゆえ、すでに28歳で右眼を失い、その後には左眼までも失い“メッカチのオイラー”と渾名された。それでも研究のペースを落とすことはなかった。

彼の流体力学の分野での業績は、幅広いしかも第一級の数々の業績のごく一部にすぎない。オイラー数、変分問題におけるオイラーの微分方程式、今日“グラフの理論”として知られる問題 (Königsburg (ケーニヒスブルク) の七つの橋の一度通過、いわゆる一筆書きの不可能の証明, 1738) における業績はよく知られている。

オイラーはD.ベルヌーイとは違って二度の結婚をし、13人の子供をもうけている。