

9. 低いレイノルズ数域の流れ

9.1 球のまわりの遅い流れ——線型近似解——

ナビエ-ストークスの方程式は、数学的表示の上では系統的に美しい形をしているが、この方程式は非線型であり、たいていの問題について厳密解を求めることはむずかしい。前章で述べたいくつかの厳密解はその少ない例である。(しかも、流体力学的に重要な問題である!!) 流体力学の立場からすれば、この非線型方程式をいかに解くかということが実際上の問題であるが、いわゆる数学の力のみではどうにもならず、流体现象への物理学的な考察と理解なしには解析の進歩はありえなかった。

一方、数学の側からはナビエ-ストークス方程式は非線型問題の解法と特性の研究に対する格好の例題であった。事実、ナビエ-ストークス方程式の解法から生み出された数学手法や理論も少なくない。(最近の話題では、カオスやソリトンをあげることができる。)

さて、この第9章から以後しばらくナビエ-ストークスの非線型方程式の近似解法について説明する。しかし、これは数学の問題ではなく、流体现象に関する物理学的洞察の問題であることを強調しておく。

まず、本節では遅い流れを取り扱う。流速がきわめて小さくて $O(\epsilon)$ (ϵ のオーダー) であるとする。このとき、ナビエ-ストークス方程式の非線型慣性項は $O(\epsilon^2)$ である。しかし、粘性項は $O(\epsilon)$ であるので、粘性項に比べて非線型慣性項を省略しうる。慣性項と粘性項の比はすでに §7.2 で述べたように無次元のレイノルズ数である。したがって、厳密に言えば遅い流れとは、レイノルズ数が1に比べて小さい ($Re \ll 1$) 流れである。この場合定常な流れでは、運動方程式の粘性項と圧力項とが付きあっている (図7.5)。このことは、無次元化された運動方程式 (7.12 a) において、 $Re \ll 1$ とすれば、

$$(\mathbf{v} \operatorname{grad})\mathbf{v} = -\operatorname{grad} p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} \longrightarrow -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} = 0, \quad (Re \ll 1)$$

となることから明らかである。

この結果遅い流れでは、粘性の作用は非常に遠くまで及び、流れの状態は非粘性のポテンシャル流れから大きくずれる。表 7.1 に見られるように低レイノルズ数流れとポテンシャル流れは互いに反対の極限であることから当然である。このような理由のゆえに、遅い流れは“creeping motion”（クリーピング運動）とか“deformation flow”（変形流）と呼ばれる。この点次章に述べるレイノルズ数の大きい境界層流れでは、粘性の影響が壁面近傍の剪断速度の大きい領域に限られ、それ以外ではポテンシャル流で近似しうると大きな違いがある。

a. ストークス近似

粘性項に比べ非線型慣性項の影響を無視しうる ($Re \ll 1$) とすれば、ナビエ-ストークスの方程式と連続の方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (9.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (9.2)$$

あるいは、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (9.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (9.4)$$

となり線型化される。このような近似をストークス近似 (Stokes' approximation) という。ストークス近似では、粘性項が慣性項を上回り圧力項と粘性項が釣りあうと考えている。しかし、実際に粘性項が慣性項に対して卓越するのは物体近傍に限られるので、たとえレイノルズ数が低い流れに対しても、この方法には限界がある。(この点については、次節に述べる。)

ストークス近似解の一般的特徴

(i) ストークス近似では、方程式から慣性項が消えるため、慣性項と粘性項の比であるレイノルズ数は問題に関係しなくなる。

(ii) 流れが定常で、境界条件が速度 \mathbf{v} に関して与えられているときには、式 (9.1) に $\nabla \times$ を作用させて圧力 p を消去すると、流速 \mathbf{v} に関する次の方程式が得られる。

$$\nabla^2(\nabla \times \mathbf{v}) = 0 \quad (9.5)$$

すなわち、

$$\nabla^2 \boldsymbol{\omega} = 0 \quad (9.5a)$$

したがって、これを解いて得られる流速場 \mathbf{v} は Re も μ も含まない。(注 9.1)

(iii) 境界条件が圧力のみに関して与えられている場合には、式 (9.1) の両辺の div をとり、右辺で div と ∇^2 の演算の順序を逆にしうることと、式 (9.2) に注意すれば、圧力 p に関する基礎方程式

$$\text{div}(\text{grad } p) = \nabla^2 p = 0 \quad (9.6)$$

が得られる。すなわち、遅い流れの圧力場はポテンシャル場である。また、上式はレイノルズ数 Re も粘性係数 μ も含んでいない。

(iv) 定常流では、式 (9.1) より圧力 p と速度 \mathbf{v} の関係は、 $\nabla p = \mu \nabla^2 \mathbf{v}$ である。粘性係数 μ は、圧力と速度の関係においてのみ現れる。

• 境界条件が速度に関して与えられている場合には、

$$\frac{\mathbf{v}}{U} = f\left(\frac{\mathbf{x}}{L}\right), \quad \frac{p - p_0}{\rho U^2} = \frac{\mu}{\rho L U} g\left(\frac{\mathbf{x}}{L}\right) \quad (9.7a)$$

• 境界条件が圧力に関して与えられている場合には、

$$\frac{p - p_0}{\rho U^2} = f\left(\frac{\mathbf{x}}{L}\right), \quad \frac{\mathbf{v}}{U} = \frac{\rho L U}{\mu} g\left(\frac{\mathbf{x}}{L}\right) \quad (9.7b)$$

となる。ここに、 L は代表長さ、 f と g は \mathbf{x}/L および境界形状の関数。

(v) 式 (9.1) の rot をとると、渦度 $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v} (= \nabla \times \mathbf{v})$ に対する次式となる。

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \quad (9.8)$$

上式は移流項 (= 慣性項) が省略された拡散型の偏微分方程式で、渦度方程式 (1.65) 中の移流効果による渦度の変化はなくなり、渦度 $\boldsymbol{\omega}$ が粘性の作用のみにより拡散されることを意味している。

一様流中の球のまわりの流れ

一様流速 U_0 の流れの中におかれた半径 a の球のまわりの流れは、式 (9.1)、(9.2) を、球の表面上の no-slip の境界条件のもとに解けばよい。この解法はや

やむずかしいので、誘導を省略して解を示そう。流れの方向を x 方向とし、原点を球の中心にとると、

$$\left. \begin{aligned} u &= U_0 - \frac{1}{4} \frac{aU_0}{r} \left(3 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{3}{4} aU_0 \frac{x^2}{r^3} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \\ v &= -\frac{3}{4} aU_0 \frac{xy}{r^3} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \\ w &= -\frac{3}{4} aU_0 \frac{xz}{r^3} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \\ p &= p_\infty - \frac{3}{2} \mu a U_0 \frac{x}{r^3} \end{aligned} \right\} \quad (9.9)$$

ここに、 $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ 。上式が線型化されたナビエ-ストークスの方程式 (9.1) と連続の方程式 (9.2) および境界条件を満たすことは容易に確かめられる。

球のまわりの流れは、 x 軸に関して軸対称であり、球の中心からの距離 r と、この線と x 軸のなす角 θ により流れの場を表すと、式 (9.8) は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} v_r &= U_0 \cos \theta \left(1 - \frac{3}{2} \frac{a}{r} + \frac{1}{2} \frac{a^3}{r^3} \right) \\ v_\theta &= -U_0 \sin \theta \left(1 - \frac{3}{4} \frac{a}{r} - \frac{1}{4} \frac{a^3}{r^3} \right) \end{aligned} \right\} \quad (9.9a)$$

なお、式 (9.9) や式 (9.9a) で明らかなように、ストークス解では上述の一般特性 (ii) で指摘したとおり、流速分布にはレイノルズ数 Re も粘性係数 μ も無関係である。

粘性の作用がよく理解されるように一様流速 U_0 を差し引いて、式 (9.9) あるいは式 (9.9a) により流線と流速分布を画いたのが図 9.1 である。ここで、流れは球の前後で対称であることに注意してほしい。このことは、線型化された基礎方程式 (9.1), (9.2) において流れの方向を逆にしても方程式は全く同じであることから明らかである。

球に働く力

しかし、圧力場は球の前後で逆対称であり (図 9.2), 最大圧力と最小圧力は、それぞれ球の前端と後端に生じている。

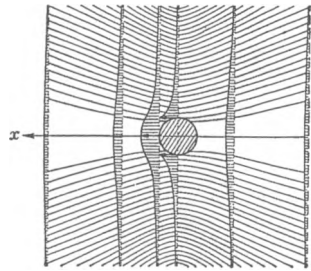


図 9.1 静止流体中を運動する球によるストークス流れ (オセーン近似による図 9.4 と比較せよ)

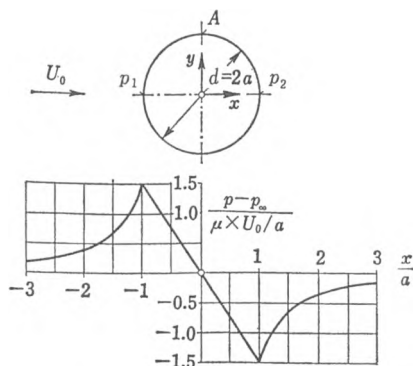


図 9.2 球の中心軸上の圧力分布

$$\left. \begin{aligned} p|_{r=a} &= p_{\infty} - \frac{3}{2} \frac{\mu U_0}{a} \cos \theta \\ p_{\max}|_{r=a} &= p_{\infty} + \frac{3}{2} \frac{\mu U_0}{a} \\ p_{\min}|_{r=a} &= p_{\infty} - \frac{3}{2} \frac{\mu U_0}{a} \end{aligned} \right\} \quad (9.10)$$

また、球表面に働く摩擦応力は

$$\tau_{r\theta}|_{r=a} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} \right) \Big|_{r=a} = \frac{3}{2} \frac{\mu U_0}{a} \sin \theta \quad (9.11)$$

球に働く力は、揚力は θ に関する対称性のために消えて、抵抗のみとなる。圧力の x 成分による力と球表面での粘性による摩擦力の x 成分を球の全表面について積分して加え合わせると

$$D_s = \int_0^{\pi} \tau_{r\theta} \sin \theta \, dS - \int_0^{\pi} p \cos \theta \, dS$$

上式において、球表面の面要素 dS に $dS = 2\pi a^2 \sin \theta \, d\theta$ の関係を用いると、

$$D_s = 4\pi a \mu U_0 + 2\pi a \mu U_0 \quad (9.12 a)$$

$$= 6\pi a \mu U_0 \quad (9.12 b)$$

となる。式 (9.12 a) によれば $Re \ll 1$ の場合に、球に働く抵抗力は 2/3 が摩擦応力によるものであり、残り 1/3 が圧力によるものである。このことは Re が大きくなるにつれて逆になり、ついには球その他鈍い（流線形ではない）物体の抵抗力はほとんど物体前後の圧力差によるようになる。また、球に働く抵抗力が流速の 1 乗に比例していること、および動粘性係数 μ/ρ ではなく粘性係数 μ に比例して

いることにも注意されたい。これは十分低いレイノルズ数においては慣性力が実際に無視できることの傍証でもある。なぜならば、もし慣性力が重要でなければ、流体の（単位体積あたりの）質量、つまり密度 ρ は重要でないからである。

球に働く抗力を次式で定義する無次元数の抗力係数 C_D で表すと

$$D_s = C_D A \rho \frac{U_0^2}{2} = \frac{24}{Re} \cdot \rho \pi a^2 \cdot \frac{U_0^2}{2} \quad (9.13)$$

すなわち、

$$C_D = \frac{24}{Re} \quad \left(Re = \frac{2aU_0}{\nu} < 1 \right) \quad (9.14)$$

となる。式 (9.12), (9.14) の関係をストークスの抵抗法則 (Stokes' law of resistance, 1845) という。

ストークス近似の限界

さて、ストークス近似はレイノルズ数 Re が十分小さいとして成立した。ところで、 Re は流れの代表的長さを l 、代表的速度を u とすれば、 ul/ν で定義される。代表的速度としては各点各点の流速 u が適当であり、流体運動の代表的長さとしては物体からの距離 r がこれに相当する。物体の近くでは $u \rightarrow 0$ であり、 r も小さくストークスの仮定を満たすが、しかしどんなに ν が大きくとも物体から遠くなれば $l \sim r$ が大きくなり、したがって Re が大きくなる結果、粘性項に比べて慣性項を無視することはできなくなるはずである。

球の場合にはたまたま球の影響が球の近くのみ限定されたので、ストークスの近似が数学上の破綻（ハタン）を生じなかったといえる。事実、ストークス近似は球などの抵抗問題については正しい解を与えるが、もっともありふれた物体

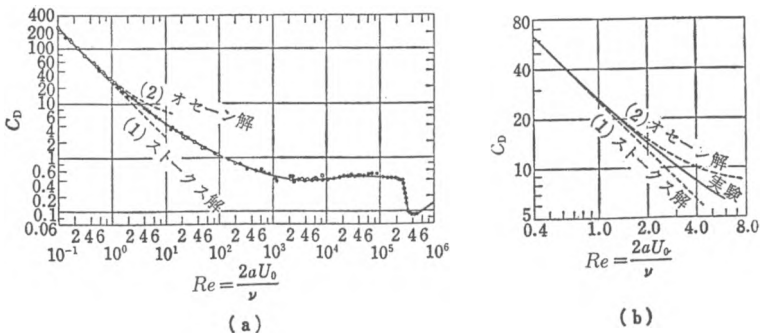


図 9.3 球の抵抗係数

である二次元の円柱のまわりの流れについては、無限遠で一樣流速という境界条件を満たす解をもたない。これをストークスのパラドックス (Stokes' paradox) という。

(注 9.1) 複素関数論の応用 (今井の方法, 1973)

流れ場が定常二次元の場合, 式 (9.1) と渦度 ω_z の定義から

$$\frac{\partial p}{\partial x} = (-\mu \nabla^2 u) - \mu \frac{\partial \omega_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = (-\mu \nabla^2 v) + \mu \frac{\partial \omega_z}{\partial x}$$

の関係が得られる。上式は p と $(-\mu \omega_z)$ の間に, コーシー-リーマンの関係式 (4.10) が成立することを示している。したがって, 二次元ポテンシャル流れの (Φ, Ψ) に対応して $(p, -\mu \omega_z)$ の組から作られる正則な複素関数

$$4\mu g'(z) = p - i(\mu \omega_z)$$

について, 複素関数論を応用することができる。さらに式を展開すると, 渦度 ω_z および流関数 Ψ は次のようになる。

$$\omega_z = -4 \Im \{g'(z)\} = 2i \{g'(z) - \overline{g'(z)}\}$$

$$\Psi = \Im \{f(z) + \bar{z}g(z)\}$$

ここに, $g(z)$ は $g'(z)$ の積分, $f(z)$ は任意の正則関数。

b. オセーン (Oseen) 近似

ストークス近似には上述のように物理的に無理な点があるから, ナビエ-ストークス方程式の慣性項を省略せずに, この項の線型化を考えなければならない。粘性の影響は物体から遙か遠くまで及ぶが, そこでの流速は物体のない場合の一樣流速と差が小さいと考えて

$$\left. \begin{aligned} u &= U_0 + \hat{u}(x, y, z, t) \\ v &= \hat{v}(x, y, z, t) \\ w &= \hat{w}(x, y, z, t) \end{aligned} \right\} \quad (9.15)$$

とおけば, ナビエ-ストークス方程式の第一式の左辺は

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = U_0 \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \hat{v} \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} + \hat{w} \frac{\partial \hat{u}}{\partial z} \quad (9.16)$$

となる。物体からの距離 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ が大きく慣性項が省略しえない所では, $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$ などは小さくて上述の右辺の各項は $U_0 \partial \hat{u} / \partial x$ 以外は二次の微小量として捨ててよい。また, r の小さい所では $Re \approx U_0 r / \nu \ll 1$ であるので残された慣性項である $U_0 (\partial \hat{u} / \partial x)$ は式 (7.11) の右辺の粘性項に比べて重要な意味をもたなくなる。したがって, ナビエ-ストークスの方程式は

$$\frac{\partial v}{\partial t} + U_0 \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \nabla^2 v \quad (9.17)$$

のように線型化しうる。これをオセーン近似 (Oseen's approximation) という。

オセーン近似による球に働く抵抗係数は

$$C_D = \frac{24}{Re} \left(1 + \frac{3}{16} Re \right) \quad (9.18)$$

ここに、 $Re = U_0 d / \nu$ ($d = 2a$) となる。上式の右辺の括弧の中の $3Re/16$ がオセーン近似によるストークス法則に対する補正項である。

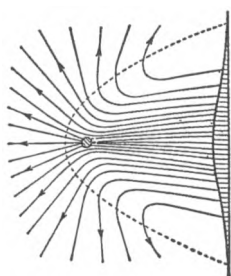


図 9.4 オセーン近似による静止流体中を右から左へ運動する球のまわりの流れ (図 9.1 と比較せよ)

抵抗係数 C_D についてのオセーン解の式 (9.18) は近似度がややよくなっているが、実験曲線とこの解とが一致するのはたかだか $Re \approx 2$ までであり、 $Re \leq 1$ まで成立するストークス解に比べてそれほど適用度が向上したわけではない。これは球の表面近傍では、オセーン近似にもち込んだ慣性項 $U_0(\partial u / \partial x)$ は粘性項に比べて無視しうるためストークス近似と同程度の近似になるという事実を反映している。むしろ、式 (9.17) より類推されるようにストークス解 (図 9.1) とは異なり流線が物体の前後でもはや対称ではなくなるこ

と、低レイノルズ数流れの特徴や流れのメカニズムの理解が得られること、円柱まわりの二次元流れなどについてもオセーン近似法による解が存在し、ストークスのパラドックスが解消することの方にオセーン近似解の意義がある。次節で、これらの点を詳しく検討しよう。

9.2 ストークス近似とオセーン近似の意味と比較†

球のまわりの粘性流体の流れに関するストークス近似解とオセーン近似解とを比較すれば、レイノルズ数と抵抗係数 ($Re - C_D$) の関係に関する限り、近似度を高めたはずのオセーン近似はストークス近似より近似精度が向上したとはいえない。それではオセーン近似は意味がないのであろうか。いやそうではない。流体力学の目的の一つは疑うまでもなく、「実用上有益なこと」、つまり、いまの場合

† 初学者は読みとばして次章に進んでよい。

球の抵抗の正しい数値を与えることである。しかし、たびたび繰り返すように、実用性は流体力学の目的の一部分にすぎない。「流れのメカニズムの理解」ということが流体力学のもう一つの大切な目的である。低レイノルズ数流れの特性や流れのメカニズムの理解が得られるという点では、次に述べるようにオセーン近似解はストークス近似解より遥かに多くのことを含んでいる。また、流線（流れの場）に関しては、球の近傍を除けば、ストークス近似は正しい解ではないとさえいえる。

a. C_D および流線に対するレイノルズ数の影響

オセーン近似の C_D とストークス近似の C_D を実験（数値実験も含む）と比較すると、両者の近似解の成立する範囲はともに $Re \leq 1$ であって差異はない。これは球近傍ではオセーン近似においても慣性項 $U_0 \partial u / \partial x$ は粘性項に比べて無視しうるため、ストークス近似とオセーン近似は同じオーダーとなるからである。この Re の範囲外でストークス解は C_D を過小評価し、オセーン解は過大評価する傾向を示す。（このことは、ストークス近似がエネルギー消散率最小の解を与えることに対応している。）

$Re \rightarrow \infty$ の場合の極限であるポテンシャル流れと、その反対の $Re \rightarrow 0$ 極限であるストークス近似解の流線は、ともにレイノルズ数には無関係である。このことは、ポテンシャル流とストークス近似流れの場合の基礎方程式が Re を含まないことから明らかである。しかし、オセーン近似解による流線は Re によって変化する。

b. 流線のパターン

ストークス解の与える流れの様子は、図 9.1 に見るように球の前後で流れは対称である。この性質は具体的に偏微分方程式を解くまでもなく、ストークス近似を求める際の基礎方程式 (9.1) を見れば明らかである。（つまり、この式 (9.1) において、 x の符号したがって u の符号を逆にしても、方程式の形は変わらないから。）流れが球の前後で対称という点は完全流体の場合と同じである。完全流体の場合には、したがって球の前後で圧力の流れ方向の成分が打ち消し合って、球には抵抗が働かないが、粘性流体の場合には、たとえ、流れの様子が球の前後で対称であっても、球の表面に働く摩擦応力による抵抗と圧力分布が球の前後で非対称であることによる抵抗が働く。前者を摩擦抵抗あるいは表面抵抗 (frictional drag, skin friction drag)、後者を圧力抵抗もしくは形の抵抗 (pressure drag,

form drag) という。

オセーン近似では流れの様子は球の前後で非対称となり、球の前方方向へは流線が球の中心から放射線状に広がっており、球の背後には球を包むように球の影響の及ぶ粘性のきく領域 (wake region, 後流あるいは伴流: 中国では“尾流”と訳す, 図 9.4 の点線に囲まれた球の後の部分) が形成されている。オセーンの近似は非線型慣性項の無視しうる流れ (creeping flow) の次の状態の解となっている。このことは、レイノルズ数がさらに増加した場合の変化につながる重要な特性を示している。物体が円柱の場合には、レイノルズ数の増加に伴って円柱背後の定常な双子渦の形成、流れへの渦の交互の放出、円柱まわりの境界層の剝離による後流域の形成へと変化する。

c. オセーンの伴流 (渦度の移流・拡散)

オセーン近似によれば、球の前方部の流れは球の前進により放射状に押し出される流れであり、球の後流部はこれを補償する流れとなっている。物体まわりの流れの場合は物体前方のほとんど渦なしの領域と、物体を取り巻いて回転放物体状に下流方向に広がる渦度のある後流領域とに分けられる。

この後流の発生は次のように説明できる。ストークス近似では慣性項を省略したために移流効果は消え、球の表面で発生する渦度 ω はもっぱら粘性の作用で拡散するだけであるが、オセーン近似では渦度方程式は

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \omega}{\partial x} = \nu \nabla^2 \omega \quad (9.19)$$

となり、渦度は粘性による拡散 (上記右辺) と同時に速度 U_0 で下流に流されていく移流効果 (上式左辺第二項) が加わるため、流速分布は球の前後で非対称となる。

オセーン近似による定常流の渦度方程式は

$$\left(\nabla^2 - 2k \frac{\partial}{\partial x} \right) \omega = 0 \quad (9.20)$$

である。ここに、

$$k = \frac{U_0}{2\nu} \quad (9.21)$$

式 (9.20) の解は、次式で表される領域

$$y^2 + z^2 \leq 2 \frac{C}{k} x + \left(\frac{C}{k} \right)^2 \quad (C: \text{一定数}) \quad (9.22)$$

つまり、 x 軸を回転軸とする x の正の方向に広がる回転放物面内に含まれる領域

では、無限遠 ($r \rightarrow \infty$) においても渦度 ω は相対的に有限に留まる。これに対し、この領域以外では渦度は実質的に零 (渦なし) である。

以上に述べたように、オセーン解はたとえ抵抗係数の値ではストークス解と差はないとしても、現象の本質を明らかにするという点ではストークス解より遙かに勝っているといえる。

d. ストークスのパラドックス

一様流中の球のまわりの流れのストークス近似解は、ナビエ-ストークスの方程式の解として最も早く (1851) 得られたものの一つである。しかし、このストークス近似の方法を円柱まわりの流れの解法に適用しても、無限遠で一様流速という境界条件を満たす解は得られない。これはストークスのパラドックス (Stokes' paradox) として知られている。ストークスのパラドックスはオセーン近似法により解消する。このことはより一般的にいえて、円柱に限らず一様流中の柱状の物体による二次元流れは、ストークス近似により解を求めることはできない。しかし、二次元流の場合でも、流れの領域が有限であるか、あるいは無限に広がっていても物体に力が働かないときにはストークス近似は成立する。

球の場合には流れが球の周囲からすぐ後に回り込んでその範囲でストークス近似が成立するが、円柱の場合には円柱の軸方向には流れが回り込むことができず、したがって、ストークスのパラドックスが生じることになる。

遅い流れの物体の近傍では、確かに粘性項が慣性項を上回る。したがって、物体の大きさと一様流速で変数を無次元化したナビエ-ストークス方程式

$$\hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} + \hat{w} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{z}} = -\partial \hat{p} / \partial \hat{x} + Re^{-1} \left[\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{y}^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{z}^2} \right]$$

において $Re (= U_0 a / \nu)$ が十分小さいならば慣性項を省略しうる。上式の左辺の項を省略した式を解いて得られるストークス解 (式 (9.9)) は球より十分遠方では $u \approx U_0 + U_0 a / r$ である。しかし、これをあらためて上式左辺の慣性項に代入すると、慣性項 $\approx U_0^2 a / r^2$ となる。また、粘性項 $\approx \nu (U_0 a / r^3)$ となる。これら両者の比よりレイノルズ数は $U_0 r / \nu = Re \cdot r / a$ となる。したがって、 Re がどんなに小さくとも、球から十分遠く離れた領域 ($r/a \gg 1/Re$) では、慣性項 (上式の左辺) が粘性項を上回るようになるため、もはや慣性項を省略しえなくなる。

したがって、球の場合にはストークス近似法により (流れの全域に対する) 解が求まりはするが、球より十分遠い所ではストークス近似は成立せず、その解の

与える流れの場合（流線）が正しいとはいえない。一方、オセーン近似は、低レイノルズ数流れについて、「物体の近くではストークス近似に一致し、遠方では一様流へ正しく接続する近似」となっている。

9.3 粘性の作用についての一般的考察[†]

これまで、三つの章にわたって粘性流体の流れの流速分布や摩擦抵抗の特徴について述べた。これらは粘性の作用の結果である。ここでは、次章以後において、境界層や乱流といった粘性流体の流れのよりすすんだ問題に入る前に、これまでの粘性流体の知識を基に、特に低レイノルズ数の流れに限らず、粘性が流体の運動に対して、一般的にどのような働きをしているのかについて考察をすすめる。

a. 粘性の拡散作用（運動量の輸送および渦度の生成と拡散）

ナビエ-ストークスの方程式 (7.11 a) の右辺の最後の項は、粘性の作用によって運動量 (ρu , ρv , ρw) が周囲に輸送拡散することを意味している。

粘性は流体が壁面上で滑りなしの条件 (no-slip condition) を満たすことを要求する。その結果、流体は壁面近傍において大きな速度勾配をもつことになり、ここで渦度が生成される。こうして生まれた渦度の場合は渦度方程式 (1.65) により (二次元流れでは)、

$$\frac{D\omega}{Dt} = \nu \nabla^2 \omega \quad (9.23)$$

にしたがって変化する。式 (9.23) を解きほぐすと

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = - \underbrace{\left(u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)}_{\text{渦度の移流}} + \nu \underbrace{\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)}_{\text{渦度の拡散}} \quad (9.23 a)$$

と書かれる。上式はいわゆる拡散型（熱伝導型）の方程式で、ある点での渦度の局所的变化が右辺第一項の移流 (convection) と右辺第二項の粘性による拡散 (diffusion) との二つの作用によって起こることを示している。換言すれば、粘性の拡散作用によって渦度は熱や濃度のように周囲に広がる。

このことは、球のまわりの流れについてのストークス近似解とオセーン近似解

[†] 本節は、特に難しい数学は用いていないが、思考の内容が高度であるので、初学者は読みとばしてよい。

における渦度の分布パターンの違いとして明確に示される。ストークス近似解は非線型項を省略して導かれたので、渦度方程式 (9.23) で移流項を省略したことになる。その結果、渦度は粘性の拡散作用によってのみ変化し、渦度の分布は球の前後で対称となる。これに対し、オセーン近似解では $U \frac{\partial \omega}{\partial x}$ で近似されてはいるものの、移流項は保存されるため、渦度分布が球の前後で非対称となる。

急激に運動を始めた平板上の流れ（レイリー問題）や振動平板上の流れ（ストークス層）では、渦度はもっぱら粘性の拡散作用によって遠方に運ばれている。

次章に述べる一様流れの中に流れに平行におかれた半無限長さの平板の上の流れ（層流境界層流れ）は、流れのレイノルズ数が大きく ($Ul/\nu \gg 1$, l : 平板の長さ), 平板に垂直な方向の拡散項 ($\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$) に比べて移流項 ($u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}$) が無視しえない流れである。

b. 粘性のエネルギー消散作用

(1) 運動エネルギーの消散と流れの加速（粘性のなす仕事）

粘性にはよく知られているように、流れのエネルギーを消散する作用がある。と同時に、流れを加速する（変化させる）作用も忘れてはならない。

運動方程式を変形して、流体の運動エネルギーの変化を与える方程式を求める。まず、単純な場合についてこのことを明確に示そう。流れは x 軸方向とする。このとき座標軸に平行な稜をもつ直方体を考える (図 9.5)。 y 軸に垂直な面

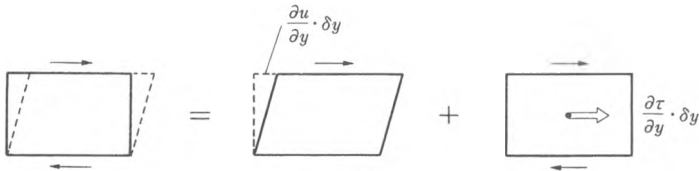


図 9.5

($dx dz$) に働く剪断応力によって単位時間あたりになされる仕事は、直方体の上面 ($y=y+\delta y$) において下の流体に対してなされる仕事率 (力×速度) $(\tau u)_{y+\delta y} \cdot (dx dz)$ と下面 (y) における $(\tau u)_y \cdot (dx dz)$ の差から $\frac{\partial(\tau u)}{\partial y} \cdot (dx dy dz)$ である。これを分解し ($dx dy dz$) で割って単位体積について表すと、

$$W(\text{粘性の仕事率}) : \frac{\partial(\tau u)}{\partial y} = \tau \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad (9.24)$$

$\tau \frac{\partial u}{\partial y}$
 剪断応力による仕事

$u \frac{\partial \tau}{\partial y}$
 変形内部エネルギー

$u \frac{\partial \tau}{\partial y}$
 加速運動エネルギー

となる。上式右辺の第一項は上下両面に働く剪断応力の偶力が作り出すずり変形による仕事を表す。この仕事は流体の内部エネルギーとして蓄えられ、結局熱として非可逆的に消散する。上式右辺の第二項は、微小流体塊の上下面に働く剪断応力の合力 $(\partial\tau/\partial y \cdot \delta y)$ が流体塊を加速（ないしは減速）し、運動エネルギーを変化させる働きを表している。この部分のエネルギーは消散しない。結局、粘性によるエネルギー消散はこの場合には簡単に次のようになる。

$$\tau \frac{\partial u}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (9.25)$$

式 (9.25) の結果はより一般的に導かれ、流体が粘性の作用により単位体積・単位時間あたりに熱として失うエネルギーは、次式の消散関数 (dissipation function) Φ で与えられる。

$$\begin{aligned} \Phi = \mu & \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] + \lambda (\text{div } \mathbf{u})^2 \quad (9.26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi = \mu & \left[2 \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (9.27) \end{aligned}$$

式 (9.26) を変形すれば、次のようになる。

$$\begin{aligned} \Phi = \mu & \left[\left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right\} \right. \\ & \left. + \frac{2}{3} \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right\} \right] \geq 0 \quad (9.28) \end{aligned}$$

上式 (9.26)~(9.28) は、粘性による剪断応力のなす仕事のうち、エネルギー消散は、流体のずり変形や伸縮によって生じ、回転には無関係であることを示している。また、粘性係数 (粘性率) μ は正であるから、粘性によって必ずエネルギーが減少することも明らかである。

消散関数 Φ の導き方：消散関数 Φ を導くには、粘性応力のなす仕事から、運動エネルギーに変換されるエネルギー、つまり運動エネルギーの増加率を差し引けばよい。まず、粘性応力のなす仕事は次のように表される。

$$\begin{aligned} [\text{Work}]_{\text{粘}} &= \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{xx}'u + \tau_{xy}v + \tau_{xz}w) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yx}u + \sigma_{yy}'v + \tau_{yz}w) \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zx}u + \tau_{zy}v + \sigma_{zz}'w) \quad (9.29) \end{aligned}$$

ここに、 σ_{xx}' , σ_{yy}' , σ_{zz}' は圧力分を差し引いた粘性の作用による法線応力のみを表す。

一方、全運動エネルギーの変化は次のようになる。

$$\begin{aligned} [\text{Mechanical Energy}] &= \frac{D}{Dt} \left[\frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2 + w^2) \right] \\ &= \rho \left(u \frac{Du}{Dt} + v \frac{Dv}{Dt} + w \frac{Dw}{Dt} \right) \end{aligned} \quad (9.30)$$

この中には、圧力の作用によるエネルギーの増加分

$$[\text{Work}]_E = - \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right) \quad (9.31)$$

が含まれている。式 (9.30) から、圧力による運動エネルギーの増加分、式 (9.31) を差し引き、これに運動方程式の右辺を代入すれば次のように変形される。

$$\begin{aligned} [\text{Mechanical Energy}]_{\text{粘}} &= u \left(\frac{\partial \sigma_{xx}'}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + v \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}'}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \\ &\quad + w \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}'}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (9.32)$$

粘性応力のなす仕事のうちエネルギー消散となるのは、式 (9.29) から式 (9.32) を差し引き、応力と変形に関するストークスの関係式 (式 (7.6), (7.7)) を代入して、式 (9.26) あるいは式 (9.27), (9.28) のように求まる。

粘性による仕事 (式 (9.29)) は、流体粒子を加速しその運動エネルギーを変化させる部分 (式 (9.32)) と、流体に変形を与えその内部エネルギーを変化させる部分 (式 (9.26) または式 (9.27), (9.28)) に分けられる。

$$[\text{Work}]_{\text{粘}} = [\text{Mechanical Energy}]_{\text{粘}} + \Phi \quad (9.33)$$

表 9.1 粘性による応力のなす仕事

粘性の作用 =	{	加速	→	運動エネルギーの変化
	}	変形	→	内部エネルギーの変化

(2) ベルヌーイ和と粘性

ベルヌーイの定理は、定常な非粘性流れの場合で一本の流線 (s) についてのベルヌーイ和

$$H = \frac{1}{2} q^2 + z + \frac{p}{\rho} = \text{const} \quad (\text{on } s) \quad (9.34)$$

が一定であることを述べている。粘性流体の場合には、ベルヌーイ和の変化は次のように書かれる。

$$\frac{d}{ds} \left[\frac{q^2}{2g} + z + \frac{p}{\rho g} \right] = \left(\frac{\mu}{\rho g} \right) \nabla^2 \mathbf{u} \cdot \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} \quad (\leq 0) \quad (9.35)$$

この値は減少するとは限らず増加する場合もありうる。 $\mathbf{u} \cdot \nabla^2 \mathbf{u} < 0$ すなわち粘性力 $\mathbf{F}_{\text{viscous}} = \mu \nabla^2 \mathbf{u}$ のなす仕事が負のときには、ベルヌーイ和は減少する。これは流線に沿って運動する流体粒子を減速するように粘性力が働く場合である。同様に流体粒子を加速するよう正味の粘性力 (net viscous force) が作用するときは、流線に沿うベルヌーイ和は増加する。しかし、流路の断面全体で積分するときはベルヌーイ和は減少する (Batchelor, 1967, p. 266 ; Rouse, 1965, *Proc. JSME*, p. 1525)

(注 9.2) dissipation の訳について

dissipation には、「散らすこと」と「浪費すること」という意味があり、辞書には「消散」「消失」・「浪費」「濫費」の訳が出ている。いずれにしても、ただ「細かく散って見えなくなる」だけではなく「形・姿が無くなってしまふ、他のものによって変わって失われてしまふ」という意味がある。

energy dissipation の訳として「エネルギー散逸」の訳をあてることが多い。以前は「逸散」と訳されたこともあったが、成語としては語順が逆のため最近では用いられない。わき目もふらずに逃げるようすを「逸散」もしくは「一散」というから、この点からもこの言葉は dissipation の訳にふさわしくない。

元来、「散」は手にもった棒(女)で肉(月、ニクヅキ)をばらばら(土)にする意味であり、逸は手に抱きかかえた兎が手から逃げ去る様をいっている。「散逸」とはまとまっていたものが、ちりぢりになって見えなくなることを意味する。

いずれにしても、散逸という訳語には dissipation の中に含まれる「費やされる」という意味が含まれていない。したがって、本書ではやや少数派の訳ではあるが、「消散」の語をあてている。

(3) 流れの安定と粘性の作用

粘性は流れのエネルギーを消散するが、流れを安定化するとは限らない。粘性には流れを不安定化する作用もある。

レイリーの微小攪乱による流れの不安定理論によれば、非粘性流体の流れでは流速分布に変曲点をもたない限り流れは安定である。層流境界層流れやポアズイユ流れの流速分布は変曲点をもたないから、流体が非粘性ならばこの形の流速分布をもつ流れは安定である。流体が粘性流体ならば、粘性による運動エネルギーの消散は常に正であって、一見これが流れをさらに安定化するのでこれらの流れは微小攪乱に対して安定であるかのように考えられる。

しかし、粘性の作用は流れを安定化するのみではなく、流れの不安定化をもたらす要素も含んでいる。というのは、レイリーの考えた非粘性 $R \rightarrow \infty$ の極限では擾乱速度成分 u' は壁面で滑りなしとはならないので、粘性流体の場合にこの条件を満たすように速度場を加えると、みかけの剪断応力 $-\rho u'v'$ が発生してこれが主流からエネルギーを奪い擾乱のエネルギーを増加させるためである (Prandtl, 1921).

c. 粘性流体とポテンシャル流 (渦なし流れ)

粘性力と運動

流体粒子に働く粘性力 (viscous force) は、粘性応力 τ_{ij} の微分に関して (§ 7.1.c. (2))

$$\partial \tau_{ji} / \partial x_j = \mu \nabla^2 u_i \quad (9.36)$$

と書かれる。上式を流体の変形・変位の定義式を用いて変形すると

$$\mu \nabla^2 u_i = -\mu (\nabla \times \omega)_i \quad (9.37)$$

となる (注 9.3).

ストークスの関係式は '粘性応力は流体の変形によって生じ、流体の回転運動 (渦度) に無関係である' ということを述べている。しかし、上式 (9.36), (9.37) は粘性応力の空間微分 (粘性応力そのものではない!) が流体運動の渦度の空間微分に比例することを述べている。これは一見奇妙なことであるが、式の演算上のごとくにすぎない。

一般には、粘性による流れの加速とエネルギーの消散の作用は同時に起こっているが、渦度が一様な場合、特に渦なし (ポテンシャル流) $\omega = 0$ の場合には、式 (9.37) より流体の運動にかかわる粘性力は零となり、粘性は運動には関与しない (注 9.4).

(注 9.3) ベクトル A, B, C の三重積について

$$A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B)$$

が成立する。これを形式的に $\nabla \times (\nabla \times v)$ に適用すれば

$$\nabla \times (\nabla \times v) = \nabla(\nabla \cdot v) - (\nabla \cdot \nabla)v$$

ここで、連続の関係 $\nabla \cdot v = 0$ と渦度の定義 $\omega = \nabla \times v$ を考慮すれば、

$$\nabla^2 v = -\nabla \times \omega$$

(注 9.4) あるいは、流れが渦なしならば速度ポテンシャル ϕ が存在し、 $v = \nabla \phi$ である。これに ∇^2 を作用させると連続の関係 $\partial u / \partial x + \partial v / \partial y + \partial w / \partial z = 0$ すなわち、 $\nabla^2 \phi = 0$ であるから、粘性項は零となる。 $\mu \nabla^2 v = 0$.

ポテンシャル流れにおけるエネルギー消散

ポテンシャル流イコール非粘性流体の流れと短絡的に誤解している人は、ポテンシャル流れではエネルギー消散など生じるはずがないと思ってしまう。しかし、§ 1.8 や前項に指摘したように粘性流体であっても渦なし流れ（つまりポテンシャル流）は可能である。そして、その際には上述のように、ナビエ-ストークス方程式中の粘性項が $\nu \nabla^2 \mathbf{v} = 0$ となってしまう。渦度が零の場合、流体の加速はもっぱら圧力の作用により行われる。

この場合流体粒子に働く粘性応力は平衡状態にあり、流れに加速度を生じさせることはない。しかし、粘性応力が零となるのではないので、粘性の作用は内部エネルギーの変化には働いている。

すなわち、たとえ流れがポテンシャル流 ($\omega = 0$) であっても、剪断変形は生じており ($\gamma_{ij} \neq 0$)、その結果流体粒子には粘性による剪断応力が作用し ($\tau_{ij} = \mu \gamma_{ij} \neq 0$)、それによるエネルギー消散 Φ (式 (9.27)) は起こる。ただし、粘性流体のポテンシャル流ではこの剪断応力どうしがつりあい ($\partial \tau_{ji} / \partial x_j = \partial \tau_{yz} / \partial y + \partial \tau_{zx} / \partial z = 0$ など)、粘性は流体に加速度（加速・減速）を生じさせる作用はしないというだけのことにはすぎない。

表 9.2 渦度零の粘性流体流れにおける粘性の作用

$\omega = 0$	{	粘性力 (viscous force) $\equiv 0$ \rightarrow 粘性は運動に関与せず
	}	粘性応力 (viscous stress) $\neq 0$ \rightarrow エネルギー消散

粘性流体の「ポテンシャル流（渦なし流れ）」と境界層

粘性流体の流れイコール渦あり流れ（回転流れ）と思っている人もいるかもしれないが、これは正しくない。流体の運動は流体が非粘性か粘性かにかかわらず、二種の異なる基本運動「渦（回転）運動」と「伸縮・剪断変形」に分けられる。つまり、渦なし（あるいは渦あり）と剪断変形とは別のものである。剪断変形を伴う渦なし流れ（ポテンシャル流）は、流体が非粘性であろうと粘性であろうと可能である。

渦度の方程式 $D\omega/Dt = \nu \nabla^2 \omega$ は、渦度の拡散は粘性の作用によることを示している。渦度は流体中では生成しないから (§ 5.1)、粘性流体の流れであっても境界からの渦度の供給がなければ、ポテンシャル流（渦なし流れ）が可能である。水の波や堰上の流れあるいは翼まわりの流れはその例である。

しかし、そのときナビエ-ストークス方程式の中の粘性項はゼロとなる ($\nu \nabla^2 \mathbf{u}$

$=0$; 粘性作用は流体の加速度運動には関与しなくなる). このとき運動方程式の微分の最高階数は2から1となる. そのため方程式の解は壁面を貫く速度成分ゼロという条件を満たすと, 壁面での no-slip の条件を満たすことはできなくなる. 実際には壁面では no-slip の条件があり, ここから渦度の発生つまり境界層が発達する. 波や振動流の場合には境界層 (Stokes layer) はある薄い範囲に閉じ込められ, また広い領域の場合には壁面からの境界層は流れ全体には影響を及ぼさないため, 流れの大部分の領域はポテンシャル流れとなっている (ポテンシャル流れとして取り扱える).

19世紀末から20世紀初頭にかけて, 科学や技術の世界ではさまざまな不連続的な進歩があった. 19世紀最後の年である1900年の夏にプランクは「量子仮説」を提出し, 1905年アインシュタインは「特殊相対性理論」を含む三つの重要な論文を発表した. ここでは, この時代の流れにかかわる学問・技術のエピソードを述べよう.

ラムとゴールドシュタイン—古典流体力学から現代流体力学へ

(Lamb and Goldstein)

20世紀の前半, 1901年から1930年代にかけての時代, まずラムは完全流体に関するポテンシャル理論を中心とする多くの研究者の成果論文をまとめ, 古典流体力学に関する名著 “Hydrodynamics” を著し, 1932年に第6版としてその最終版を刊行した. しかし, この本は, 新しい時代の花形理論となりつつあった境界層理論についてはほんの少し触れているだけであり, その後の流体力学の中心となる乱流についてはほとんど述べてはいない. けれども, これらについてラムは無関心であったのではない. 第6版の完成後, 彼は当時新進の研究者であったゴールドシュタインに “私は老人であり間もなく神に召されるであろう. そのとき天界の隅より気にかかる二つのことがある. 一つは電気量子力学であり, もう一つは乱流である. 私は前者



ラム



ゴールドシュタイン

当時いかに大きかったか想像するに難くない。この本は戦後昭和30年(1955)代の初め、いまだ物資も情報も少なかった時代に、われわれ大学院生のテキストとしても用いられ、しかもなお十分の新しさをもっていた。というよりも、若い研究者の卯達はこれをスタート台として勉学に邁進したものであった。

については楽観的であるが、後者については悲観的である”と語ったといわれる。ときあたかもハイゼンベルクの行列力学(1925)、シュレディンガーの波動力学(1925)が発表され、量子力学の世界が洋々として開けつつある時代であった。そしてラムの予言は正に適中したのであった。

このラムの本の刊行のわずか数年後の1938年には、当時流体力学の世界を大きく変えつつあった境界層理論、乱流の混合距離理論を中心とした、また豊富な実験結果についての物理的に突っ込んだ記述もふんだんに盛り込んだ、二巻から成る大著“Modern Developments in Fluid Mechanics”が、いまだ30歳そこそこのゴールドシュタインの指揮のもとに刊行された。これが与えたインパクトは

エッフェル—風のがしの名人

(Gustave Eiffel, 1832—1923)

エッフェル塔はすべての人が知っている。しかし、エッフェル塔がエッフェルという人の名にちなんでいることを知る人は多くはない。ましてやエッフェルが元来は橋梁設計者、それも大スパンの橋梁設計の天才であったことや、アメリカ独立100年を記念してフランスからアメリカに贈られ、いまやアメリカのシンボルとなっている自由の女神を中から支える鋼鉄の骨組の設計者であること、そして流体力学においては風洞技術を確立した人であることを知る人は少ない。

フランスは1870—71年普仏(プロシャ—フランス)戦争の敗北の痛手を国内産業の育成で挽回しようとした。その手段としてフランス革命100周年を記念するパリ万博の1889年開催を計画し、その目玉として高さ300mの鉄の塔の建設を決定したのであった。今日ではパリの象徴のよう



なエッフェル塔であるが、計画当時の文化人達の反対の強さは相当のものであった。しかも、万博用の建造物であったから本来なら博覧会終了後は解体の運命にあったわけである。

さて、この塔の設計者に選ばれたのが数々の長径間の橋の設計を手がけ、“橋梁設計の天才”といわれたエッフェルである。ときに彼は50歳を越え、設計者として円熟の境にあった。エッフェルは組立方式を導入し、わずか2年間でエッフェル塔を完成してしまふ。エッフェルは1923年91歳でその生涯を閉じるが、かなり晩年まで地上276mにある塔の第四層に自室をもち、ここで仕事を続けた。

エッフェルがあれだけの高層建造物を比較的少ない材料で作り上げたのは、風を避けるあるいは風を逃がす工夫をしたからである。塔の完成後、エッフェルは風圧の問題を本格的に研究すべくエッフェル塔の下に今日ではエッフェル型といわれる風胴を作っている。よく知られるように風胴にはエッフェル型とゲッテンゲン型がある。前者は環境風胴、後者は航空風胴である。

さて、風胴の発明者は誰であろうか。1903年ライト兄弟は有人飛行に初めて成功するが、これは決して素人のまぐれではない。彼らは自転車修理業の傍らエンジンやプロペラや翼形について実験を重ねており、扇風機を使った“風胴”で好ましい翼形の実験もしている。とすれば、これはもちろん1903年以前である。

一説によると風胴の最初の建造者はイギリスのフィリップス(1884)らしい。もっともこれはスチーム・インジェクターで駆動するものであった。本格的な風胴ということならばエッフェルの名をあげてよいであろう。この研究により1913年彼はアメリカの Smithsonian 協会からラングレー賞を贈られている。これはライト兄弟と同じ時期に有人飛行機に挑戦していたアメリカの天文学者・物理学者ラングレー教授を記念して設けられた賞である。

初めて空を飛んだ人々—素人たちの挑戦

ギリシャ神話にあるイカルス話や羽衣伝説などを別にすれば、初めて空を飛んだ人はドイツの土木技師オットー・リリエントール(1848—1896)である。鳥人を目指した先人達が鳥の飛び方から例外なく羽ばたき飛行を試みたのに対し、彼はまず飛行の原理の研究を重ね1891年43歳のとき固定翼式のグライダー(滑空機)による無動力飛行に成功した。その後自宅の庭や小さな丘の斜面を利用して飛行テストを重ねたが、数年後穏やかな日であったにもかかわらず不幸にして突風にあおられて墜落死した。なお、フランスのアルフォンス・ペノー(1850—1880)はすでに1871年にゴムひも動力の模型飛行機の公開飛行に成功している。

イタリア・ルネッサンス期の万能の天才といわれるレオナルド・ダ・ビンチは羽ばたき飛行機やヘリコプターのデザインを残しており、飛行機械の設計者としても有名である。全日空のかつてのマークは彼のヘリコプターの図からとられたものである。

また、わが国でも江戸時代中期に備前(岡山)の表具師職人で傘(カラカサ)幸吉との渾名をとった浮田幸吉(1757—1847)が細工の腕を活かして翼を作り(彼も

また羽ばたき機で何度か失敗したのち、固定翼を用いた、橋の欄干から河原に飛んで人々を驚かした。天明5年(1785)のことである。しかし、彼は人のせぬことをしたとして、藩の役人に処罰されてしまう。記録がはっきりしている人としては明治期の四国愛媛県(八幡浜)の人、二宮忠八(1866—1936)がいる。彼はカラスの空中静止滑空をヒントに、ゴム動力の固定翼式の飛行機の模型を飛ばすことに1891年に成功した。リリエントールのグライダーによる飛行と同年のことであり、ライト兄弟に先立つこと12年である。ついで人力飛行機の設計を行ったり機械動力式の実物機を計画したが、日清戦争などの影響で製造が遅れているうちに、ライト兄弟に先を越されて実際の製作は断念したといわれる。彼の偉業100年を記念して1991年には彼の設計に改良を加えた復元機の作製が行われた。

ライト兄弟と全く同じ時代に同じアメリカで飛行機の実現に熱中していたのが、ラングレー(1834—1906)である。彼は全くのアマチュアであったライト兄弟とは違い、畑違いとはいえ天文学と物理学を専攻するウェスタン大学の教授であり、後にアルゲー天文台長やスミソニアン協会の会長も務めた。彼の試作したエアロドロームと名づけられた飛行機は助手の操縦でカタパルトから、ボストンのポトマック河上に打ち出されたが、あわれ河に墜落し、人類初飛行の栄誉を逃してしまっている。これはライト兄弟による飛行に先立つこと9日前のことであった。しかし、彼の名はアメリカの航空宇宙開発の総元締であるNASAの研究所名として残っている。

ライト兄弟一富にも栄誉にも恵まれなかった先駆者

ウィルバー・ライト(1867—1912)とオーヴィル・ライト(1871—1948)の兄弟は飛行機の発明者(正確にいうと人類最初の有人動力飛行機の作製者)として、今日ではあまりにも有名である。しかし、彼らの本業は当時盛んになってきた自転車(自動車のミスプリではない!)の修理業である。彼らは後には自らの設計による製造も行ったが、流体力学者でも機械工学者でもない。いわゆるアマチュアであったにすぎない(いま一步のところで失敗したラングレーは大学教授ではあったが、専門は畑違いの天文学であり、同じくアマチュアといえる)。にもかかわらず、ライト兄弟をここで流体力学史に名を残す人々のうちに加えたのは、一つには彼らによる飛行機の発明以後、流体力学と飛行機の関係はあたかも車の両輪のようであり、飛行機の性能向上に対する要求が流体力学に新たな課題を提起しその発達を促し、また逆に流体力学の進歩が飛行機の性能を向上させ、さらなる高性能の飛行機を期待させたこと、飛行機の発明発達が今世紀における流体力学全体の目覚ましい進歩の原動力となったことによる。いま一つの理由は、ライト兄弟はアマチュアとはいいながら全くのあてずっぽうの試みと好運だけで成功したのではなく、実験的手法がまだまだ一般的常識となっていなかった当時あって、自転車部品を利用してそまつながらも風洞を自作して翼形の性能試験を行い、また風式グライダーの模型により性能試験を行って飛行の原理を研究し、そして実物のグライダーによって操縦技術を修得するなど、彼らの思考法が合理的な道筋をたどった実証的、科学的なものであったことによる。彼らが初飛行に成功したのは、このようにして性能のよ



ウィルバー・ライト



オーヴィル・ライト

い翼型を見出し、かつ軽いガソリン・エンジンの製作開発に成功したこと、また、翼をワイヤで捻ることにより（今日では翼のフラップという機構によっている）機体を制御するという新しい着想を得たことなどによる。

ライト兄弟は牧師を父として生まれた。彼らの飛行機への夢は幼い頃父が買ってくれたペノー式のゴム動力の模型飛行機によって触発された。彼らは当時の新商売であった自転車修理と製造を業としながら、研究と試作を重ね遂に1903年12月17日寒風の吹くノース・カロライナ州のキティホーク砂丘でごく少数の人々の見守るうち、フライヤー号によって“自らの動力で離陸し、空中を滑空し、かつ操縦して離陸と同じ高さの地上に着陸する”という人類初の飛行に成功する。このときの第一回目の飛行は時間にしてわずか12秒間、距離にして36mであった。その日の数回の飛行の最長記録でもわずか256mの距離を低い高さで59秒間飛んだにすぎなかった。

しかも、この快挙はアメリカ国内においてさえほとんど報道されず、わずかに彼らの地元のオハイオ州デイトンの小さな地方夕刊紙の第一面に報道されただけであった。まして、文化・科学の中心を自負していたヨーロッパでは全く問題とされなかった。当時のアメリカはヨーロッパ世界からは二流国として扱われていたから無理もないことであった。しかし、すでにエジソンによる数々の発明やフォードによるベルト・コンベア式の自動車の生産が社会生活に変革を与え始めており、アメリカが今世紀において世界の大国へ発展するための躍動がすでに始まりつつあった。

ひとたび新しいことに誰かが成功すると、二番手は楽である。一番手の成功者は後から追いかけて来る多数の模倣者によってたちまちに追いつかれ追い越されてしまう。ヨーロッパでも1906年11月にはライト兄弟に遅れること3年にしてサントス・デュモン（ブラジル人）による初飛行が行われた。もっとも、このときの彼の記録は3年前のライト兄弟の飛行記録にさえ劣っていた。彼らが得意の絶頂にあったのは、1908年8月8日ウィルバーがフランスのル・マンでデモンストレーション

飛行を行い、ヨーロッパで続々と作られ始めた模倣機に対する優位を世界に示した頃であろう。しかし、撓み翼（補助翼）と方向舵操作という彼らの発明した飛行機械の機構はすぐにマネをされ、1909年頃からはヨーロッパついでアメリカで彼らの飛行機の性能を上回る飛行機が続々と製作されるようになった。そののみか、1914年に始まる第一次世界大戦には飛行機は早くも兵器（最初は偵察任務ぐらいであったのが、たちまちにして戦闘や爆撃に使用された）として利用された。

先駆者の常として、彼らの人生はそれに相応しい名誉や富に恵まれたとはいえない。彼らは特許の所有を巡って長く無駄で不快な裁判に時間と努力を費やすことになる。あまつさえ、アメリカにおいてさえ人類初飛行の偉業は失敗に終わったラングレーに帰されてしまう。というのは、ラングレーの友人やラングレーが会長を務めたスミソニアン協会の人々は、1914年博物館に保存してあったラングレーのエアロドローーム機を（ライト兄弟の特許を利用して）再組立し、約5秒間これを飛ばし、人類初飛行の栄冠をラングレーにすり換えてしまった。1942年になってスミソニアン協会はやっとライト兄弟の主張を認めた。

彼らの発明になる飛行機は半世紀を経ずしてほぼ発達の極に達し、すばらしい能力を備えた優美な機械へと進化した。そのみではなく、今世紀後半の大型旅客機の目覚ましい発達は世界の多くの普通の人々にも世界の他の国々を広く見聞し、他の国々の人々と交流する機会を与え、ひいては（エレクトロニクスの発達等による）情報化社会・情報化時代の到来を促し、新しい世界秩序の再編への一翼を担うことになった。

兄のウィルバーは1912年45歳の若さでチフスで世を去ったが、弟のオーヴィルは特許権を売って1915年には隠退し、第二次大戦後の1948年まで長生した。彼は自分達の発明した飛行機械の発達にどんな感慨を懐いていたであろうか。